Übungen zu Mathematik 2 mit Musterlösungen

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^{10} = j+1.$$

Kann man sagen, dass die Lösungen auf einem Kreis in der komplexen Ebene liegen?

Lösung von Aufgabe 1. Sei

$$z+1 = re^{j\varphi}.$$

Dann ist

$$(z+1)^{10} = r^{10}e^{j10\varphi}.$$

Mit

$$j+1 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

ist die Gleichung

$$r^{10}e^{j10\varphi} = \sqrt{2}e^{j\pi/4}.$$

Aus der Gleichheit der Beträge folgt

$$\begin{aligned} r^{10} &= \sqrt{2} \\ r &= 2^{1/20}. \end{aligned}$$

Die Winkel müssen gleich sein bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, d.h.

$$\begin{aligned} 10\varphi &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \varphi &= \frac{\pi}{40} + \frac{1}{10}2k\pi \\ &= (1+8k)\pi/40, \qquad k = 0, 1, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z+1 &= 2^{1/20}e^{j(1+8k)\pi/40} \\ z &= 2^{1/20}e^{j(1+8k)\pi/40} - 1 \\ &= \underbrace{2^{1/20}\cos((1+8k)\pi/40) - 1}_{\text{Realteil}} + j\,\underbrace{2^{1/20}\sin((1+8k)\pi/40)}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

Die Lösungen liegen auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit Radius $2^{1/20}$. Der Mittelpunkt ist allerdings nicht der Koordinatenursprung sondern die reelle Zahl -1.

Aufgabe 2. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei Matrizen, deren Komponenten Funktionen von t sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer Matrix ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (A')_{ij} &= a'_{ij}(t) \\ (B')_{ij} &= b'_{ij}(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Produktregel der Ableitung für Matrizen gilt, d.h.

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Lösung von Aufgabe 2. Zu zeigen:

$$(AB)'_{ij} = (A'B + AB')_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} (AB)'_{ij} &= \left(\sum_k A_{ik}B_{kj}\right)' \\ &= \sum_k (A_{ik}B_{kj})' \\ &= \sum_k A'_{ik}B_{kj} + A_{ik}B'_{kj} \\ &= \sum_k A'_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}B'_{kj} \\ &= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Die Menge aller T-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und bildet somit einen Vektorraum.

Das komplexe Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Der erste Faktor wird konjugiert komplex genommen um zu erreichen, dass

$$\vec{x} \circ \vec{x} \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Das komplexe Skalarprodukt ist damit wie das reelle positiv definit, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{x} &\geq 0 \\ \vec{x} \circ \vec{x} &= 0 \text{ gdw. } \vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ähnlich kann man auch auf T-periodischen Funktionen ein Skalarprodukt definieren. Für zwei T-periodische Funktionen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt $f \circ g$ eine Zahl, die definiert ist durch

$$f \circ g = \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass die T-periodischen Funktionen

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ g(t) &= e^{j\ell\omega t} \end{aligned}$$

orthogonal sind für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $k \neq \ell$, d.h.

$$f \circ g = 0.$$

Lösung von Aufgabe 3. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ g(t) &= e^{j\ell\omega t} \end{aligned}$$

$k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $k \neq \ell$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g &= \int_0^T e^{-jk\omega t} e^{j\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{j(\ell-k)\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} \left[e^{j(\ell-k)\omega t} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (e^{j(\ell-k)\omega T} - 1) \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (e^{2\pi j(\ell-k)} - 1) \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (\cos(2\pi(\ell-k)) + j\sin(2\pi(\ell-k)) - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $\ell - k$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 4. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, d.h.

- für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.
- für alle $z \in \mathbb{C}$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt $uz \in \mathbb{C}$.

Die Lineare Hülle von $z_1, \ldots, z_n$ ist definiert durch

$$L(z_1, \ldots, z_n) = \{u_1 z_1 + \ldots + u_n z_n \,|\, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die Gewichte $u_1, \ldots, u_n$ bei der Linearkombination von $z_1, \ldots, z_n$ dürfen also nur *reelle* Zahlen sein.

Nennen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathbb{C}$.

Lösung von Aufgabe 4. Eine Basis von $\mathbb{C}$ ist z.B. $(1, j)$. Die Dimension von $\mathbb{C}$ ist somit 2.

Aufgabe 5. Nennen Sie vier äquivalente Bedingungen dafür, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist.

Lösung von Aufgabe 5.

- Die Matrix Gleichung $AX = E$ hat eine Lösung.
- A ist invertierbar.
- Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
- Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat eine Lösung für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung hat.

Lösung von Aufgabe 6. Die Matrix A muss regulär sein.

Aufgabe 7. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein Vektorraum. Berechnen Sie die Dimension und eine Basis der Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 7. Die Zeilen von A sind linear abhängig. Damit bleibt nur eine relevante Gleichung

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

übrig. Somit sind x_2, x_2 beliebig und

$$x_1 = x_2 - 3x_3.$$

Die Lösungsmenge ist damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Dimension der Lösungsmenge ist damit 2 und eine Basis ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 8. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die jeden Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ an der y-Achse spiegelt. Berechnen Sie einen Funktionsterm für f. Ist f eine lineare Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 8. Funktionsterm für f.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

f ist linear, die Matrix Darstellung ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3x & \text{falls } x \geq 0 \\ 5x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Ist f linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 9. f ist nicht linear. Die erste Linearitätsbedingung ist nicht erfüllt, da z.B.

$$\begin{aligned} f(-3+2) &= f(-1) \\ &= -5 \\ f(-3)+f(2) &= -15+6 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Die zweite Linearitätsbedingung ist nicht erfüllt, da z.B.

$$\begin{aligned} f(-2\cdot 3) &= f(-6) \\ &= -30 \\ -2f(3) &= -2\cdot 9 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Bei den "meisten" Funktionen sind entweder beide Linearitätsbedingungen erfüllt oder keine. Bei den folgenden beiden Beispielen gilt dies jedoch nicht. Entscheiden Sie jeweils, welche Linearitätsbedingung erfüllt ist.

Im zweiten Beispiel werden lineare Funktionen ins Komplexe erweitert: Eine Funktion $f \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ heißt linear wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ und alle $u \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) &= f(\vec{x})+f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$

- $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1^2/x_2 & \text{falls } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x_2 = 0 \end{cases}$$

- $$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \mathrm{re}(x).$$

Lösung von Aufgabe 10.

- Für $x_2, y_2 \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{y_1^2}{y_2} \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \frac{(x_1+y_1)^2}{x_2+y_2} \end{aligned}$$

und somit ist die erste Linearitätsbedingung nicht erfüllt. Andererseits ist für $u \neq 0$ und $x_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} f\left(u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \frac{(ux_1)^2}{ux_2} \\ &= u\frac{x_1^2}{x_2} \\ &= uf\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $x_2 = 0$ oder $u = 0$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= 0 \\ &= uf\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit ist die zweite Linearitätsbedingung erfüllt.

- Für beliebiges $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{re}(x+y) = \mathrm{re}(x) + \mathrm{re}(y)$$

und damit ist die erste Linearitätsbedingung erfüllt. Andererseits ist z.B.

$$\begin{aligned} j\mathrm{re}(5) &= 5j \\ \mathrm{re}(5j) &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die zweite Linearitätsbedingung ist nicht erfüllt.

Aufgabe 11. Nennen Sie vier äquivalente Bedingungen dafür, dass die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind.

Lösung von Aufgabe 11.

- Keiner der Vektoren ist Linearkombination der anderen.
- Für alle ℓ gilt

$$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell, \ldots, \vec{a}_n) \neq L(\vec{a}_1, \ldots, \cancel{\vec{a}_\ell}, \ldots, \vec{a}_n)$$

- Der Nullvektor kann nur auf triviale Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden.
- Jeder Vektor $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ kann auf genau eine Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden.

Aufgabe 12. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Lösung von Aufgabe 12. Die Spalten von A sind $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entscheiden Sie von beiden Linearitätsbedingungen, ob f sie erfüllt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 13. f erfüllt keine der beiden Linearitätsbedingungen, wie durch ein Gegenbeispiel gezeigt wird.

$$\begin{aligned} f(1+\pi) &= -(1+\pi) \\ f(1) + f(\pi) &= 1 - \pi \\ f(\pi 2) &= -2\pi \\ \pi f(2) &= 2\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Nennen Sie ein Beispiel für ein System von drei linear unabhängigen Vektoren im $\mathbb{R}^4$.

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15. Ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

linear? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 15. Die Funktion ist nicht linear. Es gilt z.B. für $x = 2$ und $y = -3$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= |x+y| \;=\; |-1| \;=\; 1 \\ f(x)+f(y) &= |x|+|y| \;=\; 2+3 \;=\; 5. \end{aligned}$$

Die erste Linearitätsbedingung ist damit nicht erfüllt.

Aufgabe 16. Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion. Beweisen Sie, dass die Menge

$$M = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

ein Vektorraum ist.

Lösung von Aufgabe 16. Zu zeigen ist, dass M abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation ist.

- Abgeschlossenheit unter Addition:
  Seien $\vec{y}_1, \vec{y}_1 \in M$.
  Zu zeigen: $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in M$.
  Aus der Annahme folgt, dass es $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

  $$\begin{aligned} f(\vec{x}_1) &= \vec{y}_1 \\ f(\vec{x}_2) &= \vec{y}_2. \end{aligned}$$

  Da f linear ist, folgt

  $$\begin{aligned} \vec{y}_1 + \vec{y}_2 &= f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) \\ &= f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2). \end{aligned}$$

  Damit ist $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in M$.
- Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation.
  Seien $\vec{y} \in M$ und $a \in \mathbb{R}$.
  Zu zeigen: $a\vec{y} \in M$.
  Aus der Annahme folgt, dass es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

  $$f(\vec{x}) = \vec{y}.$$

  Da f linear ist, folgt

  $$\begin{aligned} a\vec{y} &= af(\vec{x}) \\ &= f(a\vec{x}). \end{aligned}$$

  Damit ist $a\vec{y} \in M$.

Aufgabe 17. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Funktion mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 17. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen kann man dies durch Lösen eines LGS berechnen. Da f linear ist, folgt

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Beweisen Sie, dass das Produkt zweier regulärer $n \times n$ Matrizen wieder regulär ist.

Sie dürfen alle Theoreme verwenden, die in der Vorlesung gezeigt wurden. Machen Sie aber deutlich, welches Theorem Sie an welcher Stelle verwenden.

Schreiben Sie zunächst auf, was die Annahmen sind und was zu zeigen ist.

Lösung von Aufgabe 18. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist regulär genau dann wenn sie eine Inverse hat bzw. genau dann wenn das homogene LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ hat.

- Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reguläre Matrizen.
  Zu zeigen AB ist regulär.
- Annahme $AB\vec{x} = \vec{0}$.
  Zu zeigen $\vec{x} = \vec{0}$.
- Da A regulär ist, hat A eine inverse Matrix. Multipliziert man beide Seiten der Annahme mit A^{-1} erhält man

  $$\begin{aligned} B\vec{x} &= A^{-1}\vec{0} \\ B\vec{x} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

  Da B regulär ist, hat B eine inverse Matrix. Multipliziert man beide Seiten mit B^{-1}, erhält man

  $$\vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

Man kann die Aussage auch dadurch beweisen, dass man zeigt, dass AB eine Inverse hat, d.h. die Gleichung

$$AB\,X \quad = \quad E$$

eine Lösung X hat. Da A und B regulär sind, kann man auf beiden Seiten mit A^{-1} und B^{-1} multiplizieren:

$$\begin{aligned} BX &= A^{-1} \\ X &= B^{-1}A^{-1}. \end{aligned}$$

Damit hat AB eine Inverse $B^{-1}A^{-1}$ und ist somit regulär.

Aufgabe 19. Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

wobei $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ konstante Vektoren sind. Zeigen Sie, dass f die beiden Linearitätsbedingungen erfüllt.

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) &= f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \ldots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\ &= x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n + y_n\vec{a}_n \\ &= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= f\begin{pmatrix} ux_1 \\ \vdots \\ ux_n \end{pmatrix} \\ &= ux_1\vec{a}_1 + \ldots + ux_n\vec{a}_n \\ &= u(x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n) \\ &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$