Heilbronn, den 16.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{-3} + 1 = j.$$

Lösung von Aufgabe 1. Umstellen der Gleichung ergibt

$$z^{-3} = j - 1 = \sqrt{2}\, e^{j3\pi/4}.$$

Sei $z = re^{j\varphi}$. Dann ist

$$z^{-3} = r^{-3}e^{-j3\varphi}.$$

Die Gleichung ist damit

$$r^{-3}e^{-j3\varphi} = \sqrt{2}e^{j3\pi/4}.$$

Folglich gilt für den Betrag r von z

$$\begin{aligned} r^{-3} &= \sqrt{2} \\ r^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ r &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}. \end{aligned}$$

Für den Winkel φ gilt

$$\begin{aligned} -3\varphi &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \varphi &= -\frac{\pi}{4} - \frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$z = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{-j\pi(1/4 + 2k/3)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie unter Verwendung von komplexen Zahlen, dass

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Lösung von Aufgabe 2. Aus der Euler Gleichung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

folgt mit $\varphi = x + y$

$$e^{j(x+y)} = \cos(x+y) + j\sin(x+y).$$

Nimmt man den Imaginärteil auf beiden Seiten, erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \mathrm{im}(e^{j(x+y)}) \\
&= \mathrm{im}(e^{jx}e^{jy}) \\
&= \mathrm{im}((\cos(x)+j\sin(x))(\cos(y)+j\sin(y))) \\
&= \cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie

$$\left|\frac{1}{1+e^{j\varphi}}\right|.$$

Für welche Winkel φ ist das Ergebnis nicht definiert?

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1+e^{j\varphi}}\right| &= \frac{1}{|1+e^{j\varphi}|} \\
&= \frac{1}{|1+\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1+\cos(\varphi))^2+\sin^2(\varphi)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2+2\cos(\varphi)}}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist nicht definiert wenn $\cos(\varphi) = -1$, d.h.

$$\varphi = (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie verwendet haben. Berechnen Sie dann den Wert des bestimmten Integrals von -3 bis 2.

- $\displaystyle\int xa^x dx.$
- $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx.$
- $\displaystyle\int \sin(x)/\cos(x)dx.$
- $\displaystyle\int (x-3)\sin(2x)dx.$

Lösung von Aufgabe 4.

- Produktintegration:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \\
g'(x) &= a^x \\
f'(x) &= 1 \\
g(x) &= a^x / \ln(a) \\
\int xa^x dx &= xa^x / \ln(a) - \int a^x / \ln(a) dx \\
&= xa^x / \ln(a) - a^x / \ln(a)^2 + C \\
&= \frac{a^x}{\ln(a)^2}(x \ln(a) - 1) + C \\
\int_{-3}^{2} xa^x dx &= \frac{1}{\ln(a)^2}\left[xa^x \ln(a) - a^x\right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{2a^5 \ln(a) - a^5 + 3\ln(a) + 1}{a^3 \ln(a)^2}
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
g &= \sin(x) \\
dg/dx &= \cos(x) \\
dx &= dg/\cos(x) \\
\int \sin(x)\cos(x) dx &= \int g \cos(x) dg/\cos(x) \\
&= \int g dg \\
&= 1/2 g^2 + C \\
&= 1/2 \sin(x)^2 + C \\
\int_{-3}^{2} \sin(x)\cos(x) dx &= 1/2 \left[\sin(x)^2\right]_{-3}^{2} \\
&= 1/2(\sin(2)^2 - \sin(-3)^2) \\
&= 0.403
\end{aligned}
$$

- $$\begin{aligned}
g &= \cos(x) \\
dg/dx &= -\sin(x) \\
dx &= dg/-\sin(x) \\
\int \sin(x)/\cos(x)dx &= \int \frac{\sin(x)dg}{-g\sin(x)} \\
&= -\int 1/gdg \\
&= -\ln|g| \text{ falls } g \neq 0 \\
&= -\ln|\cos(x)| + C \text{ falls } \cos(x) \neq 0 \\
\int_{-3}^{2} \sin(x)/\cos(x)dx &= \int_{-3}^{3-\pi} \sin(x)/\cos(x)dx + \\
& \int_{3-\pi}^{\pi-2} \sin(x)/\cos(x)dx + \\
& \int_{\pi-2}^{2} \sin(x)/\cos(x)dx \\
&= \int_{3-\pi}^{\pi-2} \sin(x)/\cos(x)dx \\
&= -[\ln|\cos(x)|]_{3-\pi}^{\pi-2} \\
&= -(\ln|\cos(\pi-2)| - \ln|\cos(3-\pi)|) \\
&= 0.8666
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= x-3 \\
g'(x) &= \sin(2x) \\
f'(x) &= 1 \\
g(x) &= -1/2\cos(2x) \\
\int (x-3)\sin(2x) &= -1/2(x-3)\cos(2x) + 1/2\int \cos(2x) + C \\
&= -1/2(x-3)\cos(2x) + 1/4\sin(2x) + C \\
\int_{-3}^{2} (x-3)\sin(2x) &= [-1/2(x-3)\cos(2x) + 1/4\sin(2x)]_{-3}^{2} \\
&= 1/2\cos(4) + 1/4\sin(4) - 3\cos(-6) - 1/4\sin(-6) \\
&= -3.466
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei $0 \notin [a,b]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b \frac{\sin(1/x)}{x}dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Lösung von Aufgabe 5. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ dx &= -x^2 du \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin(1/x)}{x} dx &= \int_{1/a}^{1/b} u \sin(u)(-x^2) du \\ &= -\int_{1/a}^{1/b} u \sin(u) \frac{1}{u^2} du \\ &= \int_{1/b}^{1/a} \frac{\sin(u)}{u} du. \end{aligned}$$

Da in einem bestimmten Integral die Integrationsvariable beliebig umbenannt werden kann gilt somit

$$\int_a^b \frac{\sin(1/x)}{x} dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x} dx.$$

Lösung von Aufgabe 6. Umformen.

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x} dx = \int \frac{(3\ln(x))^2}{x} dx.$$

Substitution.

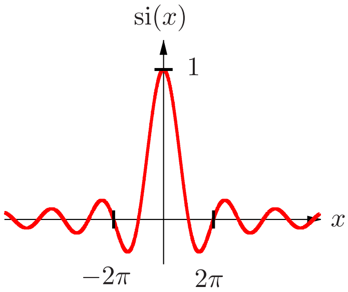
$$\begin{aligned} g &= \ln(x) \\ \frac{dg}{dx} &= \frac{1}{x} \\ dx &= x dg. \end{aligned}$$

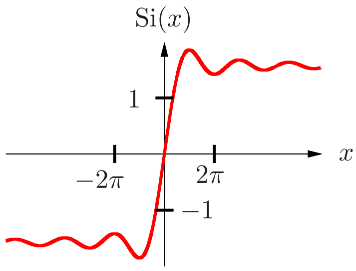
Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{(3\ln(x))^2}{x} dx &= \int \frac{(3g)^2}{x} x dg \\ &= 9 \int g^2 dg \\ &= 3g^3 + C \\ &= 3\ln(x)^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. In der digitalen Signalverarbeitung spielt die si-Funktion eine wichtige Rolle. Sie ist definiert durch

$$\mathrm{si} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$





Die si-Funktion hat zwar eine Stammfunktion $\mathrm{Si}(x)$, diese ist jedoch ähnlich wie die $e^{(x^2)}$ Funktion nicht duch einen Term mit den üblichen Funktionssymbolen darstellbar. Man bezeichnet solche Funktionen als nicht elementar integrierbar. Das Problem der Berechnung einer Stammfunktion einer beliebigen elementar integrierbaren Funktion wurde von Robert H. Risch 1968 gelöst (Risch Algorithmus). Die Si-Funktion heißt Integralsinus und tritt u.a. in Erscheinung wenn man die Artefakte an Farbkanten von JPEG komprimierten Bildern erklären möchte (siehe Gibbssches Phänomen). Um mit der Si-Funktion arbeiten zu können, soll ihre Taylor Reihe berechnet werden. Gehen Sie also von der Taylor Reihe der Sinus Funktion aus und berechnen Sie daraus die Taylor Reihe der si-Funktion. Diese kann nun gliedweise integriert werden, d.h. sie müssen von jedem Summanden eine Stammfunktion bestimmen. Wählen Sie die Integrationskonstante so dass $\mathrm{Si}(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 7. Die Taylor Reihe der Sinus Funktion ist

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Damit gilt

$$\mathrm{si}(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots.$$

Gliedweise Integration liefert

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \times 3!} + \frac{x^5}{5 \times 5!} - \ldots + C.$$

Aus $\mathrm{Si}(0) = 0$ folgt $C = 0$, d.h.

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \times 3!} + \frac{x^5}{5 \times 5!} - \ldots.$$

Aufgabe 8. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. Von einer linearen Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei bekannt, dass

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ und} \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Konstanten a, b. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Lösung von Aufgabe 9. Aus den Bedingungen folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} a + 6 &= a^2 \\ 1 + 2b &= a. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} a^2 - a - 6 &= 0 \\ a_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 5}{2} \\ a_1 &= 3 \\ a_2 &= -2 \end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} b &= \frac{a-1}{2} \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= -3/2. \end{aligned}$$

Damit hat man zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ b_2 &= -3/2. \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $g \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$g(\vec{x}) = f(A\vec{x}).$$

- Zeigen Sie, dass

  $$g(\vec{x} + \vec{y}) = g(\vec{x}) + g(\vec{y}).$$

  Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, warum Sie ihn machen dürfen. Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften von linearen Funktionen und Matrizen verwenden.
- Berechnen Sie in Abhängigkeit von f und den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ von A eine Matrix B so dass $g(\vec{x}) = B\vec{x}$.

Lösung von Aufgabe 10. Da f linear ist, gilt

$$\begin{aligned} g(\vec{x} + \vec{y}) &= f(A(\vec{x} + \vec{y})) && \text{Definition von } g \\ &= f(A\vec{x} + A\vec{y}) && \text{Rechengesetz der Matrix Multiplikation} \\ &= f(A\vec{x}) + f(A\vec{y}) && \text{Linearität von } f \\ &= g(\vec{x}) + g(\vec{y}) && \text{Definition von } g. \end{aligned}$$

Die Matrix von g besteht aus den Bildern der kanonischen Basisvektoren:

$$\begin{aligned} B &= (g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_k)) \\ &= (f(A\vec{e}_1), \ldots, f(A\vec{e}_k)) \\ &= (f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_k)). \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Da f bijektiv ist, besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1}. Berechnen Sie die Matrix für f und für f^{-1}.

Lösung von Aufgabe 11. Die Matrix für f ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion löst man die Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 \end{aligned}$$

nach $\vec{x}$ auf:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist somit

$$f^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Matrix ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12. Die Menge aller 2×3 Matrizen ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und bildet daher einen Vektorraum. Nennen Sie eine Basis für diesen Vektorraum. Was ist seine Dimension?

Was ist die Dimension des Vektorraums der linearen Funktionen von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^7$?

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 3}$ hat Dimension 6.

Der Vektorraum der linearen Funktionen von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^7$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{7\times 5}$. Seine Dimension ist daher 35.

Aufgabe 13. 3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig. Zeigen Sie damit, dass es keine injektive, lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geben kann. Sie dürfen alle Eigenschaften der linearen Unabhängigkeit nutzen, die in der Vorlesung gezeigt wurden.

Lösung von Aufgabe 13. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit

$$f(\vec{x}) \quad = \quad A\vec{x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ die Spalten von A. Dann ist

$$f(\vec{x}) \quad = \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3.$$

Da 3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ immer linear abhängig sind, sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig. Folglich ist die Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ nicht eindeutig, d.h. es gibt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ so dass

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 \quad = \quad y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3 \quad = \quad \vec{0}.$$

Damit ist $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ und folglich f nicht injektiv.

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass die Spalten von A genau dann linear unabhängig sind, wenn die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\vec{x}) \quad = \quad A\vec{x}$$

injektiv ist. Sie dürfen alle in der Vorlesung besprochenen Kriterien für linear unabhängige Vektoren verwenden.

Lösung von Aufgabe 14.

- Annahme: Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ von A sind linear abhängig. Zu zeigen: f ist nicht injektiv. Da die Spalten von A l.a. sind, gibt es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors, d.h. einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ so dass

  $$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \quad = \quad \vec{0}$$

  bzw.

  $$A\vec{x} \quad = \quad \vec{0}.$$

  Andererseits ist aber auch

  $$A\vec{0} \quad = \quad \vec{0}.$$

  Damit ist

  $$f(\vec{x}) \quad = \quad f(\vec{0})$$

  obwohl $\vec{x} \neq \vec{0}$ und somit f nicht injektiv.

- Annahme: f ist nicht injektiv. Zu zeigen: Spalten von A sind linear abhängig. Da f nicht injektiv ist, gibt es $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ so dass

  $$f(\vec{x}) = f(\vec{y})$$

  bzw.

  $$\begin{aligned} A\vec{x} &= A\vec{y} \\ A(\vec{x} - \vec{y}) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

  Mit

  $$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$$

  ist

  $$\begin{aligned} z_1\vec{a}_1 + z_2\vec{a}_2 + \ldots + z_n\vec{a}_n &= A\vec{z} \\ &= A(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

  eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors und somit $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Matrix A für die lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}. Berechnen Sie damit einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion f^{-1}. Zeigen Sie dann, dass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0x + 1y + 0z \\ 0x + 0y + 1z \\ 1x + 0y + 0z \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die inverse Matrix kann man mit dem Gauß Algorithmus berechnen. Man muss hierbei nur Zeilen vertauschen.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Damit ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f^{-1}\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= f^{-1}\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei f eine zweistellige, lineare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die einstellige Funktion g mit

$$g(x) = f\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear ist.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= g(x) + g(y) \\ g(ux) &= f\begin{pmatrix} ux \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= f\left(u\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= uf\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= ug(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $1 \in A$.
- Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig als endliche Linearkombination der Elemente von A darstellen, wobei nur Gewichte aus $\mathbb{Q}$ zugelassen sind. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es somit Gewichte $q_1, \ldots, q_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ so dass

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i.$$

Eine solche Menge heißt Hamel Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Sie könnte z.B wie folgt aussehen:

$$A = \{1, \sqrt{2}, \pi, e, \ldots\}.$$

Es wäre dann z.B. $3+\pi \notin A$, da sich $3+\pi$ als endliche Linearkombination von 1 und π mit rationalen Koeffizienten darstellen lässt.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x)$ das Gewicht von 1 in der eindeutigen Darstellung von x als Linearkombination von Elementen aus A mit Gewichten aus $\mathbb{Q}$. So ist z.B.

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 \\ f(\pi - 2) &= -2 \\ f(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für diese Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur eine der beiden Linearitätseigenschaften gilt.

Lösung von Aufgabe 17.

- Die erste Linearitätsbedingung ist erfüllt. Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $a_1 = 1$ so dass

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} q_i a_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} p_i a_i. \end{aligned}$$

Die Gewichte q_i, p_i sind aufgrund der Eigenschaften von A eindeutig. Dann ist $f(x) = q_1$, $f(y) = p_1$ und

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i + \sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (q_i + p_i) a_i.$$

Damit ist

$$f(x+y) = q_1 + p_1 = f(x) + f(y).$$

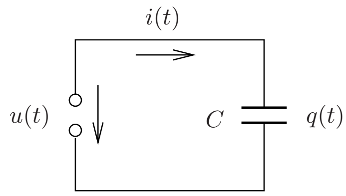
- Die zweite Linearitätsbedingung ist nicht erfüllt. Sei z.B. $u = \pi$ und $x = 1$. Dann ist $f(x) = 1$ und

$$\begin{aligned} f(ux) &= f(\pi) = 0 \\ uf(x) &= \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. In nachfolgendem Bild ist ein Kondensator C direkt an eine komplexe Wechselspannungsquelle mit Spannung

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}$$

angeschlossen.



Für die Ladung des Kondensators gilt somit

$$q(t) = Cu(t).$$

Die Ladungsänderung des Kondensators ist gleich der Stromstärke, d.h.

$$i(t) = q'(t).$$

- Berechnen Sie die Stromstärke $i(t)$ in Abhängigkeit von u_0, C und ω.
- Berechnen Sie hiermit den komplexen Widerstand des Kondensators aus

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

und zeigen Sie, dass R unabhängig von t ist. Wäre dies auch der Fall, wenn $u(t)$ keine komplexe Wechselspannung wäre?

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned} i(t) &= q'(t) \\ &= Cu'(t) \\ &= Cu_0 j\omega e^{j\omega t} \\ R &= \frac{u(t)}{i(t)} \\ &= \frac{u_0 e^{j\omega t}}{Cu_0 j\omega e^{j\omega t}} \\ &= \frac{1}{j\omega C}. \end{aligned}$$

Der Quotient ist nur dann von der Zeit unabhängig, wenn $u(t)/u'(t)$ konstant ist. Dies ist genau dann der Fall wenn $u(t)$ eine e-Funktion ist.