Heilbronn, den 30.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{(-2+j)^2}{j+3}.$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}\frac{(-2+j)^2}{j+3} &= \frac{3-4j}{j+3}\\ &= \frac{(3-4j)(3-j)}{10}\\ &= \frac{5-15j}{10}\\ &= \frac{1-3j}{2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{re}(z) = 1/2, \quad \mathrm{im}(z) = -3/2, \quad |z| = \sqrt{5/2}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$z^3 = \frac{2}{(1+j)^2}$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}(1+j)^2 &= 2j\\ \frac{2}{(1+j)^2} &= \frac{1}{j}\\ &= -j\\ &= e^{j3\pi/2}.\end{aligned}$$

Sei

$$z = re^{j\varphi}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}r^3e^{j3\varphi} &= e^{j3\pi/2}\\ r &= 1\\ 3\varphi &= 3\pi/2 + 2k\pi\\ \varphi &= \pi/2 + 2k\pi/3, \quad k = 0, 1, 2\\ z &= e^{j(\pi/2+2k\pi/3)}\\ &= je^{2\pi jk/3}\\ \mathbb{L} &= \{j, je^{2\pi j/3}, je^{-2\pi j/3}\}\\ &= \{j, e^{-j\pi/6}, e^{-j5\pi/6}\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ linear abhängig und $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Vektoren

$$B\vec{a}_1, \ldots, B\vec{a}_n \in \mathbb{R}^k$$

linear abhängig sind.

Lösung von Aufgabe 3. Annahme:

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

sind linear abhängig und $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

Zu zeigen:

$$B\vec{a}_1, \ldots, B\vec{a}_n \in \mathbb{R}^k$$

sind linear abhängig.

Da $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig sind, gibt es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors, d.h. Gewichte $x_1, \ldots, x_n$ so dass

$$x_1\vec{a} + \ldots + x_n\vec{a}_n \quad = \quad \vec{0}$$

mit $x_\ell \neq 0$ für ein ℓ. Damit ist

$$\begin{aligned} x_1(B\vec{a}_1) + \ldots + x_n(B\vec{a}_n) \quad &= \quad B(x_1\vec{a}_1) + \ldots + B(x_n\vec{a}_n) \\ &= \quad B(x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n) \\ &= \quad B\vec{0} \\ &= \quad \vec{0} \end{aligned}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von $B\vec{a}_1, \ldots, B\vec{a}_n$. Folglich sind die Vektoren $B\vec{a}_1, \ldots, B\vec{a}_n$ linear abhängig.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' \quad = \quad e^{x-y}\frac{\cos(x)}{\sin(e^y)}.$$

Lösung von Aufgabe 4. Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} e^y \sin(e^y) y' \quad &= \quad e^x \cos(x) \\ e^y \sin(e^y) dy \quad &= \quad e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Integration auf der linken Seite nach y.

$$\int e^y \sin(e^y) \quad = \quad -\cos(e^y).$$

Integration auf der rechten Seite nach x.

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos(x)dx &= \frac{1}{2}\int e^x(e^{jx}+e^{-jx})dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(e^{(1+j)x}+e^{(1-j)x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j}e^{(1+j)x}+\frac{1}{1-j}e^{(1-j)x}\right) \\
&= \frac{1}{2(1+j)(1-j)}\left((1-j)e^{(1+j)x}+(1+j)e^{(1-j)x}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^x\left(e^{jx}(1-j)+e^{-jx}(1+j)\right) \\
&= \frac{1}{4}e^x\left(2\mathrm{re}(e^{jx}(1-j))\right) \\
&= \frac{1}{2}e^x\left(\cos(x)+\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Gleichheit der Stammfunktionen.

$$\begin{aligned}
-\cos(e^y) &= \frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x))+C \\
\cos(e^y) &= -\frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x))+C \\
e^y &= \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x))+C\right)+2k\pi \\
y &= \ln\left(\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x))+C\right)+2k\pi\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'\sin(1/y) = \sqrt{y^4e^x}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
y'\sin(1/y) &= y^2e^{x/2} \\
y' &= \frac{y^2}{\sin(1/y)}e^{x/2}.
\end{aligned}$$

Die DGL ist somit separierbar. Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{\sin(1/y)}{y^2}dy = e^{x/2}dx.$$

Integration der linken Seite nach y. Mit Substitution

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{y} \\
\frac{du}{dy} &= -\frac{1}{y^2} \\
dy &= -y^2du
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(1/y)}{y^2} dy &= \int \frac{\sin(u)}{y^2}(-y^2) du \\
&= -\int \sin(u) du \\
&= \cos(u) \\
&= \cos(1/y).
\end{aligned}$$

Integration der rechten Seite nach x.

$$\int e^{x/2} dx = 2e^{x/2}.$$

Damit erhält man die Gleichung

$$\cos(1/y) = 2e^{x/2} + C.$$

Diese Gleichung hat nur dann Lösungen wenn

$$-1 \leq 2e^{x/2} + C \leq 1.$$

In diesem Fall sind die Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned}
1/y &= \pm \arccos(2e^{x/2} + C) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
y &= \frac{1}{\pm \arccos(2e^{x/2} + C) + 2k\pi}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + 2xy = xe^{1-x^2}.$$

Lösung von Aufgabe 6. Es handelt sich um eine lineare DGL. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' + 2xy = 0.$$

Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}
y' &= -2xy \\
\frac{1}{y} &= -2x \\
\ln|y| &= -x^2 + C \\
|y| &= e^{-x^2+C} \\
&= Ke^{-x^2}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y &= Ke^{-x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x)e^{-x^2} \\
y' &= k'(x)e^{-x^2} + k(x)e^{-x^2}(-2x) \\
&= k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}
k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2} + 2xk(x)e^{-x^2} &= xe^{1-x^2} \\
k'(x)e^{-x^2} &= xe^{1-x^2} \\
k'(x) &= xe^{1-x^2}e^{x^2} \\
&= xe \\
k(x) &= \frac{ex^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{ex^2}{2} + C\right)e^{-x^2} \\
&= \frac{1}{2}x^2e^{1-x^2} + Ce^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy' + y = x^4 \qquad \text{für } x > 0.$$

Lösung von Aufgabe 7. Da $x > 0$, kann man umformen.

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3.$$

Homogene DGL.

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{x}y &= 0 \\
y' &= -\frac{1}{x}y \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx \\
\ln|y| &= -\ln|x| + C \\
&= -\ln(x) + C, \qquad \text{da } x > 0. \\
|y| &= Ke^{-\ln(x)}, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\
&= \frac{K}{x} \\
y &= \frac{K}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$\begin{aligned}
y &= \frac{k(x)}{x} \\
y' &= \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{k'(x)x - k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} &= x^3 \\
k'(x)x - k(x) + k(x) &= x^5 \\
k'(x)x &= x^5 \\
k'(x) &= x^4 \\
k(x) &= \frac{x^5}{5} + C.
\end{aligned}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x} \\
&= \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x-1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}^+$.

Lösung von Aufgabe 8. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}y \\
\frac{1}{y}dy &= \frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten:

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + C.$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{\ln(|x|)+C} \\
&= K|x| \quad K \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Da in der Aufgabenstellung eine Lösung für $x \in \mathbb{R}^+$ gesucht wird, ist $|x| = x$. Damit ist die allgemeine homogene Lösung

$$y_H = Kx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man den Ansatz

$$\begin{aligned}
y &= k(x)x \\
y' &= k'(x)x + k(x).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned}
k'(x)x + k(x) - \frac{1}{x}k(x)x &= \frac{x-1}{x} \\
k'(x)x &= \frac{x-1}{x} \\
k'(x) &= \frac{x-1}{x^2} \\
k'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\
k(x) &= \ln(|x|) + \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\ln(|x|) + \frac{1}{x} + C\right)x \\
&= x\ln(|x|) + 1 + Cx.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xyy' = y^2 - 1$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 9. Trennung der Variablen:

$$\frac{y}{y^2-1}dy = \frac{1}{x}dx$$

Integration von

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy$$

mit Substitution

$$u = y^2, \quad \frac{du}{dy} = 2y, \quad dy = \frac{du}{2y}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{y}{y^2-1}dy &= \int \frac{1}{2(u-1)}du \\
&= \frac{1}{2}\ln(|u-1|) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(|y^2-1|) + C.
\end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(|y^2-1|) &= \ln(|x|)+C \\
\ln(|y^2-1|) &= 2\ln(|x|)+C \\
|y^2-1| &= Ke^{2\ln(|x|)}, \quad K>0 \\
&= K(e^{\ln(|x|)})^2 \\
&= Kx^2 \\
y^2-1 &= \pm Kx^2 \\
&= Cx^2, \quad C\in\mathbb{R} \\
y^2 &= Cx^2+1 \\
y &= \pm\sqrt{Cx^2+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = x-\frac{y}{x}$$

für $x>0$.

Lösung von Aufgabe 10. Umformen ergibt

$$y'+\frac{1}{x}y = x.$$

Es handelt sich also um eine lineare DGL erster Ordnung.

- Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned}
y'+\frac{1}{x}y &= 0 \\
\frac{1}{y}y' &= -\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx \\
\ln(|y|) &= -\ln(|x|)+C \\
|y| &= K\frac{1}{|x|}, \qquad K>0 \\
y &= K\frac{1}{|x|}, \qquad K\in\mathbb{R} \\
y &= K\frac{1}{x},\ \text{da } x>0.
\end{aligned}$$

- Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x)\frac{1}{x} \\
y' &= k'(x)\frac{1}{x}-k(x)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$\begin{aligned} k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + k(x)\frac{1}{x^2} &= x \\ k'(x)\frac{1}{x} &= x \\ k'(x) &= x^2 \\ k(x) &= x^3/3 + C. \end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3/3 + C}{x} \\ &= \frac{1}{3}x^2 + C\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = xy(x).$$

Lösung von Aufgabe 11. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{1}{y}dy = xdx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C$$

und damit

$$\begin{aligned} |y| &= e^{x^2/2+C} \\ &= e^{x^2/2}e^C \\ &= K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Damit ist

$$y = \pm K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}^+.$$

Durch Einsetzen prüft man, dass $y(x) = 0$ ebenfalls eine Lösung ist. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12. Sei $y(x)$ eine unbekannte Funktion. Berechnen Sie

$$\int \cos(y(x))y'(x)dx$$

$$\int e^{y(x)}y'(x)dx$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx$$

Lösung von Aufgabe 12. Mit der Substitution $y = y(x)$ und $y'(x) = dy/dx$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int \cos(y(x))y'(x)dx &= \int \cos(y)\frac{dy}{dx}dx \\
&= \int \cos(y)dy \\
&= \sin(y) + C \\
&= \sin(y(x)) + C \\
\int e^{y(x)}y'(x)dx &= \int e^{y}\frac{dy}{dx}dx \\
&= \int e^{y}dy \\
&= e^{y} + C \\
&= e^{y(x)} + C \\
\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx &= \int \frac{dy}{ydx}dx \\
&= \int \frac{1}{y}dy \\
&= \ln(|y|) + C \\
&= \ln(|y(x)|) + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + 2\sin(x)\cos(x)y = e^{\cos^2(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 13. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' + 2\sin(x)\cos(x)y = 0$$

durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -2\sin(x)\cos(x)y \\
\frac{1}{y}dy &= -2\sin(x)\cos(x)dx.
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten:

$$\ln(|y|) = \cos^2(x) + C.$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{\cos^2(x)+C} \\
&= Ke^{\cos^2(x)}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y_H &= Ke^{\cos^2(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Durch Variation der Konstanten erhält man den Ansatz

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{\cos^2(x)} \\ y' &= k'(x)e^{\cos^2(x)} - k(x)e^{\cos^2(x)} 2\cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned} k'(x)e^{\cos^2(x)} - k(x)e^{\cos^2(x)} 2\cos(x)\sin(x) + & \\ 2\sin(x)\cos(x)k(x)e^{\cos^2(x)} &= e^{\cos^2(x)} \\ k'(x)e^{\cos^2(x)} &= e^{\cos^2(x)} \\ k'(x) &= 1 \\ k(x) &= x + C. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$y(x) = (x + C)e^{\cos^2(x)}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{y^2(2x + e^{-x})}{\sin(1/y)}.$$

Lösung von Aufgabe 14. Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{1}{y^2}\sin(1/y)dy = (2x + e^{-x})dx.$$

Integrieren auf der linken Seite nach y mit Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{y} \\ \frac{du}{dy} &= -\frac{1}{y^2} \\ dy &= -y^2 du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\sin(1/y)dy &= \int \frac{1}{y^2}\sin(u)(-y^2)du \\ &= -\int \sin(u)du \\ &= \cos(u) \\ &= \cos(1/y). \end{aligned}$$

Integrieren auf der rechten Seite nach x ergibt

$$\int (2x + e^{-x})dx = x^2 - e^{-x}$$

Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \cos(1/y) &= x^2 - e^{-x} + C \\ 1/y &= \pm\arccos(x^2 - e^{-x} + C) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y &= \pm\frac{1}{\arccos(x^2 - e^{-x} + C) + 2k\pi}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y(x+1)}{x} - e^{-x} \quad = \quad 0$$

für $x > 0$.

Lösung von Aufgabe 15. Die DGL ist linear. Umformen ergibt

$$y' + \frac{x+1}{x} y \quad = \quad e^{-x}.$$

Lösen der homogenen DGL

$$\begin{aligned} y' + \frac{x+1}{x} y &= 0 \\ y' &= -\frac{x+1}{x} y \\ \frac{1}{y} dy &= -\frac{x+1}{x} dx. \end{aligned}$$

Integrieren

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \ln|y| \\ \int -\frac{x+1}{x} dx &= -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= -(x + \ln|x|) \\ &= -x - \ln(x) \quad \text{da } x > 0 \,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -x - \ln(x) + C \\ |y| &= e^{-x} e^{-\ln(x)} e^{C} \\ &= \frac{1}{xe^x} K, \quad K > 0 \\ y &= \pm K \frac{1}{xe^x} \\ &= \frac{K}{xe^x}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Variation der Konstanten liefert den Ansatz

$$\begin{aligned} y &= k(x)(xe^x)^{-1} \\ y' &= k'(x)(xe^x)^{-1} + k(x)(-1)(xe^x)^{-2}(e^x + xe^x) \\ &= \frac{k'(x)}{xe^x} - k(x)\frac{1+x}{x^2 e^x} \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$
\begin{aligned}
\frac{k'(x)}{xe^x} - k(x)\frac{1+x}{x^2e^x} + \frac{x+1}{x}k(x)\frac{1}{xe^x} &= e^{-x} \\
\frac{k'(x)}{xe^x} - k(x)\frac{1+x}{x^2e^x} + k(x)\frac{x+1}{x^2e^x} &= e^{-x} \\
\frac{k'(x)}{xe^x} &= e^{-x} \\
k'(x) &= x \\
k(x) &= \frac{1}{2}x^2 + C.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Ansatz.

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)\frac{1}{xe^x} \\
&= \frac{x}{2e^x} + \frac{C}{xe^x}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'\sqrt{x} = y^2\cos(\sqrt{x}).$$

Lösung von Aufgabe 16. Trennung der Variablen.

$$\frac{1}{y^2} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

Integration.

$$-\frac{1}{y} = 2\sin(\sqrt{x}) + C.$$

Lösen

$$y = -\frac{1}{2\sin(\sqrt{x}) + C}.$$

Aufgabe 17. Sei

$$y' + g(x)y = r(x)$$

eine lineare DGL. Seien y_1, y_2 zwei partikuläre Lösungen dieser DGL. Zeigen Sie, dass dann

$$y_1 - y_2$$

eine Lösung der homogenen DGL

$$y' + g(x)y = 0$$

ist.

Lösung von Aufgabe 17. Zu zeigen ist, dass die Funktion $y_1 - y_2$ Lösung der DGL

$$y' + g(x)y = 0$$

ist. Einsetzen von $y_1 - y_2$ ergibt

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)' + g(x)(y_1 - y_2) &= y_1' - y_2' + g(x)y_1 - g(x)y_2 \\ &= \underbrace{y_1' + g(x)y_1}_{=r(x)} - \underbrace{(y_2' + g(x)y_2}_{=r(x)} \\ &= r(x) - r(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Gegeben sei die DGL

$$y'(x) = \cos\left(e^{\sin(x)y(x)}\right)$$

und der Anfangswert $y(0) = 2$. Schreiben Sie ein Programm, das mit dem Euler Verfahren mit Schrittweite $\Delta x = 10^{-3}$ einen Näherungswert für $y(20)$ berechnet. Die Programmiersprache ist hierbei egal.

Lösung von Aufgabe 18. Das Ergebnis ist $y(20) \approx 9.477$. In Java sieht das Programm wie folgt aus:

```
class Euler
{
  public static void main(String[] args)
  {
    int i;
    double y,ystrich;
    double x = 0.0;
    double dx = 1.0e-3;
    int n = 20000;

    y = 2.0;

    for(i=0; i<=n; i++)
    {
      x = (double)i * dx;
      System.out.println("x = " + x + ", y = " + y);

      ystrich = Math.cos(Math.exp(Math.sin(x)*y));
      y = y + ystrich*dx;
    }
  }
}
```