Heilbronn, den 21.11.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

Entscheiden Sie von beiden Linearitätsbedingungen, ob f sie erfüllt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 1. f erfüllt beide Linearitätsbedingungen.

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}+\vec{y}) &= f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1+y_1-(x_2+y_2) \\
&= x_1-x_2+y_1-y_2 \\
&= f(\vec{x})+f(\vec{y}) \\
f(u\vec{x}) &= f\begin{pmatrix} ux_1 \\ ux_2 \end{pmatrix} \\
&= ux_1-ux_2 \\
&= u(x_1-x_2) \\
&= uf(\vec{x})
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen bildet einen Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Menge der konvergenten Folgen.
- Menge der unbestimmt divergenten Folgen.
- Menge der Nullfolgen.
- Menge der Folgen mit Grenzwert 1.
- Menge der Folgen mit uneigentlichem Grenzert ∞.

Lösung von Aufgabe 2.

- Die Menge der konvergenten Folgen ist ein Vektorraum, da sie abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Die Summe zweier konvergenter Folgen ist konvergent, das skalare Vielfache einer konvergenten Folgen ist konvergent.
- Die Menge der unbestimmt divergenten Folgen ist kein Vektorraum. Multipliziert man z.B. eine unbestimmt divergente Folge mit 0, ensteht eine konvergente Folge.
- Die Menge der Nullfolgen ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und ist daher ein Vektorraum.

- Die Menge der Folgen mit Grenzwert 1 ist kein Vektorraum. Die Summe zweier solcher Folgen hat Grenzwert 2 und nicht 1.
- Die Menge der Folgen mit uneigentlichem Grenzwert ∞ ist kein Vektorraum. Multipliziert man eine solche Folge z.B. mit -1 ist der Grenzwert $-\infty$, nicht ∞.

Aufgabe 3. Sei

$$y' + g(x)y = r(x)$$

eine lineare DGL. Seien y_1, y_2 zwei partikuläre Lösungen dieser DGL. Zeigen Sie, dass dann

$$y_1 - y_2$$

eine Lösung der homogenen DGL

$$y' + g(x)y = 0$$

ist.

Lösung von Aufgabe 3. Zu zeigen ist, dass die Funktion $y_1 - y_2$ Lösung der DGL

$$y' + g(x)y = 0$$

ist. Einsetzen von $y_1 - y_2$ ergibt

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)' + g(x)(y_1 - y_2) &= y_1' - y_2' + g(x)y_1 - g(x)y_2 \\ &= \underbrace{y_1' + g(x)y_1}_{=r(x)} - \underbrace{(y_2' + g(x)y_2}_{=r(x)} \\ &= r(x) - r(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$1 + \frac{\cos(x+2)y^2}{y'\, e^{1/y}} = 0.$$

Lösung von Aufgabe 4. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+2)y^2}{e^{1/y}y'} &= -1 \\ \cos(x^2)y^2 &= -e^{1/y}y' \\ y' &= -\cos(x+2)e^{-1/y}y^2.\end{aligned}$$

Die DGL ist somit separierbar.

$$\frac{1}{y^2}e^{1/y}dy = -\cos(x+2)dx.$$

Berechnen von

$$\int \frac{1}{y^2} e^{1/y} dy$$

durch Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{y} \\ \frac{du}{dy} &= -\frac{1}{y^2} \\ dy &= -y^2 du \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2} e^{1/y} dy &= \int \frac{1}{y^2} e^u (-y^2 du) \\ &= -\int e^u du \\ &= -e^u \\ &= -e^{1/y}. \end{aligned}$$

Integral auf der rechten Seite.

$$\int -\cos(x+2)dx = -\sin(x+2).$$

Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} -e^{1/y} &= -\sin(x+2) + C \\ e^{1/y} &= \sin(x+2) + C \\ \frac{1}{y} &= \ln(\sin(x+2) + C) \\ y &= \frac{1}{\ln(\sin(x+2) + C)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' e^{y+1} + 3 = 2\cos(x).$$

Lösung von Aufgabe 5. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} y' e^{y+1} &= 2\cos(x) - 3 \\ e^{y+1} dy &= (2\cos(x) - 3)dx. \end{aligned}$$

Integrieren

$$e^{y+1} = 2\sin(x) - 3x + C.$$

Lösen

$$\begin{aligned} y + 1 &= \ln(2\sin(x) - 3x + C) \\ y &= \ln(2\sin(x) - 3x + C) - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \cos(x)e^{-\cos(x)} + y\sin(x).$$

Lösung von Aufgabe 6. Es handelt sich um eine lineare DGL.

$$y' - y\sin(x) = \cos(x)e^{-\cos(x)}.$$

Lösen der homogenen DGL.

$$\begin{aligned}
y' - y\sin(x) &= 0 \\
y' &= y\sin(x) \\
\frac{1}{y}dy &= \sin(x)dx \\
\ln|y| &= -\cos(x) + C \\
|y| &= e^{-\cos(x)+C} = e^{-\cos(x)}e^{C} = Ke^{-\cos(x)}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y &= Ke^{-\cos(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x)e^{-\cos(x)} \\
y' &= k'(x)e^{-\cos(x)} + k(x)\sin(x)e^{-\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}
k'(x)e^{-\cos(x)} + k(x)\sin(x)e^{-\cos(x)} - k(x)e^{-\cos(x)}\sin(x) &= \cos(x)e^{-\cos(x)} \\
k'(x)e^{-\cos(x)} &= \cos(x)e^{-\cos(x)} \\
k'(x) &= \cos(x) \\
k(x) &= \sin(x) + C.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$y = (\sin(x) + C)e^{-\cos(x)}.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = \ln(x)$$

für $x > 1$.

Lösung von Aufgabe 7. Es handelt sich um eine lineare DGL. Lösen der homogenen DGL.

$$\begin{aligned}
y' - \frac{1}{x\ln(x)}y &= 0 \\
y' &= \frac{1}{x\ln(x)}y \\
\frac{1}{y}dy &= \frac{1}{x\ln(x)}dx.
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf der rechten Seite mit Substitution

$$u = \ln(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dx = x du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln(x)} dx &= \int \frac{1}{xu} x du \\
&= \int \frac{1}{u} du \\
&= \ln |u| \\
&= \ln |\ln(x)|.
\end{aligned}$$

Da $x > 1$, ist $\ln(x) > 0$ und somit

$$\ln |\ln(x)| = \ln(\ln(x)).$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned}
\ln |y| &= \ln(\ln(x)) + C \\
|y| &= e^{\ln(\ln(x))+C} = K \ln(x), \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y &= K \ln(x), \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned}
y &= k(x) \ln(x) \\
y' &= k'(x) \ln(x) + k(x) \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}
k'(x) \ln(x) + k(x) \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln(x)} k(x) \ln(x) &= \ln(x) \\
k'(x) \ln(x) &= \ln(x) \\
k'(x) &= 1 \\
k(x) &= x + C.
\end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x) \ln(x) \\
&= (x + C) \ln(x) \\
&= x \ln(x) + C \ln(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Lösung von Aufgabe 8. Es handelt sich um eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Lösungsansatz

$$y = e^{\lambda x}$$

erhält man durch Einsetzen

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0.$$

Nach Kürzen mit $e^{\lambda x}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} \quad = \quad \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \quad = \quad 2,$$

d.h. es handelt sich um eine doppelte reelle Nullstelle. Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + y' \quad = \quad x \qquad \text{mit } y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 1.$$

Lösung von Aufgabe 9. Integration auf beiden Seiten.

$$y' + y \quad = \quad \frac{1}{2}x^2 + K.$$

- Homogene DGL.

  $$y' + y \quad = \quad 0.$$

  Charakteristisches Polynom.

  $$\begin{aligned} \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1. \end{aligned}$$

  Allgemeine Lösung der homogenen DGL.

  $$y_H \quad = \quad Ce^{-x}.$$

- Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Ansatz

  $$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y' &= 2ax + b. \end{aligned}$$

  Einsetzen

  $$2ax + b + ax^2 + bx + c \quad = \quad \frac{1}{2}x^2 + K.$$

  Koeffizientenvergleich.

  $$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ 2a + b &= 0 \\ b + c &= K. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} b &= -1 \\ c &= K+1. \end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL ist somit

$$y_P = \frac{1}{2}x^2 - x + K + 1.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - x + K + 1 + Ce^{-x} \\ y' &= x - 1 - Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Startwert $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} K+1+C &= 2 \\ -1-C &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} C &= -2 \\ K &= 3. \end{aligned}$$

Die partiukläre Lösung, die die Startbedingungen erfüllt, ist somit

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 4 - 2e^{-x}.$$

Aufgabe 10. Sei

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) y^{(i)}(x) = r(x)$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung mit Koeffizienten $g_i(x)$. Die Koeffizienten müssen also nicht notwendig konstant sein. Sei y_P eine partikuläre Lösung und y_H eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Zeigen Sie, dass dann

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x)$$

eine Lösung der gegebenen DGL ist.

Lösung von Aufgabe 10. Sei y_P eine partikuläre Lösung der gegebenen DGL und y_H eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_P^{(i)}(x) &= r(x) \\ \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_H^{(i)}(x)) &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen von $y(x) = y_P(x) + y_H(x)$ in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(y_P(x) + y_H(x))^{(i)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(y_P^{(i)}(x) + y_H^{(i)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(x)y_P^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)y_H^{(i)}(x) \\ &= r(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'e^y - 1 = 0.$$

Lösung von Aufgabe 11. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$e^y dy = dx.$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$e^y = x + C.$$

Auflösen nach y ergibt

$$y = \ln(x + C).$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = xy(x).$$

Lösung von Aufgabe 12. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{1}{y} dy = x dx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C$$

und damit

$$\begin{aligned}|y| &= e^{x^2/2+C} \\ &= e^{x^2/2}e^C \\ &= K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Damit ist

$$y = \pm K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}^+.$$

Durch Einsetzen prüft man, dass $y(x) = 0$ ebenfalls eine Lösung ist. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = K\sqrt{e^{x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y' + 2y = \cos(1-x).$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\cos(1-x) = \mathrm{re}(e^{j(1-x)}).$$

Lösung der komplexen DGL:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= e^{j(1-x)} \\ y' + 2y &= e^j e^{-jx}. \end{aligned}$$

Lässt man den konstanten Faktor e^j weg, kommt man zu der DGL

$$y' + 2y = e^{-jx}$$

Ansatz

$$\begin{aligned} y &= ce^{-jx} \\ y' &= -jce^{-jx} \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} -jce^{-jx} + 2ce^{-jx} &= e^{-jx} \\ c(-j+2) &= 1 \\ c &= \frac{1}{2-j} \\ &= \frac{2+j}{5}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$y = \frac{2+j}{5} e^{-jx}.$$

Nimmt man den konstanten Faktor e^j wieder dazu, erhält man die Lösung der komplexen DGL

$$\begin{aligned} y &= \frac{2+j}{5} e^j e^{-jx} \\ &= \frac{2+j}{5} e^{j(1-x)} \\ &= \frac{1}{5}(2+j)(\cos(1-x) + j\sin(1-x)). \end{aligned}$$

Die Lösung der gegebenen reellen DGL ist hiervon der Realteil, d.h.

$$y = \frac{1}{5}(2\cos(1-x) - \sin(1-x)).$$

Aufgabe 14. Gegeben sei die DGL

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0.$$

Zeigen Sie, dass wenn y_1 und y_2 Lösungen der DGL sind, auch $y_1 + y_2$ eine Lösung ist, d.h. dass die Lösungsmenge der DGL abgeschlossen unter Addition ist.

Lösung von Aufgabe 14. Seien y_1, y_2 Lösungen der DGL, d.h.

$$\begin{aligned} y_1'' + g(x)y_1' + h(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + g(x)y_2' + h(x)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zu zeigen: $y_1 + y_2$ ist eine Lösung, d.h.

$$(y_1 + y_2)'' + g(x)(y_1 + y_2)' + h(x)(y_1 + y_2) = 0.$$

Mit der Summenregel der Ableitung gilt

$$\begin{aligned} &(y_1 + y_2)'' + g(x)(y_1 + y_2)' + h(x)(y_1 + y_2) \\ &= y_1'' + y_2'' + g(x)(y_1' + y_2') + h(x)(y_1 + y_2) \\ &= \underbrace{y_1'' + g(x)y_1' + h(x)y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + g(x)y_2' + h(x)y_2}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)^3}$$

Lösung von Aufgabe 15. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$y^3 dy = x^2 dx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Auflösen nach y ergibt

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[4]{\frac{4x^3}{3} + 4C} \\ &= \sqrt[4]{\frac{4x^3}{3} + K}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - e^{-x} + y - xy' = xy.$$

Lösung von Aufgabe 16. Durch Umformen sieht man, dass es sich um eine lineare, inhomogene DGL handelt:

$$(1-x)y' + (1-x)y = e^{-x}$$

bzw.

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' + y = 0$$

durch Trennung der Variablen (da die Koeffizienten konstant sind, würde man auch mit dem $e^{\lambda x}$ Ansatz zum Ziel kommen):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y &= 0 \\ dy &= -y dx \\ \frac{1}{y} dy &= -dx. \end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten:

$$\ln(|y|) = -x + C$$

Lösen:

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-x+C} \\ &= K e^{-x}, \qquad K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung:

$$y_H = K e^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= k(x) e^{-x} \\ y' &= k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} &= \frac{e^{-x}}{1-x} \\ k'(x)e^{-x} &= \frac{e^{-x}}{1-x} \\ k'(x) &= \frac{1}{1-x} \\ k(x) &= -\ln(|1-x|) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Einsetzen in Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= (-\ln(|1-x|) + C)e^{-x} \\ &= Ce^{-x} - \ln(|1-x|)e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 9y = 2x^2 + 3$$

Lösung von Aufgabe 17. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + 9y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = 3j, \quad \lambda_2 = -3j.$$

Komplexe Lösungsfunktion

$$y(x) = e^{3jx}.$$

Relle Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = \cos(3x), \quad y_2(x) = \sin(3x).$$

Allgemeine homogene Lösung

$$y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2 x \\ y''(x) &= 2c_2. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} 2c_2 + 9(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) &= 2x^2 + 3 \\ x^2(9c_2 - 2) + x(9c_1) + 9c_0 + 2c_2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 9c_2 - 2 &= 0 \\ 9c_1 &= 0 \\ 9c_0 + 2c_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} c_2 &= 2/9 \\ c_1 &= 0 \\ c_0 &= (3 - 4/9)/9 \ = \ 23/81. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{23}{81} + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Aufgabe 18. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \sqrt{x} - \frac{y}{x}$$

für $x > 0$.

Lösung von Aufgabe 18. Es handelt sich um eine lineare DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{x}.$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL.

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{x}y &= 0 \\
y' &= -\frac{1}{x}y \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx \\
\ln|y| &= -\ln|x| + C.
\end{aligned}$$

Da $x > 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{-\ln(x)}e^C \\
&= K\frac{1}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\
y &= K\frac{1}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ansatz für die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}
y &= k(x)\frac{1}{x} \\
y' &= k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned}
k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + k(x)\frac{1}{x^2} &= \sqrt{x} \\
k'(x) &= x\sqrt{x} \\
&= x^{3/2} \\
k(x) &= \frac{2}{5}x^{5/2} + C \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C
\end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C\right)\frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x^3} + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$