Heilbronn, den 12.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 1

Zu bearbeiten bis 19.3.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2y - x, x^2) \\ g(x,y) &= y + \sin(x+y) \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für die Komposition $g \circ f$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Komposition zweier injektiver Funktionen injektiv ist.

Aufgabe 3. Sei

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls ja, berechnen Sie diese, falls nein, begründen Sie weshalb f keine Umkehrfunktion hat.

Aufgabe 4. Definieren Sie eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $\hat{x} = 2$ stetig ist, dort aber nicht differenzierbar ist. Zeichnen Sie eine Skizze dieser Funktion in der Nähe von $\hat{x}$.

Aufgabe 5. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f' \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = ax^{a-1}.$$

Sie dürfen hierbei die Ketteneregel verwenden und die Ableitung der e- und der ln-Funktion. Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln(x)}.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = \pi/2$ von

$$f(x) = \ln(\sin(x)).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 7. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \cos(x)(\sin(x) + x).$$

Prüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\int_0^{\ln(\pi)} e^{1+x} \sin(e^x) dx$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Nutzen Sie die Rechengesetze der e-Funktion und wenden Sie eine Substitution an.

Aufgabe 9. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 4}.$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) \quad = \quad e^x(1 + x)\sin(xe^x).$$

Hinweis: Substitution.

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$\int \cos^4(x)\tan(x) dx.$$

Aufgabe 12. Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$z \quad = \quad \frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1 + j)}.$$

Berechnen Sie $|z|$ in Abhängigkeit von x.

Aufgabe 13. Berechnen Sie für beliebige Konstanten a, ω

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt.$$

Hinweis: Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Sie brauchen hierfür die Gesetze der komplexen Zahlen, insbesondere

$$\begin{aligned} z - \overline{z} \quad &= \quad 2j\mathrm{im}(z) \\ \mathrm{im}(e^{j\varphi}) \quad &= \quad \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $\omega = 0$. Verwenden Sie die si-Funktion, die definiert ist durch

$$\mathrm{si}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Das Ergebnis ist dann $2a\mathrm{si}(\omega a)$.

Aufgabe 14. Sei

$$z = \frac{1}{1+e^{j\varphi}}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(z)$. Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von φ.

Aufgabe 15. Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^{10} = j+1.$$

Kann man sagen, dass die Lösungen auf einem Kreis in der komplexen Ebene liegen?

Aufgabe 16. Berechnen Sie für eine beliebige Konstante $s \in \mathbb{C}$ die Integrale

$$\int_0^\infty e^{jt}e^{-st}dt$$
$$\int_0^\infty e^{-jt}e^{-st}dt$$
$$\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt.$$

Hinweis:

- Stellen Sie die Cosinusfunktion durch komplexe e-Funkionen dar und nutzen Sie die Linearität des Integrals.
- Da die Obergrenze ∞ ist, muss ein Grenzwert berechnet werden. Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + jb$ gilt

$$\begin{aligned} e^{zt} &= e^{(a+jb)t} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + j\sin(bt)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} e^{zt} = 0$$

falls $\mathrm{re}(z) < 0$ und undefiniert sonst. Zeigen Sie damit, dass die Integrale genau dann existieren, wenn $\mathrm{re}(s) > 0$.

Aufgabe 17. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x}+\vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Sie dürfen dabei alle Gesetze der reellen Arithmetik verwenden — machen Sie aber deutlich an welcher Stelle Sie diese benutzen.

Aufgabe 18. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie den Gauß Algorithmus wie im Skript durch. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.
- Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Aufgabe 19. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und

$$M \quad = \quad \{\vec{x} \,|\, \vec{x} \circ \vec{u} = 0 \text{ und } \vec{x} \circ \vec{v} = 0\}.$$

Anschaulich ist M die Menge aller Vektoren, die senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind.

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplilation, d.h.

- Wenn $\vec{x} \in M$ und $\vec{y} \in M$ sind, dann ist auch $\vec{x} + \vec{y} \in M$.
- Wenn $\vec{x} \in M$ und $a \in \mathbb{R}$, dann ist auch $a\vec{x} \in M$.