Übungen zu Mathematik 2

Blatt 10

Zu bearbeiten bis 21.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

linear? Geben Sie eine kurze Begründung.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Entscheiden Sie von beiden Linearitätsbedingungen, ob f sie erfüllt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$y' + y \quad = \quad e^x \cos(x).$$

Im Ergebnis dürfen keine komplexen Zahlen auftreten.

Aufgabe 5. Außer den in der Vorlesung vorgestellten Ansätzen für Störfunktionen bei linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gibt es auch einen Ansatz für rechte Seiten der Form

$$r(x) \quad = \quad p(x)e^{\mu x}$$

wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Der Ansatz ist dann

$$y(x) \quad = \quad q(x)e^{\mu x}$$

wobei $q(x)$ ein Polynom vom gleichen Grad ist wie $p(x)$. Ist μ eine s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann ist der Ansatz

$$y(x) \quad = \quad x^s q(x)e^{\mu x}.$$

Berechnen Sie hiermit die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + y \quad = \quad (x^2 + 1)e^x.$$

Aufgabe 6. Ein ungedämpftes Feder-Masse-System erfüllt die DGL

$$my'' + Dy = 0.$$

Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω, mit der man dieses System anregen muss, um Resonanz zu erhalten. Berechnen Sie dann für dieses ω eine partikuläre Lösung der DGL

$$my'' + Dy = \cos(\omega x).$$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 9y = 2x^2 + x + 3$$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - 2\sin(x)\cos(x)y = e^{-\cos^2(x)}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$1 + \frac{\cos(x+2)y^2}{y'\, e^{1/y}} = 0.$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 4y' + 5y = \sin(x).$$

Aufgabe 11. Gegeben Sei die DGL

$$y' = \sqrt{x + y^2}$$

sowie der Wert $y(3) = 2$. Berechnen Sie näherungsweise $y(3 + \Delta x)$ für $\Delta x = 0.01$.

Aufgabe 12. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + xy\cos(x^2) = x\cos(x^2).$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y = \cos^2(x).$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = -y\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Aufgabe 15. Die Funktion $f(x) = e^x$ hat die Eigenschaft, dass

$$f'(x) \quad = \quad f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Gibt es weitere Funktionen mit dieser Eigenschaft?
- Finden Sie alle Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f''(x) \quad = \quad f(x).$$

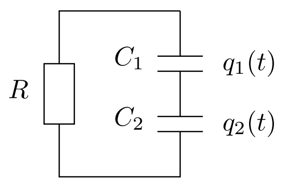
- Finden Sie alle Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f'''(x) \quad = \quad f(x).$$

  Hinweis:

$$\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2, \qquad \cos(2\pi/3) = -1/2.$$

Aufgabe 16. Zwei in Serie geschaltete Kondensatoren mit Kapazitäten C_1 und C_2 entladen sich über einen Widerstand R. Die Ladung der Kondensatoren sei $q_1(t)$ bzw. $q_2(t)$.



Da die Stromstärke überall gleich ist, gilt

$$q_1'(t) \quad = \quad q_2'(t) \qquad \text{für alle } t.$$

- Drücken Sie damit $q_2(t)$ in Abhängigkeit von $q_1(t)$ aus.
- Stellen Sie dann mit Hilfe der Maschenregel eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung für $q_1(t)$ auf und lösen Sie diese.
- Verifizieren Sie mit Ihren Lösungen für $q_1(t)$ und $q_2(t)$, dass die Summe der Spannungen an den Kondensatoren für $t \to \infty$ Null ergibt.
- Welche Bedingung muss für die Startladung der Kondensatoren gelten, damit

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) \quad = \quad 0?$$

Hinweis: Die Lösungsfunktionen lassen sich mit Hilfe der Ersatzkapazität

$$C \quad = \quad \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

vereinfachen.

Aufgabe 17. Die Sprungfunktion $\sigma \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

Tritt die Sprungfunktion in einem bestimmten Integral auf, lassen sich die Integrationsgrenzen einschränken und die Sprungfunktion im Integrand eliminieren.

- So ist z.B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} f(\tau) d\tau$$

da $\sigma(\tau) = 0$ für negative τ.

- Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ soll

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

vereinfacht werden. Zunächst wird untersucht, für welche τ das Argument der Sprungfunktion negativ ist. Die Ungleichung

$$t - \tau < 0$$

wird umgeformt zu

$$\tau > t.$$

Folglich ist $\sigma(t-\tau) = 0$ für $\tau > t$ und die Obergrenze des Integrals kann auf t abgesenkt werden. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau.$$

- Schwieriger ist die Situation, wenn die Integrationsgrenzen nicht im Unendlichen liegen. Vereinfacht werden soll

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Zunächst ist klar, dass nur über $\tau \geq 0$ integriert wird.

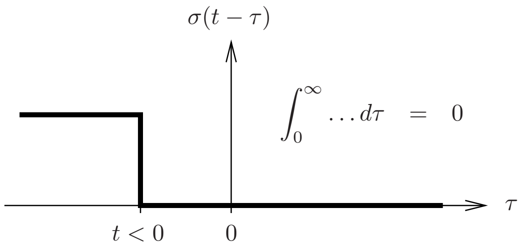
  – Ist t negativ, dann ist auch $t - \tau$ negativ und $\sigma(t-\tau) = 0$ im gesamten Integrationsbereich. In diesem Fall ist

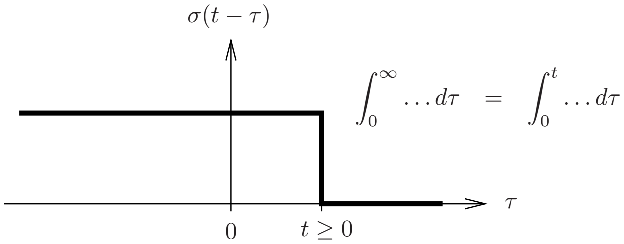
$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0.$$

  – Ist $t \geq 0$ kann das Integral mit der gleichen Argumentation wie im vorigen Beispiel eingeschränkt werden und es gilt

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Wenn man sich die Funktion $\sigma(t-\tau)$ für festes t in Abhängigkeit von τ anschaut, wird dies deutlich.





Beide Fälle kann man mit der Sprungfunktion zusammenfassen zu

$$\int_0^\infty \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad = \quad \sigma(t) \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Vereinfachen Sie in gleicher Weise die folgenden Integrale.

$$\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t+\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t+1-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\int_{1}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Aufgabe 18. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$F_c(t) \quad = \quad \int_c^t f(\tau) d\tau$$

Zeigen Sie, dass $F_c(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.