Heilbronn, den 21.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 11

Zu bearbeiten bis 28.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Die lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist dadurch definiert, dass sie jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ am Koordinatenursprung spiegelt, siehe Bild 1. Bestimmen Sie die Matrix A so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch Matrix Vektor Multiplikation.

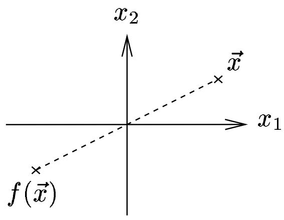
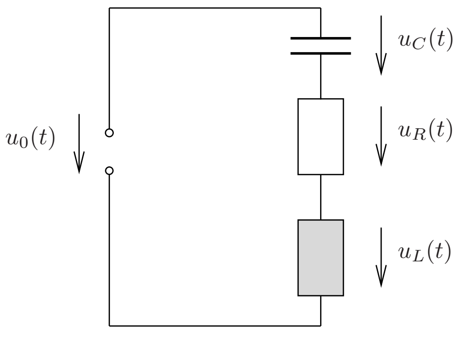


Abbildung 1: $f(\vec{x})$ ist die Spiegelung von $\vec{x}$ am Koordinatenursprung.

Aufgabe 2. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$. Die Eingangsspannung sei

$$u_0(t) = \cos(\omega t).$$

Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für $q(t)$ in Abhängigkeit von ω. Warum tritt bei diesem System nie Resonanz auf?

Aufgabe 3. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y = \sin(x+1).$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$y'' + y = e^{-x}\sin(2x).$$

Im Ergebnis dürfen keine komplexen Zahlen auftreten.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = -\frac{(xy)^2}{e^{1/y}}.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$(2y+1)y' = x\cos(x).$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \left(\frac{1}{x} + 1\right)y = e^x$$

für $x > 0$.

Aufgabe 8. Sei y_P eine partikuläre Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = r(x),$$

wobei alle Koeffizienten a_i reell sind und $r(x)$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{y_P(x)}$ eine Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = \overline{r(x)}$$

ist.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy' + y = \ln(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 10. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{x}$$

für $x > 0$.

Aufgabe 11. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle t gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Die Existenz der Integrale darf vorausgesetzt werden.

Aufgabe 12. Sei

$$f(t) = at + b$$

eine Gerade und

$$g(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Berechen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 13. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f, g ist definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion cf ist definiert durch

$$cf \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (cf)(t) = cf(t).$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$(cf) * g = c(f * g).$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie $(\sigma * \sigma)(t)$.

Aufgabe 15. Sei

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g(t) = \cos(t).$$

Berechnen Sie $f * g$.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass wenn

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad = \quad \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Sei

$$f(t) \quad = \quad g(t) \; = \begin{cases} e^t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 17. Sei

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g(t) \quad &= \quad 1 - t^2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 18. Sei $f(t)$ die Stromstärke des Neckars in Horkheim und $h(t)$ die Stromstärke in Heilbronn in Liter pro Sekunde. Die Strömungsgeschwindigkeit im Neckar ist in der Mitte höher als am Rand so dass sich das Wasser unterwegs verteilt. Von einem Liter Wasser, das Horkheim verlässt, kommt ein in Anteil $G(t)$ in weniger als t Sekunden in Heilbronn an.

- Angenommen ein Teil des Wassers verdunstet unterwegs. Wie zeigt sich das in der Funktion $G(t)$?
- Berechnen Sie $h(t)$ in Abhängigkeit von $f(t)$ und $G(t)$. Leiten Sie das Ergebnis schrittweise her.
- Kann man nach diesem Schema auch $f(t)$ in Abhängigkeit von $h(t)$ berechnen?

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.