Übungen zu Mathematik 2

Blatt 12

Zu bearbeiten bis 4.6.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sind

$$\begin{aligned} \text{bild}(A) &= \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ \text{kern}(A) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \end{aligned}$$

Vektorräume. Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Basis und die Dimension der Vektorräume bild(A) und kern(A).

Verifizieren Sie an diesem Beispiel die Formel

$$\dim(\text{bild}(A)) + \dim(\text{kern}(A)) = n,$$

die für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Matrizen A, B, C so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad g(\vec{x}) = B\vec{x} \text{ und } g(f(\vec{x})) = C\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}.$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 9y = 2x^2 + 3$$

Aufgabe 5. Sei

$$g(t) \quad = \quad \sigma(-t).$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$ für eine beliebige Funktion f.

Aufgabe 6. Sei $f(t)$ eine Funktion mit gegebener Stammfunktion $F(t)$. Berechnen Sie hiermit

$$(\sigma - \sigma_{\hat{t}}) * f.$$

Der Index $\hat{t}$ bedeutet hierbei die Verschiebung, d.h.

$$\sigma_{\hat{t}}(t) \quad = \quad \sigma(t - \hat{t}).$$

Hinweis: Skizzieren Sie zunächst die Funktion $\sigma(t) - \sigma_{\hat{t}}(t)$ für $\hat{t} \geq 0$ bzw. $\hat{t} \leq 0$.

Aufgabe 7. Sei

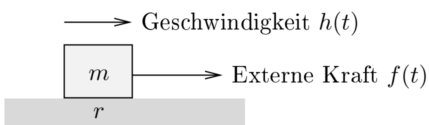
$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad \sigma(t)t \\ g(t) \quad &= \quad \sigma(t-1)\sin(t) \end{aligned}$$

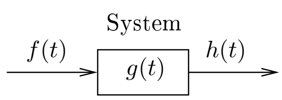
Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 8. Ein Massestück m bewegt sich mit Geschwindigkeit $h(t)$ auf einer horizontalen Geraden nach rechts. Die Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit, d.h.

$$F_R(t) \quad = \quad -rh(t)$$

für eine Konstante r. Weiterhin wirkt auf das Massestück eine externe Kraft $f(t)$ nach rechts. Man erhält somit ein System mit Eingangsgröße $f(t)$ und Ausgangsgröße $h(t)$.





- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $h(t)$ durch eine Differentialgleichung.
- Zeigen Sie, dass mit dem Startwert $h(-\infty) = 0$ gilt

$$h(t) \quad = \quad \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} f(\tau) e^{-\frac{r}{m}(t-\tau)} d\tau.$$

- Formen Sie mit Subsitution und unter Verwendung der Sprungfunktion das Integral so um, dass

$$h(t) = (f * g)(t)$$

für eine Funktion $g(t)$ und berechnen Sie diese.

- Im Spezialfall $f(t) = \sigma(t)$ nähert sich die Geschwindigkeit für $t \to \infty$ einer konstanten Geschwindigkeit an. Bei konstanter Geschwindigkeit ist die Trägheitskraft Null und folglich gilt dann

$$F_R(t) + f(t) = 0.$$

Berechnen Sie hiermit die Geschwindigkeit $h(t)$ für $t \to \infty$ und verifizieren Sie, dass Sie mit der hergeleiteten Formel mit Faltung zum gleichen Ergebnis kommen.

Aufgabe 9. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(1-t) \\ g(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 10. Sei

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &= \sigma(t-a) \\ \sigma_b(t) &= \sigma(t-b) \\ \sigma_c(t) &= \sigma(t-c). \end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$(\sigma_a * \sigma_b * \sigma_c)(t).$$

Aufgabe 11. Sei

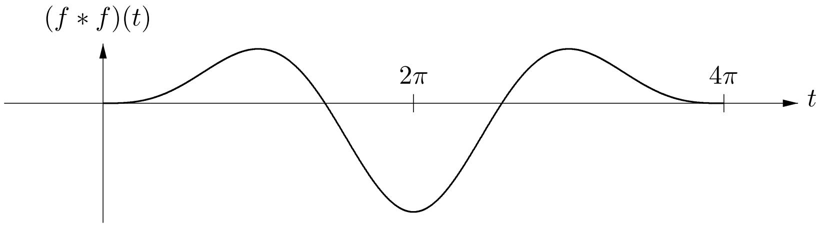
$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \\ g(t) &= \sin(t). \end{aligned}$$

Begründen Sie, weshalb $(f * g)(t)$ für kein t existiert.

Aufgabe 12. Berechnen Sie $(f * f)(t)$ für

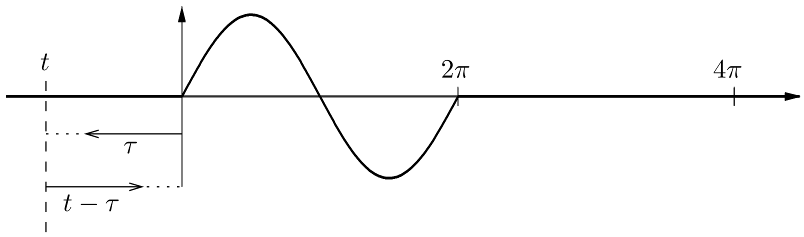
$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Ergebnis sieht so aus:

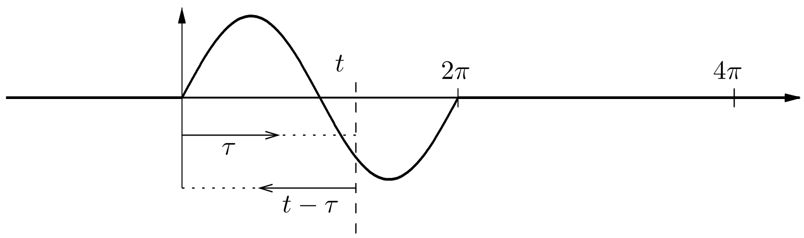


Die Aufgabe ist zwar eine ziemliche Rechnerei, aber es lohnt sich. Verwenden Sie zur Berechnung der Stammfunktion komplexe Zahlen. Unterscheiden Sie vier Fälle und überlegen Sie sich, wie sich hierbei der Integrationsbereich einschränken lässt.

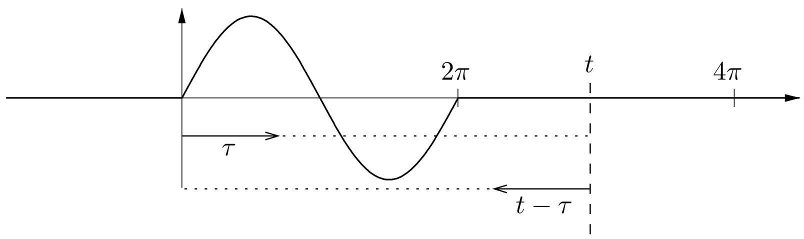
- $t < 0$



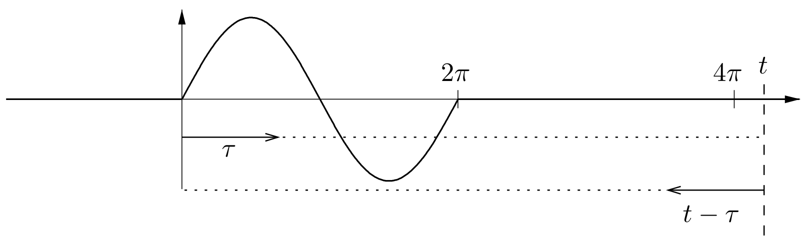
- $0 \leq t < 2\pi$



- $2\pi \leq t < 4\pi$



- $t \geq 4\pi$.



Aufgabe 13. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-|t|} \\ g(t) &= t \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 14. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass man durch Faltung mit einem (beliebig schmalen) Rechteckimpuls mit Flächeninhalt 1 einen Sprung in einer Funktion glätten kann.

Sei $\varepsilon > 0$ und

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} a & \text{falls } t < \hat{t} \\ b & \text{falls } t \geq \hat{t}. \end{cases} \\
g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{falls } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

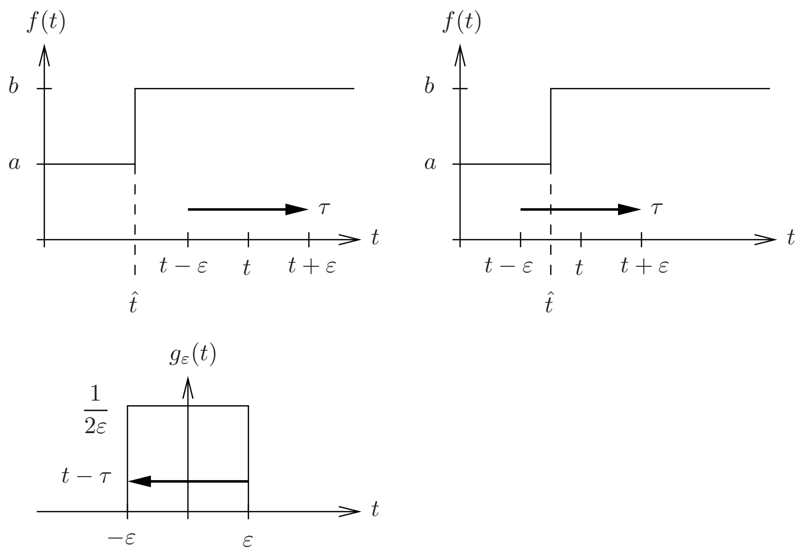
- Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
h(t) &= (f * g_\varepsilon)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_\varepsilon(t-\tau) d\tau.
\end{aligned}
$$

Hinweis: $g_\varepsilon(t-\tau)$ ist Null falls $t - \tau < -\varepsilon$ oder $t - \tau > \varepsilon$ bzw. $\tau > t + \varepsilon$ oder $\tau < t - \varepsilon$. Man kann den Integrationsbereich also auf ein endliches Intervall einschränken.

Sie müssen dann noch eine Fallunterscheidung machen ob $t < \hat{t} - \varepsilon$, $t > \hat{t} + \varepsilon$ oder $\hat{t} - \varepsilon \leq t \leq \hat{t} + \varepsilon$.

Fall $t > \hat{t} + \varepsilon$ Fall $\hat{t} - \varepsilon \leq t \leq \hat{t} + \varepsilon$



Skizzieren Sie die Funktion $h(t)$ für ein beliebiges ε und überzeugen Sie sich, dass der Sprung in $f(t)$ bei $t = \hat{t}$ im Bereich $\hat{t} - \varepsilon < t < \hat{t} + \varepsilon$ durch eine Rampe geglättet wurde, sich die Funktion ansonsten aber nicht verändert hat.

- Zeigen Sie, dass für alle $t \neq \hat{t}$ gilt

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} h(t) \quad = \quad f(t).$$

Was ist

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} h(\hat{t})?$$

Aufgabe 15. Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g_\varepsilon(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktionen $f(t)$ und $h(t) = (f * g_\varepsilon)(t)$ in einem gemeinsamem Koordinatensystem für $\varepsilon = 2$.

Geben Sie alle Stellen an, an denen f bzw. h unstetig bzw. nicht differenzierbar sind.

Aufgabe 16. Sei

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad 1 + \cos(t) \\ g(t) \quad &= \quad \begin{cases} 1/2\pi & \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anschaulich, was der Mittelwert einer cos-Funktion und einer konstanten Funktion über ein Intervall der Länge 2π ist.

Aufgabe 17. Für $a > 0$ bezeichne der Index a die Stauchung einer Funktion um Faktor a, d.h.

$$f_a(t) \quad = \quad f(at).$$

Zeigen Sie, dass

$$f_a * g_a \quad = \quad \frac{1}{a}(f * g)_a.$$

Aufgabe 18. Im Zu- bzw. Abfluss eines Sees betrage die Stromstärke $f(t)$ bzw. $h(t)$ Liter pro Sekunde. Jeder Tropfen Wasser, der in den See fließt, bleibt eine Weile darin und fließt dann nach und nach ab. Nach τ Sekunden ist ein Anteil von

$$G(\tau) \quad = \quad \sin(\tau)$$

abgeflossen für $0 \leq \tau \leq \pi/2$. Ab $\tau = \pi/2$ ist $G(\tau) = 1$, d.h. nach $\pi/2$ Sekunden ist der Tropfen komplett verschwunden. Damit ist

$$G(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < 0 \\ \sin(\tau) & \text{falls } 0 \leq \tau \leq \pi/2 \\ 1 & \text{falls } \tau > \pi/2. \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der See leer. Der Zufluss habe eine Stromstärke von $f(t) = \sigma(t)$.

- Berechnen Sie die Wassermenge $H(t)$ im See zu jedem Zeitpunkt t.
- Die Stromstärke im Abfluss ist dann $h(t) = f(t) - H'(t)$.

Hinweis: Da jeder Tropfen nach endlicher Zeit komplett abgeflossen ist, kann der See nicht überlaufen sondern wird irgendwann einen konstanten Pegel haben. Ab dann ist die Stromstärke im Zu- und Abfluss gleich. Damit können Sie Ihr Ergebnis verifizieren.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.