Heilbronn, den 19.12.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 13

Zu bearbeiten bis 9.1.2026

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle a, ω gilt

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega x} dx = 2a\,\mathrm{si}(\omega a).$$

Hierbei ist

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Berücksichtigen Sie insbesondere den Fall $\omega = 0$.

Aufgabe 2. Seien $g, h \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwei lineare Funktionen mit

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= A\vec{x} \\ h(\vec{x}) &= B\vec{x}. \end{aligned}$$

Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ h\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Matrix für f.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es keine lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation und bildet damit einen Vektorraum. Berechnen Sie die Dimension und eine Basis von

$$\left\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 4y' + 5y = \sin(x).$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \qquad \text{für } x > 0.$$

Aufgabe 7. Sei

$$f^-(t) = f(-t)$$

für alle t. Ein hochgestelltes Minuszeichen bedeutet somit Zeitumkehr.

Zeigen Sie, dass

$$(f * g^-) = (f^- * g)^-.$$

Zeigen Sie hiermit, dass

$$f * \delta^- = f$$

und mit dem Spezialfall $f = \delta$, dass

$$\delta^- = \delta.$$

Aufgabe 8. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass man durch Faltung mit einem (beliebig schmalen) Rechteckimpuls mit Flächeninhalt 1 einen Knick in einer Funktion glätten und sie dadurch differenzierbar machen kann.

Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= |t| \\ g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie

$$h(t) = (f * g_\varepsilon)(t).$$

Hinweis: Sie müssen hierbei eine Fallunterscheidung machen ob $t \leq 0$, $t \geq \varepsilon$ oder $0 < t < \varepsilon$. Der Rechenweg ist etwas länger als es zunächst den Anschein hat.

Skizzieren Sie die Funktion $h(t)$ für ein beliebiges ε und überzeugen Sie sich, dass der Knick der Betragsfunktion bei $t = 0$ im Bereich $0 < t < \varepsilon$ geglättet wurde, sich die Betragsfunktion ansonsten aber nicht verändert hat.

- Zeigen Sie, dass für alle t gilt

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} h(t) \quad = \quad f(t).$$

Hinweis: Sie müssen hier eine Fallunterscheidung machen ob $t = 0$ oder $t \neq 0$.

- Berechnen Sie die Ableitung $h'(t)$. Die Funktion $f(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar. Was ist $h'(t)$ an der Stelle $t = 0$?

Aufgabe 9. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\omega t + \varphi) \\ g(t) &= \sigma(t) - \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Verifizieren Sie anhand des Ergebnisses, dass Schwingungen mit hoher Frequenz ω durch Faltung mit einem Rechteckimpuls stärker gedämpft werden als Schwingungen mit tiefer Frequenz.

Aufgabe 10. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)\, t \\ g(t) &= \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$. Berücksichtigen Sie insbesondere auch den Fall $t < 0$.

Aufgabe 11. Das Gesetz

$$f * g' \quad = \quad (f * g)'$$

gilt auch im Spezialfall $g = \delta$:

$$f * \delta' \quad = \quad (f * \delta)' \; = \; f'.$$

Die Ableitung kann somit genau wie die Integration durch Faltung dargestellt werden. Eine Vorstellung, wie die Ableitung des Dirac Impulses aussieht, erhält man durch eine Grenzwertbetrachtung.

Sei $\varepsilon > 0$ und

$$g_\varepsilon(t) \quad = \quad \begin{cases} {}^1\!/\!_{\varepsilon^2} & \text{für } -\varepsilon < t < 0 \\ -{}^1\!/\!_{\varepsilon^2} & \text{für } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie

$$G_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} g_\varepsilon(\tau) d\tau.$$

  Es ist hilfreich, zuerst $g_\varepsilon(t)$ und $G_\varepsilon(t)$ zu skizzieren. Zeigen Sie, dass die Fläche unter $G_\varepsilon(t)$ eins ist und $G_\varepsilon(t) = 0$ für $t \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$. Für kleine ε geht G_ε somit in den Dirac Impuls über und somit g_ε in die Ableitung des Dirac Impulses.

- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich unter Verwendung einer Stammfunktion F von f.

- Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * g_\varepsilon)(t) = f'(t).$$

  Hinweis: Aus der Definition der Ableitung folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} = f(t)$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t) - F(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = f(t-\varepsilon).$$

Aufgabe 12. Sei $a \neq 0$ und

$$f(t) = \delta(at).$$

Damit ist $f(t)$ ein in Zeitrichtung um Faktor a gestauchter Dirac Impuls. Zeigen Sie, dass für alle g gilt

$$f * g = \frac{1}{|a|} g.$$

Obwohl ein Dirac Impuls anschaulich "unendlich kurz" ist, macht eine Stauchung in Zeitrichtung somit trotzdem einen Unterschied, d.h. es gilt

$$\delta(at) \neq \delta(t) \qquad \text{für } a \neq 1.$$

Hinweis: Substitution und Ausblendeigenschaft.

Aufgabe 13. Ein Signal $f(t)$ mit Frequenz $\hat{\omega}$ zu modulieren, bedeutet in der digitalen Signalverarbeitung, dass man $f(t)$ mit $\cos(\hat{\omega} t)$ multipliziert. Ein Modulator ist somit ein System

$$[S(f)](t) = f(t)\cos(\hat{\omega} t).$$

- Ist S linear bzw. zeitinvariant?
- Sei nun $f(t) = \sin(\omega t)$ eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω. Zeigen Sie, dass dann $S(f)$ aus zwei Schwingungen mit halber Amplitude und Frequenzen $\omega + \hat{\omega}$ und $\omega - \hat{\omega}$ besteht. Mit einem Modulator kann man somit die Frequenz einer Schwingung verschieben.

Aufgabe 14. Das System S ist definiert durch

$$[S(f)](t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t+1} \sin(f(\tau))d\tau.$$

Ist S zeitinvariant? Beweisen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 15. Die Eingangsfunktion f und Ausgangsfunktion h eines Systems S hängen durch folgende DGL zusammen:

$$h'(t) + 3h(t) \quad = \quad f(t).$$

Damit die Lösung $h(t)$ der DGL eindeutig ist, wird der Startwert

$$h(-\infty) \quad = \quad 0$$

festgelegt.

- Sei $S(f_1) = h_1$ und $S(f_2) = h_2$. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f_1 + f_2) \quad = \quad h_1 + h_2.$$

- Sei $S(f) = h$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$S(af) \quad = \quad ah.$$

- Sei $S(f) = h$ und $\hat{t} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f_{\hat{t}}) \quad = \quad h_{\hat{t}}.$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems. Sie müssen hierzu die DGL durch Variation der Konstanten lösen und dabei die Ausblendeigenschaft nutzen. Damit die Lösung eindeutig wird, müssen Sie die Randbedingung $h(-\infty) = 0$ einsetzen.

Aufgabe 16. Sei $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das System S ist definiert durch

$$[S(f)](t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{1} f(t-\tau)g(-\tau)d\tau.$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort $S(\delta)$ von S.
- Ist das System LTI?
- Welche Eigenschaft muss die Funktion g haben, damit S kausal ist?

Aufgabe 17. Auf einen reibungsfrei gelagerten Wagen der Masse m wirkt eine Kraft $F(t)$. Diese bewirkt, dass sich der Wagen mit Geschwindigkeit $v(t)$ bewegt. Wir haben somit ein System mit Eingangsgröße $F(t)$ und Ausgangsgröße $v(t)$. Zeigen Sie, dass dieses System LTI ist und berechnen

Sie die Impulsantwort. Hinweis: Aus der Beschleunigung $a(t)$ lässt sich die Geschwindigkeit $v(t)$ durch Integration berechnen:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Weiterhin gilt

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t).$$

Sei nun die Ausgangsgröße nicht mehr $v(t)$ sondern die zurückgelegte Strecke $s(t)$. Wie sieht nun die Impulsantwort aus?

Aufgabe 18. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass

$$S(f_1 * f_2) = S(f_1) * f_2 = f_1 * S(f_2).$$

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass die Ableitung zeitinvariant ist, d.h.

$$(f_{\hat{t}})' = (f')_{\hat{t}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Hilfsfunktion für die Verschiebung

$$v(t) = t - \hat{t},$$

stellen Sie $f_{\hat{t}}$ als Komposition von f und v dar und verwenden Sie die Kettenregel der Ableitung. Alternativ können Sie auch die Definition der Ableitung mit Differentialquotienten verwenden.

Aufgabe 20. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f') = [S(f)]'.$$

Die Ableitung des Eingangssignals eines LTI Systems bewirkt daher immer die Ableitung des Ausgangssignals. Sie dürfen hierbei voraussetzen, dass f und $S(f)$ differenzierbar sind.

Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Weisen:

- Indem Sie die Rechengesetze der Faltung nutzen.
- Auf dem anderen Weg brauchen Sie die Definition der Ableitung:

  $$f'(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}.$$

  Mit der Abkürzung

  $$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

  gilt somit

  $$f'(t) = \frac{f_{-dt}(t) - f(t)}{dt} \quad \text{für alle } t$$

  bzw. kürzer

  $$f' = \frac{f_{-dt} - f}{dt}.$$

  In dieser Darstellung können Sie die Linearität und Zeitinvarianz von S anwenden.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.