

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 14

Zu bearbeiten bis 22.6.2026

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei $g_\varepsilon(t)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &\geq 0 \text{ für alle } t \\ g_\varepsilon(t) &= 0 \text{ für } t \notin [0, \varepsilon] \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt &= 1. \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ f_1(t) &= \sigma(-t) \\ f_2(t) &= 1 - \sigma(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{für alle } t \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass der Unterschied an der Stelle $t = 0$ durch Glättung “weggebügelt” wird:

- Berechnen Sie $f_1(0)$ und $f_2(0)$.
- Berechnen Sie

$$(\sigma * g_\varepsilon)(0), (f_1 * g_\varepsilon)(0), \text{ und } (f_2 * g_\varepsilon)(0)$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 2. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Rechteckimpuls und

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

ein 2-periodischer Impulszug. (Die Summationsvariable k läuft über alle ganzen Zahlen.) Berechnen Sie

$$h(t) = (f * g)(t)$$

und beschreiben Sie, wie $h(t)$ aussieht.

Aufgabe 3. Das System S sei definiert durch

$$[S(f)](t) = f(t) + 3.$$

So ist z.B. für das Inputsignal $f(t) = \sin(t)$ das Outputsignal $h(t) = \sin(t) + 3$.

- Ist dieses System linear?
- Ist dieses System zeitinvariant?
- Gibt es eine Funktion g so dass $S(f) = f * g$?

Geben Sie jeweils eine ausführliche Begründung.

Aufgabe 4. Sei

$$[S(f)](t) = \int_{-t}^t f(\tau) d\tau.$$

- Ist S linear?
- Ist S zeitinvariant?

Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 5. Auf einer Straße von A nach B steht eine Messstelle für Schadstoffe. Aufgrund einer besonders schlaun Umweltschutzverordnung müssen Dieselfahrzeuge diese Messstelle weitläufig umfahren. Die Fahrzeit für den direkten Weg von A nach B sei 10 Sekunden, die Fahrzeit über den Umweg sei 50 Sekunden. Vereinfachend wird angenommen, dass alle Autos gleich schnell fahren. Weiterhin fährt die Hälfte aller Fahrzeuge mit Diesel. Sei $f(t)$ die Stromstärke bei A und $h(t)$ die Stromstärke bei B .

- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$h(t) = (f * g)(t)$$

für alle t .

- Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = \sin^2(\pi t) + 1.$$

Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = c,$$

d.h. die Stromstärke bei A ist konstant.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderschaltung zweier LTI Systeme wieder ein LTI System ist.

Aufgabe 7. LTI Systeme verhalten sich besonders einfach, wenn das Eingangssignal eine harmonische Schwingung ist. In diesem Fall ist auch das Ausgangssignal eine harmonische Schwingung mit gleicher Kreisfrequenz. In dieser Aufgabe soll dies anhand einer einfachen, komplexen Schwingung gezeigt werden: Sei

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

und S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f) = zf$$

wobei z eine Konstante ist, d.h. nicht von t abhängt.

Die komplexe Schwingung $f(t) = e^{j\omega t}$ wird durch das System S also nur um $|z|$ verstärkt und um $\angle z$ phasenverschoben. Berechnen Sie z anhand der Impulsantwort g des Systems S .

Da z von ω abhängt, ist z eine Funktion von ω . Diese Funktion $G(\omega)$ heißt Übertragungsfunktion des LTI Systems. Später werden wir zeigen, dass $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ ist.

Aufgabe 8. Sei S ein System, das ein Inputsignal f in ein Outputsignal h transformiert, wobei

$$h(t) = f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Aufgabe 9. Sei

$$[S(f)](t) = f(t^2).$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 10. Sei S ein LTI System mit

$$S(f) = h$$

wobei h die Lösung der DGL

$$h'(t) + 3h(t) = f(t)$$

mit dem Startwert $h(-\infty) = 0$ ist.

Berechnen Sie die Impulsantwort dieses Systems.

Aufgabe 11. Gegeben ist ein LTI System S mit Impulsantwort

$$g(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Berechnen Sie $S(f)$ für $f(t) = \cos(t)$.

Aufgabe 12. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) = tf(t).$$

Entscheiden Sie, ob S linear bzw. zeitinvariant ist und geben Sie jeweils eine Begründung. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie zeigen müssen.

Aufgabe 13. Das LTI System S ist definiert durch

$$\begin{aligned} S(f) &= f_{-1} * \sigma * \sigma && \text{wobei} \\ f_{-1}(t) &= f(t-1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ von S und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Insbesondere dürfen keine Faltungen oder Integrale darin auftreten.

Aufgabe 14. Sei S ein kausales LTI System und

$$f(t) = \sigma(t)(at + b)$$

mit Konstanten a, b . Zeigen Sie, dass dann

$$[S(f)](t) = \sigma(t)(ut + v)$$

für bestimmte Konstanten u, v und stellen Sie Formeln für die Berechnung dieser Konstanten auf.

Aufgabe 15. Von einem LTI System S sei bekannt, dass

$$[S(f)](t) = 3 \sin(t + 1/2) \quad \text{für } f(t) = \sin(t).$$

Berechnen Sie $[S(f)](t)$ für

- 1.) $f(t) = \sin(t-1)$
- 2.) $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$
- 3.) $f(t) = (u * v)(t)$ mit $u(t) = \sin(t)$ und $v(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$.

Aufgabe 16. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) = f(3t).$$

Entscheiden Sie ob S linear und zeitinvariant ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Schreiben Sie zunächst hin, was Sie zeigen müssen.

Aufgabe 17. Seien S_1, S_2 Systeme mit

$$\begin{aligned} [S_1(f)](t) &= e^{f(t)} \\ [S_2(f)](t) &= f(e^t). \end{aligned}$$

Entscheiden Sie von beiden Systemen, ob sie linear bzw. zeitinvariant sind.

Aufgabe 18. Sei g eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $f * g$ eine T -periodische Funktion ist für beliebiges f .

Wenn man sich f als akustisches Signal und g als Raumimpulsantwort vorstellt, ist anschaulich klar, dass wenn der Sender ein periodisches Signal abschickt, beim Empfänger ebenfalls ein periodisches Signal mit gleicher Periodendauer ankommen muss.

Aufgabe 19. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= t \\ p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k) \\ g(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Funktionen $(fp)(t) = f(t)p(t)$ und $((fp) * g)(t)$.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.