

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 15

Zu bearbeiten bis -

| | |
|--------------|---------------------|
| Name: | Matrikelnr.: |
|--------------|---------------------|

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ heißt lineare Hülle von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, geschrieben

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, weshalb

$$\vec{b} \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3).$$

Hinweis: Sie müssen hierfür lediglich zeigen, dass die Gleichung

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3.$$

keine Lösung hat.

Aufgabe 2. Sei f eine zweistellige, lineare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die einstellige Funktion g mit

$$g(x) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

linear ist.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix Darstellung von f , d.h. eine Matrix A so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle \vec{x} .

Aufgabe 4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{e\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

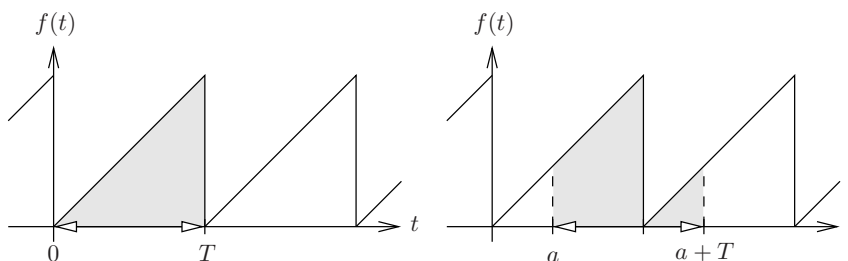
Aufgabe 5. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle t . Zeigen Sie, dass für beliebiges a gilt

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter $f(t)$ in einer Periode unabhängig davon ist, wo die Periode beginnt. In folgendem Bild wird dies am Beispiel einer Sägezahnfunktion dargestellt.



Hinweis:

- Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale:

$$\int_a^{a+T} \dots = \int_a^0 \dots + \int_0^{a+T} \dots$$

- Führen Sie im ersten Integral eine Substitution $u = t + T$ durch. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen zu

$$\int_{a+T}^T \dots$$

- Im Integrand dieses Integrals nutzen Sie nun die Periodizität von f , indem Sie $f(u - T)$ durch $f(u)$ ersetzen. Die Integrationsvariable u ersetzen Sie danach wieder durch t .
- Da die Integranden der beiden Integrale nun wieder gleich sind, können Sie die Integrale zu einem Integral zusammensetzen. Sie müssen hierzu lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^T \dots + \int_0^{a+T} \dots &= \int_0^{a+T} \dots + \int_{a+T}^T \dots \\ &= \int_0^T \dots \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei S ein System, das definiert ist durch

$$[S(f)](t) = f(-t) \quad \text{für alle } t.$$

Das System kehrt somit das Inputsignal auf der Zeitachse um. Entscheiden Sie, ob das System linear und zeitinvariant ist. Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7. Seien $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{falls } t < 0.$$

Begründen Sie, weshalb in diesem Fall gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Um die Faltung von f und g zu berechnen, muss in diesem Fall also nicht von $-\infty$ bis ∞ integriert werden sondern nur von 0 bis t .

Aufgabe 8. Der Index \hat{t} an einer Funktion f bedeutet Verschiebung um \hat{t} , d.h.

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}).$$

Schreiben Sie folgende Funktionen ohne Index \hat{t} :

$$(f_{\hat{t}} \circ g)(t)$$

$$(f \circ g_{\hat{t}})(t)$$

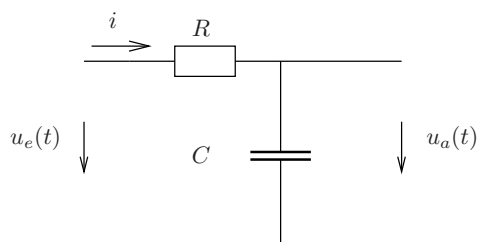
$$(f_{\hat{t}} \circ g_{\hat{t}})(t)$$

$$(f \circ g)_{\hat{t}}(t)$$

Welche dieser Funktionen sind gleich? Hinweis. Im ersten Beispiel rechnet man

$$\begin{aligned} (f_{\hat{t}} \circ g)(t) &= f_{\hat{t}}(g(t)) \\ &= f(g(t) - \hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Gegeben sei folgende Schaltung:



Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung $u_a(t)$ aus der Eingangsspannung $u_e(t)$ durch eine Faltung berechnet werden kann, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$u_a(t) = (u_e * g)(t).$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- Leiten Sie zunächst aus den Gesetzen der Elektrotechnik die Differentialgleichung

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{u_e(t)}{R}.$$

für die Ladung $q(t)$ des Kondensators her. Benutzen Sie hierfür

$$i(t) = q'(t)$$

und die Maschenregel

$$Ri(t) + u_a(t) = u_e(t).$$

- Die DGL ist linear mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Da $u_e(t)$ eine beliebige Funktion sein kann, müssen Sie die DGL mit Variation der Konstanten $k(t)$ lösen.
- Zeigen Sie, dass

$$\int_{t_0}^t k'(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $k'(t)$ ist für beliebiges t_0 . Zeigen Sie, dass hiermit für die allgemeine Lösung der DGL gilt

$$q(t) = \int_{t_0}^t \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

- Um zu einer eindeutigen Lösung für $q(t)$ zu kommen, sei nun angenommen, dass der Kondensator zum Zeitpunkt $t = -\infty$ entladen ist. Zeigen Sie, dass damit gilt

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_e(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Leiten Sie hieraus die o.g. Funktion $g(t)$ ab so dass

$$u_a = u_e * g.$$

- Sei nun

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $u_a(t)$ durch Faltung. Stellen Sie dabei die Cosinus Funktion als Realteil einer komplexen e -Funktion dar. Das Integral kann vereinfacht werden, wenn man ausnutzt, dass

$$\int \operatorname{re}(f(\tau)) d\tau = \operatorname{re} \left(\int f(\tau) d\tau \right).$$

Überlegen Sie sich, wie die Funktion vereinfacht werden kann, wenn t groß ist, d.h. wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis, mit dem was Sie erhalten würden, wenn Sie das Problem mit komplexer Wechselstromrechnung gelöst hätten. Erklären Sie, weshalb die Schaltung als Tiefpass bezeichnet wird.

Aufgabe 10. Sei $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion

$$f(t) = |t|$$

hat bei $t = 0$ einen Knick, der durch Faltung mit $g_\varepsilon(t)$ geglättet werden soll.

Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für $t \geq \varepsilon$, für $t \leq 0$ und für $0 < t < \varepsilon$. Überzeugen Sie sich anhand einer Skizze, dass $f * g_\varepsilon$ differenzierbar ist.

Aufgabe 11. Die Stromstärke am Ein- bzw. Ausgang eines Wasserrohrs sei $f(t)$ bzw. $h(t)$. Das Rohr ist ein lineares, zeitinvariantes System, d.h.

$$h(t) = (f * g)(t)$$

wobei $g(t)$ die Impulsantwort ist. Angenommen, das Rohr ist verlustfrei, d.h. das gesamte Wasser, das in das Rohr hineinfließt, kommt auch am anderen Ende irgendwann wieder heraus. Welche Eigenschaft folgt daraus für die Impulsantwort?

Aufgabe 12. Sei

$$[S(f)](t) = \int_{-t}^t f(\tau) d\tau.$$

- Ist S linear?
- Ist S zeitinvariant?

Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 13. Sei $S(f) = h$ wobei h die Lösung eines der folgenden Anfangswertprobleme mit rechter Seite f ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(0) = 5.$$

Zeigen Sie, dass S nicht linear ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(0) = 0.$$

Zeigen Sie, dass S linear aber nicht zeitinvariant ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(-\infty) = 0.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Aufgabe 14. Sei

$$S(f) = f(1) + f(2).$$

Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 15. Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei S das System, das jeder Funktion ihr Taylor Polynom vom Grad n zum Entwicklungspunkt a zuordnet, d.h.

$$[S(f)](t) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(t-a)^i.$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 16. Sei

$$[S(f)](t) = f''(t-1).$$

Ist S linear und zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 17. Sei f eine beliebige Funktion. Berechnen Sie die Funktion h , die die DGL

$$h'(t) + h(t) = f(t)$$

für alle t mit Startwert $h(0) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die allgemeine Lösung der homogenen DGL und durch Variation der Konstanten die gesuchte partikuläre Lösung. Da $f(t)$ nicht gegeben ist, kann man das dabei entstehende Integral nicht lösen und muss es im Funktionsterm von h stehen lassen.

Aufgabe 18. Wie Sie wissen, ist eine Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, genau dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Der Übergang von linearen Funktionen zu linearen Systemen (nicht notwendig zeitinvarianten), ist reine Kosmetik. Sei $\vec{y} = f(\vec{x})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{y} &= A\vec{x} \quad \text{bzw.} \\ y_i &= \sum_j a_{ij}x_j. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun die diskreten Indizes i, j durch kontinuierliche Variablen t, τ und die Summe durch ein Integral, erhält man

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

Ersetzt man nun noch x durch f , y durch h und a durch g hat man

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

Per Analogie erhält man damit folgende Aussage:

Ein System S ist linear, genau dann wenn es eine zweistellige Funktion $g(t, \tau)$ gibt so dass

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{für alle } t.$$

Der Beweis hierfür ist nahezu identisch mit dem Beweis über LTI Systeme, der in der Vorlesung gezeigt wurde. Sie können ihn also fast wörtlich abschreiben und müssen nur den letzten Schritt, bei dem es um Zeitinvarianz ging, weglassen.

- Zeigen Sie, dass für jede Funktion $g(t, \tau)$ das System S mit

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

linear ist, d.h.

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= aS(f). \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass für jedes lineare System S gilt

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(\delta(t - \tau))}_{g(t, \tau)} f(\tau) d\tau.$$

Die o.g. zweistellige Funktion $g(t, \tau)$ ist also die Antwort des Systems auf einen um τ verschobenen Dirac Impuls.

Wenn Sie diese Aufgabe hinkriegen, sind Sie bereits gut auf die Fourier- und Laplace Transformation vorbereitet. Beide Transformationen sind Spezialfälle solcher linearer Systeme, wobei die Funktion $g(t, \tau)$ eine einfache e -Funktion ist.

Aufgabe 19. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \\ g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} t\right) & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Fläche unter g_ε eins ist.

Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

Aufgabe 20.

- Zeigen Sie, dass das Produkt zweier T -periodischer Funktionen wieder eine T -periodische Funktion ist.

- Sei f eine beliebige Funktion und g eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann $f \circ g$ eine T -periodische Funktion ist.

Hinweis: Eine Funktion f heißt T -periodisch wenn

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t.$$

Aufgabe 21. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{-t} \\ g(t) &= \cos(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$.

Aufgabe 22. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der $T = 2$ -periodischen Funktion f , die definiert ist durch

$$f(t) = e^{|t|} \text{ für } -1 < t \leq 1$$

und $f(t+2) = f(t)$ für alle t . Vereinfachen Sie den Term für z_k so weit wie möglich.

Aufgabe 23. Sei T eine Konstante und $g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\int_t^{t+T} g(\tau) d\tau = 0$$

für alle t . Zeigen Sie, dass dann jede Stammfunktion von g eine T -periodische Funktion ist.

Aufgabe 24. Wenn man zwei Töne mit sehr ähnlicher Frequenz gleichzeitig spielt, entsteht eine sog. Schwebung. Dabei hört man nur einen Ton, der langsam lauter und leiser wird. Dieses Phänomen nutzt man z.B. um Instrumente zu stimmen. Auf der Webseite zu Mathe 2 finden Sie eine Demo, mit der Sie sich das anhören können.

Für eine kleine Zahl ε seien die Frequenzen der beiden Töne $\omega + \varepsilon$ und $\omega - \varepsilon$. Zeigen Sie, dass dann für die Überlagerung der Schwingungen gilt

$$\operatorname{re} \left(e^{j(\omega+\varepsilon)t} + e^{j(\omega-\varepsilon)t} \right) = 2\operatorname{re} \left(e^{j\omega t} \right) \cos(\varepsilon t).$$

Dabei ist $2\operatorname{re}(e^{j\omega t})$ der Ton, den man hört. Die Multiplikation mit der langsamen Schwingung $\cos(\varepsilon t)$ führt zu dem Schwebungseffekt.

Aufgabe 25. Sei f eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch f' eine T -periodische Funktion ist.

Aufgabe 26. Eine Menge M heißt abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation wenn für alle $x, y \in M$ und alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x + y &\in M \\ ux &\in M. \end{aligned}$$

- Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zwei Matrizen und

$$M = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = B\vec{x}\}.$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation.

- An welcher Stelle traten Mengen von Funktionen, die abgeschlossen sind unter Addition und skalarer Multiplikation bei der Lösung von DGL auf?
- Zeigen Sie, dass die Menge aller T -periodischer Funktionen abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation.

Aufgabe 27. Zeigen Sie, dass für jedes $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a, T \in \mathbb{R}$ mit $\omega = 2\pi/T$ gilt

$$\int_a^{a+T} e^{j(k-n)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq n \\ T & \text{falls } k = n. \end{cases}$$

Hinweis:

$$e^{2\pi j(k-n)} = 1.$$

Schauen Sie sich dann nochmal die Herleitung zur Berechnung der Fourier Koeffizienten z_k einer T -periodischen Funktion $f(t)$ an. Zeigen Sie durch eine kleine Modifikation dieser Herleitung, dass z_k für beliebiges a auch nach der Formel

$$z_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

berechnet werden kann. Gehen Sie hierzu von der komplexen Fourier Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}$$

aus und führen Sie die selbe Umformung durch wie gezeigt.

Aufgabe 28. Die Funktion

$$f(t) = |\sin(t)|$$

ist T periodisch für $T = \pi$. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k für $f(t)$. Sie können die Integrale ohne Rechner lösen mit Hilfe der Gleichung

$$\sin(t) = \operatorname{im}(e^{jt}) = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt}).$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der T -periodischen Funktion f , für die gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -T/2 < t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

und $f(t+T) = f(t)$ für alle t . Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Hinweis: Sie müssen eine Fallunterscheidung machen ob k gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 30. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der $T = 2$ -periodischen Funktion f , die definiert ist durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{falls } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und $f(t+2) = f(t)$ für alle t . Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Sie benötigen hierfür Produktintegration.

Aufgabe 31. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion und A_k, φ_k so dass

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sei weiterhin

$$g(t) = \frac{2}{T}(\sigma(-t) - \sigma(-t - T)) \cos(k\omega t).$$

Überlegen Sie sich, dass die Differenz der beiden Sprungfunktionen ein Rechteckimpuls von $-T$ bis 0 ist. Zeigen Sie, dass für $k > 0$ gilt

$$(f * g)(t) = A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

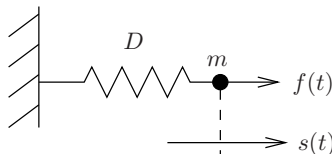
Diese Aussage bedeutet, dass durch Faltung mit g die k -te Oberschwingung aus f herausgefiltert wird. Später werden wir zeigen, dass jeder frequenzselektive Filter durch Faltung realisiert werden kann und somit LTI ist. Hinweis:

- Beginnen Sie mit dem Faltungsintegral.
- Nutzen Sie die Sprungfunktionen um den Integrationsbereich auf eine Periode einzugrenzen.
- Nutzen Sie die Periodizität von f und \cos um den Integrationsbereich auf $[0, T]$ zu verschieben.
- Formen Sie den Integrand mit komplexen e -Funktionen um bis der komplexe Fourier Koeffizient z_k als Teilterm erscheint.
- Zum Schluss müssen Sie nur noch die Definition der komplexen Fourier Koeffizienten

$$z_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}$$

einsetzen.

Aufgabe 32. Eine Masse m ist an einer Feder mit Federkonstante D befestigt und kann sich reibungsfrei horizontal bewegen. Die Position der Masse zum Zeitpunkt t sei $s(t)$. In der Position $s = 0$ sei die Feder entspannt.



Auf die Masse wirkt nun eine T -periodische Kraft $f(t)$ nach rechts, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < a \\ 0 & \text{falls } a \leq t < T \end{cases}$$

und $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie eine *partikuläre* Lösung $s(t)$ und stellen Sie diese als Fourier Reihe dar. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, dürfen Sie annehmen, dass keine Resonanz auftritt.

Hinweis: Stellen Sie $f(t)$ zunächst als Fourier Reihe dar, lösen Sie die DGL für jeden Summanden $z_k e^{jk\omega t}$ separat und nutzen Sie die Linearität der DGL.

Aufgabe 33. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit Fourier Koeffizienten z_k . Sei

$$\tilde{f}(t) = f(at)$$

für ein $a > 0$. Berechnen Sie hiermit die Periodendauer \tilde{T} und die Fourier Koeffizienten \tilde{z}_k von \tilde{f} .

Aufgabe 34. Sei $f(t)$ die 4π -periodische Funktion mit

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{für } 2\pi \leq t < 4\pi \end{cases}$$

und $f(t+4\pi) = f(t)$ für alle t . Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Berücksichtigen Sie den Spezialfall $k = \pm 2$. Unterscheiden Sie die Fälle k gerade bzw. k ungerade. Es gilt

$$e^{\pi j k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 35. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der T -periodischen Sägezahn Funktion f , die definiert ist durch

$$\begin{aligned} f(t) &= t && \text{für } 0 \leq t < T \\ f(t+T) &= f(t) && \text{sonst} \end{aligned}$$

Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Sie benötigen hierfür Produktintegration.

Aufgabe 36. Von einer unbekanntem T -periodischen Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien die Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ gegeben. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten $z_k^{(g)}$ der Funktion

$$g(t) = f(1-t).$$

Aufgabe 37. Die 2π -periodische Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{jt} & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle t . Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$.

Vereinfachen Sie das Ergebnis, indem Sie eine Fallunterscheidung durchführen ob k gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 38. Für komplexe T -periodische Funktionen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ können Fourier Koeffizienten nach der gleichen Formel berechnet werden wie für reelle, d.h.

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad \omega = 2\pi/T.$$

Allerdings treten bei komplexen Funktionen die Fourier Koeffizienten nicht mehr so wie bei reellen in konjugiert komplexen Paaren auf, d.h. im allgemeinen ist $z_k \neq \overline{z_{-k}}$.

Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine unbekannte T -periodische Funktion mit gegebenen Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten $z_k^{(g)}$ von

$$g(t) = \overline{f(t)}.$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ der $T = 2\pi$ -periodischen Funktion

$$f(t) = 3 + 4 \sin(t) + \cos(t).$$

Aufgabe 40. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Versuchen Sie, die Zwischenergebnisse möglichst zu vereinfachen.

Aufgabe 41. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$f(t) \circ \bullet F(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f(-t) \circ \bullet \overline{F(\omega)}$$

und

$$\frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \circ \bullet \operatorname{re}(F(\omega)).$$

Aufgabe 42. Sei $a > 0$ eine Konstante und

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{falls } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $F(\omega)$.
- Berechnen Sie dann den Grenzwert für $a \rightarrow \infty$, d.h. die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Aufgabe 43. Sei

$$f(t) \circ \bullet F(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann für eine beliebige Konstante a gilt

$$(af)(t) \circ \bullet (aF)(\omega).$$

Aufgabe 44. Sei $F(\omega)$ die Fourier Transformierte von $f(t)$. Zeigen Sie, dass $F(0)$ gleich der Fläche unter $f(t)$ ist.

Aufgabe 45. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e -Funktionen dar.

Aufgabe 46. Sei

$$f(t) \circ \bullet F(\omega)$$

$$g(t) \circ \bullet G(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$(f + g)(t) \circ \bullet (F + G)(\omega).$$

Aufgabe 47. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit *reeller* Fourier Transformierter $F(\omega)$. Zeigen Sie, dass dann f gerade ist.

Aufgabe 48. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Fourier Transformierter

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j\omega a}$$

wobei $A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *reelle* Funktion ist und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante.

Zeigen Sie, dass dann $f(t - a)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 49. Berechnen Sie die Funktion $f(t)$, für deren Fourier Transformierte $F(\omega)$ gilt

$$F(\omega) = \delta(\omega).$$

In der Frequenzzzerlegung von $f(t)$ taucht somit nur eine einzige Schwingungskomponente mit Kreisfrequenz $\omega = 0$ auf und ansonsten keine Schwingungen. Überlegen Sie sich daher zunächst anschaulich, wie $f(t)$ aussehen muss.

Aufgabe 50. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$F(\omega) = 2\operatorname{re} \left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right)$$

Aufgabe 51. Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{(1+j)t} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |F(\omega)| = 0.$$

Sie dürfen hierbei die Dreiecksungleichung der Vektorrechnung auf komplexe Zahlen übertragen, d.h.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Aufgabe 52. Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von

$$f(t) = \sigma(t) \sin(t)e^{-t}.$$

Aufgabe 53. Zeigen Sie, dass

$$\delta(t) \circ \bullet 1.$$

Hinweis: Stellen Sie das Fourierintegral auf und nutzen Sie darin die Ausblendeigenschaft des Dirac Impulses.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.