

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 2

Zu bearbeiten bis 26.3.2025

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte sofern sie existieren.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\ln(x)) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \cos(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{(2x + 1)(x + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2 + \sin(x)}\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^\pi e^{jkt} dt.$$

Hinweis: Um den Term $e^{jk\pi}$ zu vereinfachen, müssen Sie eine Fallunterscheidung machen ob k gerade oder k ungerade ist. Bevor Sie durch k dividieren, müssen Sie eine weitere Fallunterscheidung machen, ob $k = 0$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle t und ε gilt

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \cos(u) du = 2 \sin(\varepsilon) \cos(t).$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie zwei Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = x e^{(x^2)} + 1.$$

Berechnen Sie dann den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

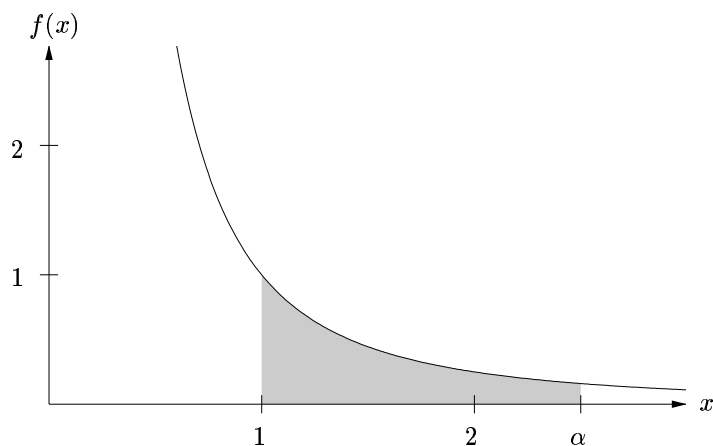
für x zwischen 1 und ∞ . Ist der Flächeninhalt überhaupt endlich? Da $f(\infty)$ nicht definiert ist, muss man wie folgt vorgehen: Man berechnet zunächst für beliebiges $\alpha > 0$

$$F_\alpha = \int_1^\alpha f(x) dx$$

und führt dann den Grenzübergang

$$F = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_\alpha$$

durch.



Aufgabe 6. Von einer Funktion $f(x)$ sei eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt. Berechnen Sie hiermit eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x} f(\ln(x)).$$

Aufgabe 7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (e^x + 1) \sin(e^x + x).$$

- Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$. Hinweis: Versuchen Sie's mit einer geeigneten Substitution.
- Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, für die gilt $F(0) = 0$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\int \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx.$$

Aufgabe 9. Sei f eine T -periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t.$$

Sei weiterhin

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

eine T -periodische Funktion ist, d.h.

$$g(t+T) = g(t) \text{ für alle } t.$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Berechnung einmal mit der Regel “Zeile mal Spalte” durch und einmal mit der Regel “Linearkombination der Spalten”. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.

Aufgabe 11. Wie viele Multiplikationen von Zahlen sind erforderlich um eine $m \times n$ -Matrix mit einem n -stelligen Vektor zu multiplizieren? Berechnen Sie dies für die Multiplikation mit der Regel “Zeile mal Spalte” und mit der Regel “Linearkombination der Spalten”.

Aufgabe 12. Stellen Sie den Term

$$a \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

als Matrix-Vektor Produkt dar.

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15. Beim Zugriff auf den Hauptspeicher (DRAM) eines Rechners wird intern immer eine ganze Speicherzeile (Englisch: page) auf einmal gelesen und im Speicherchip gepuffert, so dass darauffolgende Zugriffe auf diese Zeile sehr schnell sind und in den Cache kopiert werden können. Ein typischer Wert sind etwa 8kB. Daher sind Speicherzugriffe auf konsequente Adressen effizienter als auf weit auseinanderliegende.

Eine Matrix kann auf zwei Weisen im Rechner gespeichert werden:

- *zeilenweise* (die Komponenten einer Zeile liegen im Speicher konsequentiv)
- *spaltenweise* (die Komponenten einer Spalte liegen im Speicher konsequentiv).

Welche Methode ist bei der Matrix-Vektor Multiplikation besser wenn man die Multiplikation mit der Regel Zeile mal Spalte berechnet bzw. mit der Regel Linearkombination der Spalten?

Bei der Verwendung von Grafikkarten können fast alle arithmetischen Operationen parallel ausgeführt werden. Die Rechenzeit hängt daher im wesentlichen von der Geschwindigkeit der Speicherzugriffe ab!

Aufgabe 16. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen, deren Komponenten Funktionen von t sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer Matrix ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (A')_{ij} &= a'_{ij}(t) \\ (B')_{ij} &= b'_{ij}(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Produktregel der Ableitung für Matrizen gilt, d.h.

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie das Matrix Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18. Sei A eine Matrix, in der die i -te Zeile komplett Null ist und B eine beliebige Matrix. Welche Komponenten von AB sind dann mit Sicherheit Null? Sei nun A eine Matrix, in der die j -te Spalte komplett Null ist. Was kann man jetzt über die Matrix AB sagen?

Aufgabe 19. Sie haben das Produkt C zweier Matrizen A und B berechnet.

- Nachträglich wird nun die Komponente a_{ij} der Matrix A verändert. Welche Komponenten von C müssen dann neu berechnet werden?
- Nachträglich wird nun die Komponente b_{ij} der Matrix B verändert. Welche Komponenten von C müssen dann neu berechnet werden?

Geben Sie eine kurze Begründung!

Aufgabe 20. Finden Sie zwei Matrizen A, B so dass

$$AB = \begin{pmatrix} ab + cf & ad + ch \\ eb + gf & ed + gh \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21. Für zwei Zahlen a, b gilt $ab = 0$ nur wenn $a = 0$ oder $b = 0$. Gilt dies auch für Matrizen? Sei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die 2×2 Nullmatrix. Gibt es zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so dass $A \neq N$, $B \neq N$ aber $AB = N$? Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 22. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix X so dass

$$AX = B.$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.