Heilbronn, den 26.3.2025 — Prof. Dr. V. Stahl — SS 25

# Übungen zu Mathematik 2

*Blatt 3*

Zu bearbeiten bis 2.4.2025

| **Name:** | **Matrikelnr.:** |
| --- | --- |

**Pflichtaufgabe.** Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{1}{1+j}\right)^{10}.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie alle Lösungen $z$ der Gleichung

$$e^{z+1} \quad = \quad j.$$

Hinweis: Stellen Sie $z$ in Kartesischen Koordinaten dar.

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int f(x) f'(x) dx.$$

Lösen Sie die Aufgabe einmal mit Substitution und einmal mit partieller Integration.

**Aufgabe 5.** Sei

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^{-1}$ und $AB$.

**Aufgabe 6.** Zeigen Sie, dass für alle quadratischen Matrizen $A, B$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(AB)^n \quad = \quad A(BA)^{n-1}B.$$

**Aufgabe 7.** Neuronale Netze wie ChatGPT oder Deep Seek berechnen intern eine sog. Query Matrix $Q$ und eine Key Matrix $K$ mit

$$Q, K \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Anschließend wird das Produkt

$$QK^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

berechnet.

Wenn der Eingabetext um ein Token verlängert wird, führt dies dazu, dass an $Q$ und $K$ jeweils eine Zeile angefügt wird. Man erhält dadurch zwei Matrizen

$$\tilde{Q}, \tilde{K} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}.$$

Wie viele Matrix Elemente muss man für das Produkt $\tilde{Q}\tilde{K}^{\mathrm{T}}$ neu berechnen, wenn man $QK^{\mathrm{T}}$ bereits berechnet hat?

Hinweis: Zeichnen Sie ein Bild!

**Aufgabe 8.** Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Berechnung einmal mit der Regel “Zeile mal Spalte” durch und einmal spaltenweise mit Matrix - Vektor Multiplikationen. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.

**Aufgabe 9.** Gilt für beliebige quadratische Matrizen $A, B$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(AB)^n \quad = \quad A^n B^n ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie, dass die Matrix Multiplikation distributiv über der Matrix Addition ist, d.h.

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Sie dürfen hierbei verwenden, dass

$$A(\vec{b} + \vec{c}) = A\vec{b} + A\vec{c}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie die Matrizen $B$ und $C$ in ihre Spalten und führen Sie die Matrix Multiplikationen spaltenweise durch. Beginnen Sie also mit

$$B + C \quad = \quad (\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n)$$

und

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n) \\ &= \big(A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \dots \quad A(\vec{b}_n + \vec{c}_n)\big) \\ &\vdots \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.** Berechnen Sie für beliebiges $x$ und $y$ die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 12.** Sei $\alpha$ beliebig und

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$A^{\mathrm{T}}A \quad = \quad E.$$

**Aufgabe 13.** Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine Matrix $T$ gibt, so dass

$$T^{-1}AT \quad = \quad B.$$

Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reguläre Matrizen. Zeigen Sie, dass $AB$ und $BA$ ähnlich sind.

**Aufgabe 14.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A^{\mathrm{T}} = A$. Seien $A, B$ symmetrische Matrizen.

- Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dann $AB$ nicht notwendig symmetrisch ist.
- Zeigen Sie, dass

$$AB \quad = \quad (BA)^{\mathrm{T}}.$$

**Aufgabe 15.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(A^{-1}\right)^n \quad = \quad (A^n)^{-1}.$$

Hierbei ist

$$A^n \quad = \quad \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{mal}}.$$

**Aufgabe 16.** Zeigen Sie, dass

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} \quad = \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Sie dürfen in der Herleitung verwenden, dass

$$(AB)^{\mathrm{T}} \quad = \quad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

**Aufgabe 17.** Sei $\vec{x}_b$ eine Lösung des LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

und $\vec{x}_0$ eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\vec{x}_b + \vec{x}_0$ ebenfalls Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist.

**Aufgabe 18.** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei Matrizen, deren Komponenten Funktionen von $t$ sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer Matrix ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (A')_{ij} &= a'_{ij}(t) \\ (B')_{ij} &= b'_{ij}(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Produktregel der Ableitung für Matrizen gilt, d.h.

$$(AB)' \quad = \quad A'B + AB'.$$

**Aufgabe 19.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $AB$ und $BA$.

**Pflichtaufgabe.** Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.