Heilbronn, den 2.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 4

Zu bearbeiten bis 9.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)} dx.$$

Aufgabe 2. Sei f eine beliebige Funktion. Berechnen Sie

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)^2} dt.$$

Aufgabe 3. Sei f eine differenzierbare Funktion und C eine Konstante. Berechnen Sie

$$\int_C^t f'(\tau) d\tau.$$

Aufgabe 4. Sei $f(t)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_C^t f(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $f(t)$ ist für jede Konstante C.

Aufgabe 5. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal wenn

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

- Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
eine orthogonale Matrix ist.

- Zeigen Sie, dass für jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$
Mit anderen Worten: Multipliziert man einen Vektor mit einer orthogonalen Matrix, bleibt die Länge des Vektors gleich. Hinweis: Nutzen Sie aus, dass
$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \circ \vec{x} = \vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{x}.$$

Aufgabe 6. Sei $\vec{x}_b$ eine Lösung des LGS
$$A\vec{x} = \vec{b}.$$
Zeigen Sie, dass es dann für jede Lösung $\vec{x}_b'$ dieses LGS einen Vektor $\vec{x}_0$ gibt, der Lösung des zugehörigen homogenen LGS
$$A\vec{x} = \vec{0}$$
ist, so dass
$$\vec{x}_b' \quad = \quad \vec{x}_b + \vec{x}_0.$$

Aufgabe 7. Statt Linearkombinationen von Vektoren kann man analog auch Linearkombinationen von Funktionen bilden. So ist die Funktion $g(x)$ Linearkombination der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ wenn es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt so dass
$$g(x) \quad = \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$$
für alle x. Entsprechend ist der Vektorraum, der von $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ erzeugt wird, die Menge
$$L(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \quad = \quad \{c_1 f_1(x) + \ldots c_n f_n(x) \,|\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$
Was sind die Elemente von
$$L(1, x, x^2, \ldots, x^5)$$
bzw. von
$$L(1, x, x^2, \ldots)?$$
Zeigen Sie, dass
$$L(\cos(\omega x), \sin(\omega x)) \quad = \quad \{r\cos(\omega x + \varphi) \,|\, r, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$
Hinweis: Verwenden Sie komplexe Zahlen!

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass
$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \in L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

ist ein Vektorraum. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 11. Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Vektor $\vec{b}$, für den gilt

$$\vec{b} \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2).$$

Aufgabe 12. Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

Hinweis: Schauen Sie nach wie die Gleichheit von Mengen definiert ist.

Aufgabe 13. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in M$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{x} + \vec{y} \in M \quad \text{und} \quad u\vec{x} \in M.$$

Die einfachsten Beispiele für solche Mengen sind Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen. Tatsächlich treten Mengen mit diesen Abschlusseigenschaften nicht nur in der Vektorrechnung sondern in vielen anderen Gebieten auf wie z.B. Polynome, Fourier Reihen, Eigenvektoren und Differentialgleichungen.

- Sei $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ und

$$M = \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

  Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

  – Annahme: $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h. es gibt $r_1, \ldots, r_n$ und $s_1, \ldots, s_n$ so dass

$$\begin{aligned} \vec{x} &= r_1\vec{a}_1 + \ldots + r_n\vec{a}_n \\ \vec{y} &= s_1\vec{a}_1 + \ldots + s_n\vec{a}_n. \end{aligned}$$

- Zu zeigen: $\vec{x}+\vec{y} \in M$, d.h. es gibt $t_1, \ldots, t_n$ so dass

$$\vec{x}+\vec{y} \quad = \quad t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n.$$

  Die Berechnung von $t_1, \ldots, t_n$ ist dann einfach.

- Sei M die Menge aller Polynome. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation, d.h. für alle Polynome $p(x), q(x)$ und alle Skalare u ist auch $p(x)+q(x)$ und $up(x)$ ein Polynom. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:
  - Annahme: $p(x), q(x)$ sind Polynome, d.h. es gibt $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_n$ so dass

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n. \end{aligned}$$

  - Zu zeigen: $p(x)+q(x)$ ist ein Polynom, d.h. es gibt $c_0, \ldots, c_n$ so dass

$$p(x)+q(x) \quad = \quad c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n.$$

- Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch, wenn

$$f(t+T) \quad = \quad f(t)$$

  für alle t. Sei M die Menge aller T-periodischer Funktionen, wobei T eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:
  - Annahme: $f(t), g(t)$ seien T-periodisch, d.h.

$$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \\ g(t+T) &= g(t) \end{aligned}$$

    für alle t.
  - Zu zeigen: $(f+g)(t)$ ist T-periodisch, d.h.

$$(f+g)(t+T) \quad = \quad (f+g)(t).$$

    Ab hier ist der Beweis einfach, da

$$(f+g)(t+T) \quad = \quad f(t+T)+g(t+T).$$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$M \quad = \quad \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

  Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:
  - Annahme: $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{y} &= \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

– Zu zeigen: $\vec{x} + \vec{y} \in M$, d.h.

$$A(\vec{x} + \vec{y}) \quad = \quad \lambda(\vec{x} + \vec{y}).$$

Sie benötigen hierfür nur elementare Matrix Arithmetik.

- Sei M die Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f'(x) + \sin(x) f(x) \quad = \quad 0.$$

Beispiele für Elemente von M sind

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(x) &= e^{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

– Seien $f, g \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) + \sin(x) f(x) &= 0 \\ g'(x) + \sin(x) g(x) &= 0. \end{aligned}$$

– Zu zeigen: $f + g \in M$, d.h.

$$(f+g)'(x) + \sin(x)(f+g)(x) \quad = \quad 0.$$

Hierfür benötigen Sie nur die Summenregel der Ableitung.

Aufgabe 14. Welche der folgenden Mengen bildet einen Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Menge der konvergenten Folgen.
- Menge der unbestimmt divergenten Folgen.
- Menge der Nullfolgen.
- Menge der Folgen mit Grenzwert 1.
- Menge der Folgen mit uneigentlichem Grenzert ∞.

Aufgabe 15. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ so dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

nicht leer ist. Zeigen Sie dass $\mathbb{L}$ <u>kein</u> Vektorraum ist.

Aufgabe 16. Die Menge aller T-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und bildet somit einen Vektorraum.

Das komplexe Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\vec{x} \circ \vec{y} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Der erste Faktor wird konjugiert komplex genommen um zu erreichen, dass

$$\vec{x} \circ \vec{x} \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Das komplexe Skalarprodukt ist damit wie das reelle positiv definit, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{x} &\geq 0 \\ \vec{x} \circ \vec{x} &= 0 \text{ gdw. } \vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ähnlich kann man auch auf T-periodischen Funktionen ein Skalarprodukt definieren. Für zwei T-periodische Funktionen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt $f \circ g$ eine Zahl, die definiert ist durch

$$f \circ g = \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass die T-periodischen Funktionen

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ g(t) &= e^{j\ell\omega t} \end{aligned}$$

orthogonal sind für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $k \neq \ell$, d.h.

$$f \circ g = 0.$$

Aufgabe 17. Ist die Menge aller regulärer $n \times n$ Matrizen abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 18. Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \cap M_2$ abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Da Vektorräume genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, die unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen sind, ist die Schnittmenge von Vektorräumen wieder ein Vektorraum. Gilt dies auch für die Vereinigungsmenge? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.