Heilbronn, den 9.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 5

Zu bearbeiten bis 16.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\overline{e^z} \quad = \quad e^{\overline{z}}.$$

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die jeder reellen Zahl x eine komplexe Zahl $f(x)$ zuordnet. Man kann den Funktionswert von f an der Stelle x in Realteil und Imaginärteil aufspalten, d.h.

$$f(x) = f_{\mathrm{re}}(x) + j f_{\mathrm{im}}(x)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{re}}(x) &= \mathrm{re}(f(x)) \\ f_{\mathrm{im}}(x) &= \mathrm{im}(f(x)) \end{aligned}$$

und $f_{\mathrm{re}}, f_{\mathrm{im}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

- Sei nun konkret

  $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = (2+j)e^{jx}.$$

  Berechnen Sie je einen Funktionsterm für die Funktionen

  $$f_{\mathrm{re}}(x), \;\; f_{\mathrm{im}}(x), \;\; f'_{\mathrm{re}}(x), \;\; f'_{\mathrm{im}}(x), \;\; f'(x)$$

  sowie den Realteil und den Imaginärteil von $f'(x)$.

- Begründen Sie kurz, weshalb für jede differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

  $$f'(x) = f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x).$$

  Sie müssen hierbei lediglich die Ableitungsregeln anwenden.

- Begründen Sie damit, weshalb allgemein gilt
$$\mathrm{re}(f'(x)) = f'_{\mathrm{re}}(x).$$
Es ist somit bei einer Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egal, ob man zuerst den Realteil nimmt und dann ableitet oder umgekehrt.
- Begründen Sie, weshalb allgemein gilt
$$\overline{f(x)}' = \overline{f'(x)}.$$
Es ist somit egal, ob man zuerst ableitet und dann komplex konjugiert oder umgekehrt.
- Kann man auch allgemein sagen, dass
$$|f(x)|' = |f'(x)|?$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für beliebige a, b, c gilt
$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist, verwenden Sie diese zur Berechnung der bestimmten Integrale und zeigen Sie, dass sich auf der rechten Seite $F(c)$ wegsubtrahiert.

Aufgabe 4. Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}dt.$$
Hinweis:
$$|t| \quad = \quad \begin{cases} t & \text{falls } t \geq 0 \\ -t & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass
$$\int_a^b f(c-x)dx \quad = \quad \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx.$$

Aufgabe 6. Seien $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vekoren und $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Der Vektor $\vec{a}_\ell$ wird nun ersetzt durch
$$\vec{a}'_\ell \quad = \quad \vec{a}_\ell + \sum_{i \neq \ell} c_i \vec{a}_i$$
wobei c_i beliebige Gewichte sind. Zeigen Sie, dass die so entstehenden Vektoren
$$\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\left(\vec{a}_\ell + \sum_{i \neq \ell} c_i \vec{a}_i\right)}_{\vec{a}'_\ell}, \dots, \vec{a}_n$$
wieder linear unabhängig sind.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Kriterium für lineare Unabhängigkeit und führen Sie den Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Basis und die Dimension des Vektorraums

$$\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Aufgabe 8. Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors als Linearkombination dieser Vektoren.

Aufgabe 9. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

genau eine Lösung hat. Die Bedingung soll mit linearer Abhängigkeit und Vektorräumen zu tun haben.

Aufgabe 10. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die jeden Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ an der y-Achse spiegelt. Berechnen Sie einen Funktionsterm für f. Ist f eine lineare Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12. Bei den "meisten" Funktionen sind entweder beide Linearitätsbedingungen erfüllt oder keine. Bei den folgenden beiden Beispielen gilt dies jedoch nicht. Entscheiden Sie jeweils, welche Linearitätsbedingung erfüllt ist.

Im zweiten Beispiel werden lineare Funktionen ins Komplexe erweitert: Eine Funktion $f \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ heißt linear wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ und alle $u \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$

- $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1^2/x_2 & \text{falls } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x_2 = 0 \end{cases}$$

- $$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \mathrm{re}(x).$$

Aufgabe 13. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f linear ist und zwar

- indem Sie die beiden Linearitätsbedingungen nachweisen und
- indem Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ finden so dass

  $$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

  für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 14. Nennen Sie vier äquivalente Bedingungen dafür, dass die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 15. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

linear ist, indem Sie die beiden Linearitätseigenschaften nachweisen.

Aufgabe 16. Sei α ein fester Wert und $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Funktion mit Matrix Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie einen festen Wert für α, berechnen Sie damit die Funktionswerte der kanonischen Basisvektoren und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein. Wie kann man allgemein geometrisch beschreiben, was die Funktion f mit einem Vektor $\vec{x}$ "macht"?

Aufgabe 17. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion mit

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= 2 \\ f(\vec{e}_2) &= 5 \end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass f keine der beiden Linearitätsbedingungen erfüllt.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.