Übungen zu Mathematik 2

Blatt 6

Zu bearbeiten bis 23.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{-3} + 1 = j.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie unter Verwendung von komplexen Zahlen, dass

$$\sin(x + y) \quad = \quad \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie

$$\left|\frac{1}{1 + e^{j\varphi}}\right|.$$

Für welche Winkel φ ist das Ergebnis nicht definiert?

Aufgabe 4. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie verwendet haben. Berechnen Sie dann den Wert des bestimmten Integrals von -3 bis 2.

- $\displaystyle\int xa^x dx.$
- $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx.$
- $\displaystyle\int \sin(x)/\cos(x)dx.$
- $\displaystyle\int (x-3)\sin(2x)dx.$

Aufgabe 5. Sei $0 \notin [a, b]$. Zeigen Sie, dass

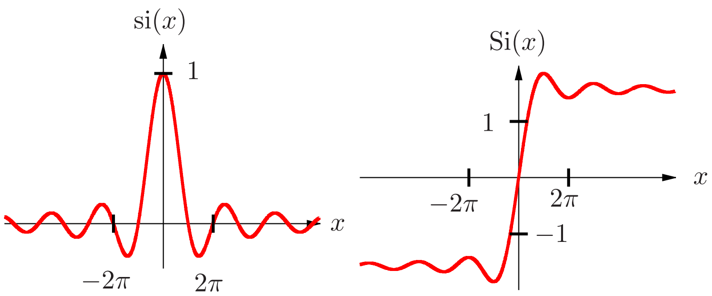
$$\int_a^b \frac{\sin(1/x)}{x}dx \quad = \quad \int_{1/b}^{1/a} \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x} dx.$$

Aufgabe 7. In der digitalen Signalverarbeitung spielt die si-Funktion eine wichtige Rolle. Sie ist definiert durch

$$\mathrm{si} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



Die si-Funktion hat zwar eine Stammfunktion $\mathrm{Si}(x)$, diese ist jedoch ähnlich wie die $e^{(x^2)}$ Funktion nicht duch einen Term mit den üblichen Funktionssymbolen darstellbar. Man bezeichnet solche Funktionen als nicht elementar integrierbar. Das Problem der Berechnung einer Stammfunktion einer beliebigen elementar integrierbaren Funktion wurde von Robert H. Risch 1968 gelöst (Risch Algorithmus). Die Si-Funktion heißt Integralsinus und tritt u.a. in Erscheinung wenn man die Artefakte an Farbkanten von JPEG komprimierten Bildern erklären möchte (siehe Gibbssches Phänomen). Um mit der Si-Funktion arbeiten zu können, soll ihre Taylor Reihe berechnet werden. Gehen Sie also von der Taylor Reihe der Sinus Funktion aus und berechnen Sie daraus die Taylor Reihe der si-Funktion. Diese kann nun gliedweise integriert werden, d.h. sie müssen von jedem Summanden eine Stammfunktion bestimmen. Wählen Sie die Integrationskonstante so dass $\mathrm{Si}(0) = 0$.

Aufgabe 8. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 9. Von einer linearen Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei bekannt, dass

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ und} \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Konstanten a, b. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Aufgabe 10. Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $g \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$g(\vec{x}) = f(A\vec{x}).$$

- Zeigen Sie, dass

  $$g(\vec{x} + \vec{y}) = g(\vec{x}) + g(\vec{y}).$$

  Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, warum Sie ihn machen dürfen. Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften von linearen Funktionen und Matrizen verwenden.
- Berechnen Sie in Abhängigkeit von f und den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ von A eine Matrix B so dass $g(\vec{x}) = B\vec{x}$.

Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Da f bijektiv ist, besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1}. Berechnen Sie die Matrix für f und für f^{-1}.

Aufgabe 12. Die Menge aller 2×3 Matrizen ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und bildet daher einen Vektorraum. Nennen Sie eine Basis für diesen Vektorraum. Was ist seine Dimension?

Was ist die Dimension des Vektorraums der linearen Funktionen von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^7$?

Aufgabe 13. 3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig. Zeigen Sie damit, dass es keine injektive, lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geben kann. Sie dürfen alle Eigenschaften der linearen Unabhängigkeit nutzen, die in der Vorlesung gezeigt wurden.

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die Spalten von A genau dann linear unabhängig sind, wenn die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\vec{x}) \quad = \quad A\vec{x}$$

injektiv ist. Sie dürfen alle in der Vorlesung besprochenen Kriterien für linear unabhängige Vektoren verwenden.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Matrix A für die lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}. Berechnen Sie damit einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion f^{-1}. Zeigen Sie dann, dass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.

Aufgabe 16. Sei f eine zweistellige, lineare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die einstellige Funktion g mit

$$g(x) \quad = \quad f \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear ist.

Aufgabe 17. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $1 \in A$.
- Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig als endliche Linearkombination der Elemente von A darstellen, wobei nur Gewichte aus $\mathbb{Q}$ zugelassen sind. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es somit Gewichte $q_1, \ldots, q_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ so dass

$$x \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} q_i a_i.$$

Eine solche Menge heißt Hamel Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Sie könnte z.B wie folgt aussehen:

$$A \quad = \quad \{1, \sqrt{2}, \pi, e, \ldots\}.$$

Es wäre dann z.B. $3+\pi \notin A$, da sich $3+\pi$ als endliche Linearkombination von 1 und π mit rationalen Koeffizienten darstellen lässt.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x)$ das Gewicht von 1 in der eindeutigen Darstellung von x als Linearkombination von Elementen aus A mit Gewichten aus $\mathbb{Q}$. So ist z.B.

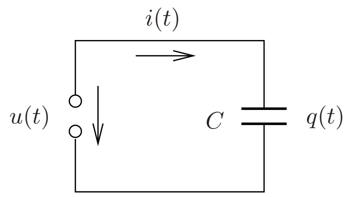
$$\begin{aligned} f(3) &= 3 \\ f(\pi-2) &= -2 \\ f(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für diese Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur eine der beiden Linearitätseigenschaften gilt.

Aufgabe 18. In nachfolgendem Bild ist ein Kondensator C direkt an eine komplexe Wechselspannungsquelle mit Spannung

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}$$

angeschlossen.



Für die Ladung des Kondensators gilt somit

$$q(t) = Cu(t).$$

Die Ladungsänderung des Kondensators ist gleich der Stromstärke, d.h.

$$i(t) = q'(t).$$

- Berechnen Sie die Stromstärke $i(t)$ in Abhängigkeit von u_0, C und ω.
- Berechnen Sie hiermit den komplexen Widerstand des Kondensators aus

  $$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

  und zeigen Sie, dass R unabhängig von t ist. Wäre dies auch der Fall, wenn $u(t)$ keine komplexe Wechselspannung wäre?

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.