Heilbronn, den 23.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 7

Zu bearbeiten bis 30.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. $f \in D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\hat{x}$ wenn

- f an der Stelle $\hat{x}$ definiert ist, d.h. $\hat{x} \in D$.
- f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$ hat.
- Der Grenzwert von f an der Stelle $\hat{x}$ gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$ ist.

Welche der drei Bedingungen sind in folgenden Beispielen erfüllt?

1.) $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ und $\hat{x} = 0$.

2.) $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ und $\hat{x} = 0$.

3.) $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \neq 5 \\ 0 & \text{für } x = 5 \end{cases}$$

und $\hat{x} = 5$.

4.) $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)/x$ und $\hat{x} = 0$.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Seien

$$\vec{a}_\ell = \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \vdots \\ a_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_\ell = \begin{pmatrix} b_{\ell 1} \\ b_{\ell 2} \\ \vdots \\ b_{\ell n} \end{pmatrix}, \quad \ell = 1, \ldots, k$$

Vektoren, deren Komponenten sich aus den Einträgen der ℓ-ten Spalte von A bzw. der ℓ-ten Zeile von B zusammensetzen.

Zeigen Sie, dass

$$AB \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{k} \vec{a}_\ell \, \vec{b}_\ell^{\mathrm{T}}.$$

Hinweis: Jeder Summand $\vec{a}_\ell \, \vec{b}_\ell^{\mathrm{T}}$ ist das Produkt aus einem m-stelligen Spaltenvektor $\vec{a}_\ell$ und einem n-stelligen Zeilenvektor $\vec{b}_\ell^{\mathrm{T}}$ und ergibt folglich eine $m \times n$ Matrix.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 3 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$ von

$$f(x) = 2\sqrt{x} + x^2.$$

Kürzen Sie die entstehenden Brüche so weit wie möglich.

Aufgabe 5. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{2j(1-j)}{(2j+1)^2}.$$

Aufgabe 6. Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \cap M_2$ abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Da Vektorräume genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, die unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen sind, ist die Schnittmenge von Vektorräumen wieder ein Vektorraum. Gilt dies auch für die Vereinigungsmenge? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 7. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Funktion mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix A so das

$$f(\vec{x}) \quad = \quad A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(\vec{x}) = -\vec{x}$$

linear ist.

Aufgabe 9. Seien $g, h \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwei lineare Funktionen mit

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= A\vec{x} \\ h(\vec{x}) &= B\vec{x}. \end{aligned}$$

Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ h\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Matrix für f.

Aufgabe 10. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \sqrt{xy + x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{xy}.$$

Aufgabe 12. Sei $y(x)$ eine beliebige Funktion. Berechnen Sie

$$\int \sin(y(x))\cos(y(x))y'(x)dx$$

einmal mit Substitution $u = y(x)$ und einmal mit wenig Schreibaufwand, indem Sie $y(x)$ durch y ersetzen und $y'(x)$ durch dy/dx.

Aufgabe 13. Die Kapazität eines Plattenkondensators ist gegeben durch

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante, ε_r die Dielektrizitätszahl, A die Fläche der Kondensatorplatten und d der Abstand der Platten ist. Es wird nun angenommen, dass der Plattenabstand nicht konstant ist sondern sich mit der Zeit vergrößert nach der Formel

$$d(t) = d_0 + t.$$

Damit erhält man eine zeitabhängige Kapazität

$$C(t) = K\frac{1}{d_0 + t}$$

wobei K eine Konstante ist. Die Kondensatorladung zum Zeitpunkt $t = 0$ sei q_0. Der Kondensator wird über einen Widerstand R entladen. Berechnen Sie die Ladung $q(t)$ zu jedem Zeitpunkt t.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x)y(x) + x = 0.$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$2yy' + y' + \cos(x) \quad = \quad 0.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x)(1 + x^2) = xy(x)$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)^3}$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.