Heilbronn, den 14.11.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 8

Zu bearbeiten bis 21.11.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für jede lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gelten muss, dass $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{xy}.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x)(1 + x^2) = xy(x)$$

Aufgabe 4. Sei

$$y' + g(x)y = r(x)$$

eine lineare DGL mit Anfangswert $y(0) = 0$. Eine solche Gleichung ergibt sich z.B. wenn man die Spannung $y(x)$ an einem Bauteil einer elektrischen Schaltung misst, die von einer Spannungsquelle $r(x)$ angeregt wird. Die Bedingung $y(0) = 0$ besagt dann, dass das System zum Startzeitpunkt $x = 0$ in Ruhe ist. Das Kausalitätsprinzip besagt, dass eine Wirkung $y(x) \neq 0$ nicht eintreten kann, bevor eine Ursache $r(x) \neq 0$ eingetreten ist. Zeigen Sie dies, indem Sie eine partikuläre Lösung der DGL mit dem gegebenen Anfangswert berechnen (Variation der Konstanten). Nehmen Sie dann an, dass $r(x) = 0$ für $x < 0$ und zeigen Sie, dass daraus folgt, dass auch $y(x) = 0$ für $x < 0$. Hinweis: Eine Stammfunktion von $k'(x)$ können Sie darstellen durch

$$\int_0^x k'(u)du$$

wie man durch Ableiten verifiziert:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x k'(u)du\right)' &= (k(x) - k(0))' \\ &= k'(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \cos(x)y = \frac{1}{e^{\sin(x)}}.$$

Aufgabe 6. Gegeben sei die DGL

$$y'(x) = \cos\left(e^{\sin(x)y(x)}\right)$$

und der Anfangswert $y(0) = 2$. Schreiben Sie ein Programm, das mit dem Euler Verfahren mit Schrittweite $\Delta x = 10^{-3}$ einen Näherungswert für $y(20)$ berechnet. Die Programmiersprache ist hierbei egal.

Aufgabe 7. Ein Kondensator mit Kapazität C entlädt sich über einen zeitabhängigen Widerstand mit

$$R(t) = \frac{1}{1+t}\ \text{Ohm}.$$

Der Widerstand wird also mit der Zeit immer kleiner, folglich muss sich der Kondensator schneller entladen als mit der bekannten e-Funktion für konstanten Widerstand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung am Kondensator u_0. Berechen Sie die Spannung des Kondensators $u_C(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$.

Aufgabe 8. Eine Luftblase der Masse m steigt vom Meeresboden auf und erfährt dabei die konstante Auftriebskraft F. (Die Schwerkraft der Luftblase ist hierin enthalten und muss nicht extra berücksichtigt werden.) Die Reibungskraft, die die Luftblase beim Aufstieg erfährt, ist proportional zu ihrer Geschwindigkeit v und hat den Betrag rv.

- Stellen Sie eine DGL für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Luftblase nach oben auf.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Höhe $s(t)$ der Luftblase über dem Meeresboden in Abhängigkeit von der Zeit t unter der Annahme, dass die Luftblase zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage am Meeresboden startet, d.h. $s(0) = v(0) = 0$.

Aufgabe 9. Gegeben Sei die DGL

$$y' = \sqrt{x + y^2}$$

sowie der Wert $y(3) = 2$. Berechnen Sie näherungsweise $y(3 + \Delta x)$ für $\Delta x = 0.01$.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + xy\cos(x^2) = x\cos(x^2).$$

Aufgabe 11. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x-1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 12. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy' - (1+x)y = x^2 e^{1-x}$$

für $x > 0$.

Aufgabe 13. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungsfunktionen einer linearen, homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' + 2y'' + 2y' = 0.$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'''' = 16y.$$

Aufgabe 17. Sei $y \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\overline{y(x)}' = \overline{y'(x)},$$

d.h. dass die Reihenfolge von konjugiert komplex und Ableitung vertauscht werden kann.

Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und sei $y_c \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Lösungsfunktion.

Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{y_c}$ eine Lösungsfunktion ist.

Machen Sie insbesondere die Stelle deutlich, an der Sie die Voraussetzung ausnutzen, dass die Koeffizienten reell sind.

Aufgabe 18. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' + y = 0.$$

Hinweis: Es gibt 3 komplexe Zahlen z mit $z^3 = -1$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \cos(\pi/3) &= \frac{1}{2} \\ \sin(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.