Heilbronn, den 7.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2

Blatt 9

Zu bearbeiten bis 14.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 \quad = \quad (1+j)^2.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$x\big(y'(x)+y(x)\big)+y(x) \quad = \quad x$$

für $x > 0$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)^3}$$

Aufgabe 4. Gegeben sei die DGL

$$y'' + g(x)y' + h(x)y \quad = \quad 0.$$

Zeigen Sie, dass wenn y_1 und y_2 Lösungen der DGL sind, auch $y_1 + y_2$ eine Lösung ist, d.h. dass die Lösungsmenge der DGL abgeschlossen unter Addition ist.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' \quad = \quad y + y^2.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - e^{-x} + y - xy' = xy.$$

Aufgabe 7. Sei

$$y'' + jy \quad = \quad 0.$$

Berechnen Sie die komplexen Basislösungen y_1, y_2 mit den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ und zeigen Sie, dass

$$y_2 \quad = \quad \frac{1}{y_1}.$$

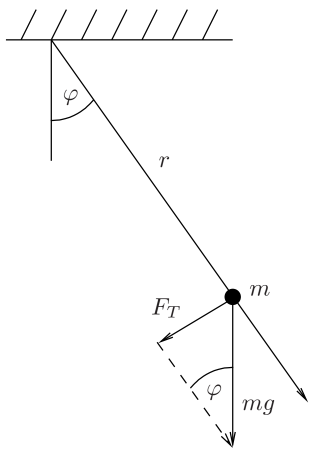
Aufgabe 8. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'''' = 16y.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' e^{y+1} + 3 \quad = \quad 2\cos(x).$$

Aufgabe 10. Nachfolgendes Bild zeigt eine Punktmasse m, die an einem Seil der Länge r reibungsfrei pendelt.



- Berechnen Sie die Tangentialkraft F_T in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels φ. Sie können Ihr Ergebnis verifizieren, indem Sie prüfen, ob $F_T = 0$ wenn $\varphi = 0$.
- Analog zum Trägheitsgesetz

  $$F \quad = \quad ms''$$

  gilt für Drehbewegungen

  $$M \quad = \quad J\varphi''$$

  wobei M das Drehmoment und J das Trägheitsmoment sind:

  $$\begin{aligned} M &= rF_T \\ J &= mr^2. \end{aligned}$$

  Stellen Sie hiermit eine Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel φ auf.

- Die DGL ist leider nicht linear und damit schwer lösbar. Für kleine Auslenkungen φ kann man jedoch die Tangentialkraft, die ja von φ abhängig ist, durch ihre Linearisierung am Arbeitspunkt $\hat{\varphi} = 0$ approximieren. Stellen Sie mit Hilfe dieser Approximation eine lineare DGL auf und berechnen Sie die allgemeine Lösung.
- Berechnen Sie die Periodendauer T der Schwingung. Ist diese von m, von r bzw. von der Amplitude abhängig? Würde das Pendel auf dem Mond schneller oder langsamer schwingen als auf der Erde?

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungsfunktionen einer linearen, homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation.

Aufgabe 12. Ein Kondensator mit Kapazität C entlädt sich über einen zeitabhängigen Widerstand mit

$$R(t) \quad = \quad \frac{1}{1+t}\text{ Ohm.}$$

Der Widerstand wird also mit der Zeit immer kleiner, folglich muss sich der Kondensator schneller entladen als mit der bekannten e-Funktion für konstanten Widerstand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung am Kondensator u_0. Berechen Sie die Spannung des Kondensators $u_C(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$.

Aufgabe 13. Ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ kann unendlich viele Lösungen haben. Sei

$$X_H \quad = \quad \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

die allgemeine Lösung des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{x}_P$ eine partikuläre Lösung, d.h.

$$A\vec{x}_P \quad = \quad \vec{b}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen des LGS gleich der Menge

$$X \quad = \quad \{\vec{x} \mid \text{ es gibt ein } \vec{x}_H \in X_H \text{ so dass } \vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H\}.$$

ist. Man kann diese Menge auch kurz schreiben als

$$X \quad = \quad \{\vec{x}_P + \vec{x}_H \mid \vec{x}_H \in X_H\}.$$

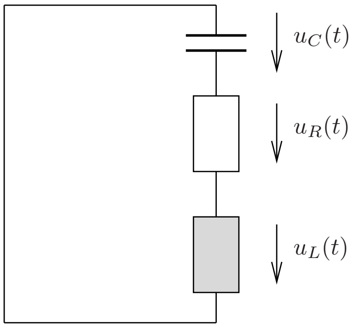
Die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ kann damit als Summe einer partikulären Lösung $\vec{x}_P$ und der allgemeinen Lösung X_H des homogenen LGS dargestellt werden. Gleiches gilt auch für die Lösung von linearen DGL und ist eine Folge der Linearität.

Hinweis: Sie müssen die Gleichheit zweier Mengen zeigen, d.h.

$$\{\vec{x}_P + \vec{x}_H \mid \vec{x}_H \in X_H\} \quad = \quad \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

Die Gleichheit zweier Mengen zeigt man in zwei Schritten, in denen man zeigt, dass jeweils eine Teilmenge der anderen ist. Führen Sie beide Schritte getrennt durch und schreiben Sie jeweils auf, was die Annahmen sind und was gezeigt werden muss.

Aufgabe 14. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem Ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$.

- Stellen Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $q(t)$ auf.
- Berechnen Sie die Kreisfrequenz der Schwingung unter der Annahme, dass $R = 0$.
- Wie groß darf R in Abhängigkeit von L und C sein, damit $q(t)$ tatsächlich sin- und cos- und nicht nur exponentiell abklingende Terme enthält? Berechnen Sie $q(t)$ unter dieser Bedingung.

Aufgabe 15. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$x^2y' + y = 1.$$

Aufgabe 16. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Aufgabe 17. Sei

$$y \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

eine komplexe Lösungsfunktion der DGL

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \quad = \quad 0,$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reell sind. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathrm{re}(y)$ und $\mathrm{im}(y)$ Lösungsfunktionen der DGL sind.

Aufgabe 18. Sei y_s eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = s(x).$$

Zeigen Sie, dass dann uy_s eine partikuläre Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = us(x)$$

ist.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.