

Leistungsnachweis Mathematik 2

Studiengang: ASE/IIT	Semester: 2
Hilfsmittel: 5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Name:	Matrikelnr.:
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $a < b$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t-1)e^t \\ g(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Hinweis: Man kann viele Fallunterscheidungen vermeiden, wenn man Linearität und Zeitinvarianz der Faltung nutzt. Mit

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sigma(t)e^t \\ \hat{g}(t) &= \sigma(t) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= e\hat{f}(t-1) \\ g(t) &= \hat{g}(t-a) - \hat{g}(t-b). \end{aligned}$$

$(f * g)(t) =$

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektorräume M_1 und M_2 sind definiert durch

$$M_1 = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}$$

$$M_2 = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Berechnen Sie zu beiden Vektorräumen jeweils eine Basis.

Basis zu M_1 :

Basis zu M_2 :

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung B der Umkehrfunktion f^{-1} von f .

$B =$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ so dass

$$\vec{x} \vec{y}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\vec{x} =$

$\vec{y} =$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(x).$$

$$y =$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{x \sin(x) e^{-y}}{\sin(e^{y+1})}.$$

$$y =$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1/(t+1) & \text{falls } t \geq 1 \\ t & \text{falls } t < 1. \end{cases}$$

Finden Sie einen Funktionsterm für f ohne Fallunterscheidung, indem Sie Sprungfunktionen $\sigma(t)$ verwenden.

Berechnen Sie dann die verallgemeinerte Ableitung von f und vereinfachen Sie so weit wie möglich unter Anwendung der Ausblendeigenschaft und der verallgemeinerten Gleichheit von Funktionen.

$$f(t) =$$

$$f'(t) =$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{1}{\cos(x)} y' + \frac{1}{\sin(x)} y = \sin(x)$$

für $0 < x < \pi/2$.

$$y =$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Für jede Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei

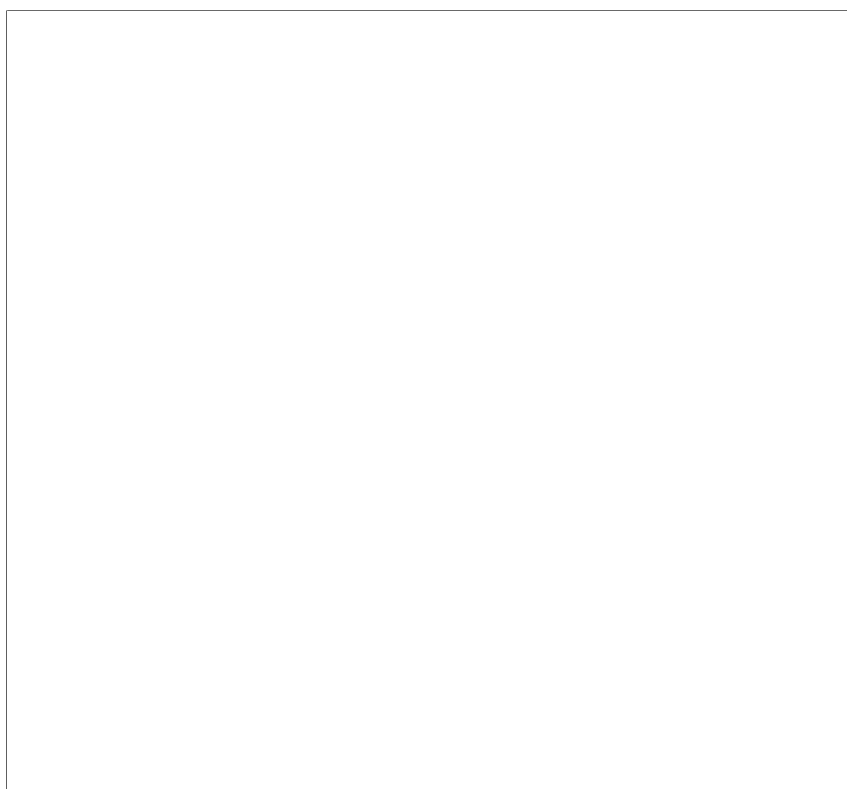
$$f_{\infty}(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du.$$

die Fläche unter f zwischen $-\infty$ und t .

Zeigen Sie, dass für alle Funktionen $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f_{\infty} * g = f * g_{\infty}$$

sofern die Integrale existieren. Sie dürfen alle Eigenschaften der Faltung verwenden, die in der Vorlesung genannt wurden.



Aufgabe 10. (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine singuläre Matrix. Beweisen Sie, dass dann auch AB und BA singulär sind.

Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Theoreme verwenden.

- Beweis, dass AB singulär ist.

- Beweis, dass BA singulär ist.