Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 2

Studiengang:	ASE	Semester:	2
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix A so dass

$$g(f(\vec{x})) = A\vec{x} \text{ für alle } \vec{x}.$$

Lösung von Aufgabe 1. Mit

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} g(f(\vec{x})) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'y - 2xe^{(x^2)} = 0.$$

Lösung von Aufgabe 2. Trennung der Variablen

$$ydy = 2xe^{(x^2)}dx.$$

Stammfunktion

$$\frac{y^2}{2} = e^{(x^2)} + C$$

Lösen

$$\begin{aligned} y^2 &= 2e^{(x^2)} + C \\ y &= \pm\sqrt{2e^{(x^2)} + C}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (5 Punkte) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2x).$$

Lösung von Aufgabe 3. Lösung mit komplexen e-Funktionen.

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right).$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$y'' + 2y' + 5y = e^{j2x}.$$

  Ansatz

  $$\begin{aligned} y &= ce^{j2x} \\ y' &= j2ce^{j2x} \\ y'' &= -4ce^{j2x} \end{aligned}$$

  Einsetzen und Kürzen mit e^{j2x}

  $$\begin{aligned} -4c + 4jc + 5c &= 1 \\ c(1+4j) &= 1 \\ c &= \frac{1}{1+4j}. \end{aligned}$$

  Einsetzen in Ansatz:

  $$y_1 = \frac{1}{1+4j}e^{j2x}.$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$y'' + 2y' + 5y = e^{-j2x}.$$

  Lösung

  $$y_2 \quad = \quad \overline{y_1}.$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(y_1 + \overline{y_1}) \\ &= \mathrm{re}(y_1) \\ &= \mathrm{re}\left(\frac{1-4j}{17}(\cos(2x) + j\sin(2x))\right) \\ &= \frac{1}{17}(\cos(2x) + 4\sin(2x)). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (5 Punkte) Gegeben ist die lineare DGL

$$y' + \tan(x)y \quad = \quad \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_H(x) \quad = \quad K\cos(x).$$

Berechnen Sie damit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.
Hinweis:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx \quad = \quad \tan(x) + C.$$

Lösung von Aufgabe 4. Ansatz durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} y &= k(x)\cos(x) \\ y' &= k'(x)\cos(x) - k(x)\sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL

$$\begin{aligned} k'(x)\cos(x) - k(x)\sin(x) + \tan(x)k(x)\cos(x) &= \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \\ k'(x)\cos(x) &= \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \\ k'(x) &= \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Integration von $k'(x)$ durch Summenregel. Mit dem Hinweis gilt

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

Der zweite Summand wird durch Substitution integriert:

$$u = \cos(x), \quad \frac{du}{dx} = -\sin(x), \quad dx = -\frac{1}{\sin(x)} du.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} &= \int \frac{\sin(x)}{u^2} \left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du \\
&= -\int \frac{1}{u^2} du \\
&= \frac{1}{u} + C \\
&= \frac{1}{\cos(x)} + C
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$k(x) = \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} + C.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y &= k(x) \cos(x) \\
&= \left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} + C\right) \cos(x) \\
&= \sin(x) + 1 + C \cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $T = 2$-periodische Funktion mit

$$f(t) = e^t \text{ für } 0 \leq t \leq 2$$

und $f(t+2) = f(t)$ für alle t. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k von f. Stellen Sie die Koeffizienten in kartesischen Koordinaten dar, d.h. berechnen Sie deren Real- und Imaginärteil.

Lösung von Aufgabe 5. Mit $T = 2$ gilt $\omega = 2\pi/2 = \pi$.

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^t e^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{(1-jk\pi)t}dt \\
&= \frac{1}{2(1-jk\pi)}\left[e^{(1-jk\pi)t}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2-2jk\pi}\left(e^{2-2jk\pi}-1\right) \\
&= \frac{1}{2-2jk\pi}\left(e^2 e^{-2jk\pi}-1\right) \\
&= \frac{1}{2-2jk\pi}\left(e^2-1\right) \\
&= \frac{e^2-1}{2}\frac{1}{1-jk\pi} \\
&= \frac{e^2-1}{2}\frac{1+jk\pi}{1+k^2\pi^2} \\
&= \frac{e^2-1}{2+2k^2\pi^2}(1+jk\pi) \\
&= \frac{e^2-1}{2+2k^2\pi^2} + j\frac{(e^2-1)k\pi}{2+2k^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (6 Punkte) Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = e^{jt/2}\cos(t-1).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Rechengesetze für die Fourier Transformation und

$$\cos(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)).$$

Lösung von Aufgabe 6. Aus der Tabelle entnimmt man

$$\cos(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)).$$

Mit dem Zeitverschiebungssatz

$$f(t-\hat{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}}F(\omega)$$

folgt

$$\cos(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega}\pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)).$$

Mit dem Frequenzverschiebungssatz

$$f(t)e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega-\hat{\omega})$$

folgt für $\hat{\omega} = 1/2$

$$e^{jt/2}\cos(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j(\omega-1/2)}\pi(\delta(\omega-3/2)+\delta(\omega+1/2)).$$

Aufgabe 7. (4 Punkte) Sei

$$[S(f)]\,(t) \quad = \quad f(t^2).$$

Ist S linear? Schreiben Sie zunächst sauber auf, was Sie zeigen müssen und begründen Sie dann Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 7. S ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)]\,(t) &= (f+g)(t^2) \\
&= f(t^2)+g(t^2) \\
&= [S(f)]\,(t)+[S(g)]\,(t) \\
[S(uf)]\,(t) &= (uf)(t^2) \\
&= uf(t^2) \\
&= u\,[S(f)]\,(t) \\
&= [uS(f)]\,(t).
\end{aligned}$$