Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 2

Studiengang:	ASE	Semester:	2
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Für eine lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= 5. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Lösung von Aufgabe 1. Da $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist, muss $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sein, d.h.

$$A = (a_{11} \quad a_{12})$$

bzw.

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2.$$

Einsetzen der gegebenen Funktionswerte liefert

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3 \\ 2a_{11} + 3a_{12} &= 5. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$a_{12} = (5-6)/3 = -1/3.$$

Die gesuchte Matrix ist somit

$$A = (3 \quad -1/3).$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$2e^y y' - \sin(x)^2 \cos(x) = 0.$$

Lösung von Aufgabe 2. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} 2e^y \frac{dy}{dx} &= \sin(x)^2 \cos(x) \\ 2e^y dy &= \sin(x)^2 \cos(x) dx \end{aligned}$$

Integrieren

$$2e^y = \frac{1}{3}\sin(x)^3 + C.$$

Lösen

$$y = \ln\left(\frac{1}{6}\sin(x)^3 + C\right).$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + (1+x^2)y = e^{-x^3/3}.$$

Die zugehörige homogene DGL hat die allgemeine Lösung

$$y = Ke^{-x-x^3/3}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Lösung von Aufgabe 3. Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{-x-x^3/3} \\ y' &= k'(x)e^{-x-x^3/3} - k(x)e^{-x-x^3/3}(1+x^2) \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-x-x^3/3} - k(x)e^{-x-x^3/3}(1+x^2) + (1+x^2)k(x)e^{-x-x^3/3} &= e^{-x^3/3} \\ k'(x)e^{-x-x^3/3} &= e^{-x^3/3} \\ k'(x)e^{-x} &= 1 \\ k'(x) &= e^x \\ k(x) &= e^x + C. \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} y &= (e^x + C)e^{-x-x^3/3} \\ &= e^{-x^3/3}(1 + Ce^{-x}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei

$$[S(f)](t) = 1 + f(t-1).$$

Ist S linear? Schreiben Sie zunächst sauber auf, was Sie zeigen müssen und begründen Sie dann Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 4. S ist nicht linear.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)](t) &= 1 + (f+g)(t-1) \\
&= 1 + f(t-1) + g(t-1) \\
[S(f)+S(g)](t) &= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\
&= 1 + f(t-1) + 1 + g(t-1) \\
&= 2 + f(t-1) + g(t-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Die 4-periodische Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-2)$$

falls $0 \leq t < 4$ und $f(t+4) = f(t)$ für alle t.

Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

Geben Sie dann z_0, z_1, z_2 und z_3 in kartesischen Koordinaten an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 (\delta(t-1) + 2\delta(t-2))e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 \delta(t-1)e^{-jk\omega t}dt + \frac{1}{2}\int_0^4 \delta(t-2)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 \delta(t-1)e^{-jk\omega}dt + \frac{1}{2}\int_0^4 \delta(t-2)e^{-2jk\omega}dt \\
&= \frac{1}{4}e^{-jk\omega}\int_0^4 \delta(t-1)dt + \frac{1}{2}e^{-2jk\omega}\int_0^4 \delta(t-2)dt \\
&= \frac{1}{4}e^{-2\pi jk/4} + \frac{1}{2}e^{-4\pi jk/4} \\
&= \frac{1}{4}e^{-jk\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-jk\pi} \\
&= \begin{cases} 3/4 & \text{falls } k = 4n \\ -1/2 - j/4 & \text{falls } k = 4n+1 \\ 1/4 & \text{falls } k = 4n+2 \\ -1/2 + j/4 & \text{falls } k = 4n+3 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(t) = f(t)\cos(t).$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(t)$ und von $g(t)$ und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 6. Fourier Transformierte von $f(t)$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{j\omega} 2j\sin(\omega) \\ &= \frac{2\sin(\omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

Mit dem Modulationssatz

$$f(t)\cos(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega-1) + F(\omega+1))$$

folgt

$$g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} + \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$$