Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 2

Studiengang:	ASE	Semester:	2
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{y}{x} + 1$$

für $x > 0$.

Lösung von Aufgabe 1. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung.

- Lösung der homogenen DGL

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Trennung der Variablen.

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx.$$

Integration.

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + C.$$

Nach y auflösen.

$$\begin{aligned} |y| &= e^{\ln(|x|)+C} \\ &= K|x|, \qquad K > 0 \\ &= Kx, \qquad \text{da } x > 0 \\ y &= \pm Kx \\ &= Kx, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= k(x)x \\ y'(x) &= k'(x)x + k(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} k'(x)x + k(x) &= k(x) + 1. \\ k'(x) &= 1/x \\ k(x) &= \ln(|x|) + C \\ &= \ln(x) + C, \qquad \text{da } x > 0. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = (\ln(x) + C)x.$$

Man hätte die DGL auch mit Subtitution lösen können.

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Damit wird aus der DGL

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + 1 \\ u'x + u &= u + 1 \\ u'x &= 1 \\ u' &= \frac{1}{x} \\ u &= \ln(x) + C, \qquad \text{da } x > 0. \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \ln(x) + C \\ y &= (\ln(x) + C)x. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \cos(x)y = 2\cos(x)$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 2. Lösung der homogenen DGL durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} y' + \cos(x)y &= 0 \\ y' &= -\cos(x)y \\ \frac{1}{y}dy &= -\cos(x)dx \\ \ln(|y|) &= -\sin(x) + C \\ |y| &= Ke^{-\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\ y &= Ke^{-\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{-\sin(x)} \\ y' &= k'(x)e^{-\sin(x)} - k(x)e^{-\sin(x)}\cos(x) \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-\sin(x)} - k(x)e^{-\sin(x)}\cos(x) + \cos(x)k(x)e^{-\sin(x)} &= 2\cos(x) \\ k'(x)e^{-\sin(x)} &= 2\cos(x) \\ k'(x) &= 2\cos(x)e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= \int 2\cos(x)e^{\sin(x)}dx \\ &= \int 2e^u du \\ &= 2e^u + C \\ &= 2e^{\sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y &= (2e^{\sin(x)} + C)e^{-\sin(x)} \\ &= Ce^{-\sin(x)} + 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (5 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y' = 2x.$$

Lösung von Aufgabe 3. Stammfunktion auf beiden Seiten.

$$y' + y = x^2 + K.$$

Lösung der homogenen DGL

$$y' + y = 0.$$

Ansatz

$$y = e^{\lambda x}.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda + 1 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda = -1.$$

Homogene Lösung

$$y_H = ce^{-x}.$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + y = x^2 + K.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y' &= 2ax + b. \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} 2ax + b + ax^2 + bx + c &= x^2 + K \\ ax^2 + (2a+b)x + b + c &= x^2 + K \end{aligned}$$

Lösen

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= K + 2 \\ &= \text{beliebig} \end{aligned}$$

Partikuläre inhomogene Lösung

$$y_P = x^2 - 2x + c.$$

Allgemeine inhomogene Lösung

$$y = C_1 e^{-x} + x^2 - 2x + C_2.$$

Aufgabe 4. (5 Punkte) Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion und $\omega = 2\pi/T$. Zeigen Sie, dass dann für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-jk\omega t}dt = \int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt.$$

Hinweis: Beginnen Sie auf der linken Seite mit der Substitution $u = t - nT$.

Lösung von Aufgabe 4. Mit der Substitution

$$u = t - nT, \quad t = u + nT, \quad dt = du$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-jk\omega t}dt &= \int_0^T f(u+nT)e^{-jk\omega(u+nT)}dt \\
&= \int_0^T f(u)e^{-jk\omega u}e^{-jk\omega nT}du \\
&= \int_0^T f(u)e^{-jk\omega u}\underbrace{e^{-jkn2\pi}}_{=1}du \\
&= \int_0^T f(u)e^{-jk\omega u}du \\
&= \int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (5 Punkte) Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \cos(2-t)\cos(2t)$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 5. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\cos(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1))$$

Da $\cos(2-t) = \cos(t-2)$ gilt mit dem Zeitverschiebungssatz

$$\begin{aligned}
f(t-\hat{t}) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}}F(\omega) \\
\cos(t-2) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-2j\omega}\pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)).
\end{aligned}$$

Mit dem Modulationssatz

$$f(t)\cos(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega-\hat{\omega})+F(\omega+\hat{\omega}))$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\cos(t-2)\cos(2t) \\
\circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{\pi}{2}\left(e^{-2j(\omega-2)}(\delta(\omega-3)+\delta(\omega-1))+e^{-2j(\omega+2)}(\delta(\omega+1)+\delta(\omega+3))\right) \\
= \quad & \frac{\pi e^{-2j\omega}}{2}\left(e^{4j}\delta(\omega-3)+e^{-4j}\delta(\omega+3)+e^{4j}\delta(\omega-1)+e^{-4j}\delta(\omega+1)\right)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ausblendeigenschaft lässt sich dies vereinfachen zu

$$\frac{\pi}{2}\left(e^{-2j}\delta(\omega-3)+e^{2j}\delta(\omega+3)+e^{2j}\delta(\omega-1)+e^{-2j}\delta(\omega+1)\right)$$

Aufgabe 6. (5 Punkte) Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = e^{-|t|}$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{1-j\omega}\left[e^{(1-j\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+j\omega}\left[e^{-(1+j\omega)t}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-j\omega}(1-0) - \frac{1}{1+j\omega}(0-1) \\
&= \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7. (5 Punkte) Sei

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sigma(t)e^{-t} \\
g(t) &= \cos(t).
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie $f * g$.

Lösung von Aufgabe 7.

- Lösen des Faltungsintegrals

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} \cos(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\left(e^{j(t-\tau)} + e^{-j(t-\tau)}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \left(e^{\tau(-1-j)+jt} + e^{\tau(-1+j)-jt}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-1-j} e^{\tau(-1-j)+jt} + \frac{1}{-1+j} e^{\tau(-1+j)-jt}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j}\right) \\
&= \frac{1}{4}(e^{jt}(1-j) + e^{-jt}(1+j)) \\
&= \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{4} - j\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{4} \\
&= \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{4} + \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{4j} \\
&= \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}.
\end{aligned}
$$

- Lösen mit Fourier Transformation. Für die Fourier Transformierten erhält man

$$\begin{aligned}\cos(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1))\\ \sigma(t)e^{-t} &\circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t)e^{-t}e^{-j\omega t}dt\\ &= \int_{0}^{\infty}e^{-t(1+j\omega)}dt\\ &= -\frac{1}{1+j\omega}\left[e^{-t(1+j\omega)}\right]_0^\infty\\ &= -\frac{1}{1+j\omega}(-1)\\ &= \frac{1}{1+j\omega}.\end{aligned}$$

Multiplikation im Frequenzbereich.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+j\omega}\pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)) &= \frac{\pi}{1+j\omega}\delta(\omega-1)+\frac{\pi}{1+j\omega}\delta(\omega+1)\\ &= \frac{\pi}{1+j}\delta(\omega-1)+\frac{\pi}{1-j}\delta(\omega+1).\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde die Ausblendeigenschaft verwendet. Zur Rücktransformation verwendet man die Korrespondenz

$$\begin{aligned}e^{j\hat{\omega}t} &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega-\hat{\omega}) \text{ bzw.}\\ \delta(\omega-1) &\bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2\pi}e^{jt}\\ \delta(\omega+1) &\bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2\pi}e^{-jt}.\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \frac{\pi}{1+j}\frac{1}{2\pi}e^{jt}+\frac{\pi}{1-j}\frac{1}{2\pi}e^{-jt}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1-j}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}\frac{1+j}{2}e^{-jt}\\ &= \frac{1}{4}((1-j)e^{jt}+(1+j)e^{-jt})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{re}((1-j)e^{jt})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{re}((1-j)(\cos(t)+j\sin(t)))\\ &= \frac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t))\end{aligned}$$