

Leistungsnachweis Mathematik 2

Studiengang: ASE/IIT	Semester: 2
Hilfsmittel: 5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Name:	Matrikelnr.:
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $a < b$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t-1)e^t \\ g(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Hinweis: Man kann viele Fallunterscheidungen vermeiden, wenn man Linearität und Zeitinvarianz der Faltung nutzt. Mit

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sigma(t)e^t \\ \hat{g}(t) &= \sigma(t) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= e\hat{f}(t-1) \\ g(t) &= \hat{g}(t-a) - \hat{g}(t-b). \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sigma(t)e^t \\ \hat{g}(t) &= \sigma(t) \end{aligned}$$

Da beide Funktionen kausal sind, gilt

$$(\hat{f} * \hat{g})(t) = \sigma(t) \int_0^t e^\tau d\tau = [e^\tau]_0^t = \sigma(t)(e^t - 1).$$

Da $f(t) = e\hat{f}(t-1)$ folgt mit Linearität und Zeitinvarianz

$$(f * \hat{g})(t) = e\sigma(t-1)(e^{t-1} - 1) = \sigma(t-1)(e^t - e).$$

Da

$$g(t) = \hat{g}(t-a) - \hat{g}(t-b)$$

folgt mit Linearität und Zeitinvarianz

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= (f * \hat{g}_a)(t) - (f * \hat{g}_b)(t) \\ &= \sigma(t-a-1)(e^{t-a} - e) - \sigma(t-b-1)(e^{t-b} - e) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < a+1 \\ e^{t-a} - e & \text{falls } t \geq a+1 \text{ und } t < b+1 \\ e^{t-a} - e^{t-b} & \text{falls } t \geq b+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann das Integral auch direkt lösen, was aber mühsamer ist:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_a^b \sigma(t-\tau-1)e^{t-\tau}d\tau. \end{aligned}$$

Eliminierung des σ -Terms im Integrand:

$$\begin{aligned} \sigma(t-\tau-1) &= 1 \\ t-\tau-1 &\geq 0 \\ \tau &\leq t-1. \end{aligned}$$

Damit kann die Obergrenze für τ auf das Minimum von b und $t-1$ abgesenkt werden und man erhält

$$\int_a^{\min(b, t-1)} \sigma(t-\tau-1)e^{t-\tau}d\tau.$$

Wenn $t-1 < a$ ist, d.h. die Obergrenze des Integrals kleiner als die Untergrenze, läuft man mit τ über Werte, die kleiner als $t-1$ sind und der Integrand ist Null. Falls $t-1 \geq a$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^{\min(b, t-1)} e^{t-\tau}d\tau &= -e^t [e^{-\tau}]_a^{\min(b, t-1)} \\ &= -e^t (e^{-\min(b, t-1)} - e^{-a}) \\ &= e^{t-a} - e^{t-\min(b, t-1)} \\ &= \begin{cases} e^{t-a} - e^{t-(t-1)} & \text{falls } t-1 < b \\ e^{t-a} - e^{t-b} & \text{falls } t-1 \geq b \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{t-a} - e & \text{falls } t < b+1 \\ e^{t-a} - e^{t-b} & \text{falls } t \geq b+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt hat man damit

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < a + 1 \\ e^{t-a} - e & \text{falls } t \geq a + 1 \text{ und } t < b + 1 \\ e^{t-a} - e^{t-b} & \text{falls } t \geq b + 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektorräume M_1 und M_2 sind definiert durch

$$\begin{aligned} M_1 &= \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4\} \\ M_2 &= \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie zu beiden Vektorräumen jeweils eine Basis.

Lösung von Aufgabe 2.

- M_1 ist die Menge aller Linearkombinationen der Spalten von A . Da die zweite und die vierte Spalte als Linearkombination der ersten und dritten Spalte dargestellt werden können, sind diese überflüssig, d.h.

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Eine Basis von M_1 ist somit

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da $M_1 = \mathbb{R}^2$, wäre auch die kanonische Basis eine Lösung:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- M_2 ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Damit sind x_2, x_4 beliebig und

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 \\ x_1 &= -x_2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine Basis ist daher

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung B der Umkehrfunktion f^{-1} von f .

Lösung von Aufgabe 3. Matrixdarstellung von f .

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung von f . Die Matrixdarstellung von f^{-1} ist somit A^{-1} .

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung von f^{-1} .

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ so dass

$$\vec{x} \vec{y}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 4.

$$\vec{x} \vec{y}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$y_1 \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_2 \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\vec{x} = \frac{1}{y_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$y_2 \frac{1}{y_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt $y_2/y_1 = 3$ bzw. $y_2 = 3y_1$ und

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für beliebiges $y_1 \neq 0$. Für $y_1 = 1$ erhält man z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(x).$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$e^x \cos(x) = e^x \operatorname{re}(e^{jx}) = \operatorname{re}(e^{(1+j)x}).$$

Lösen der komplexen DGL

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= e^{(1+j)x} \\ &= e^{\mu x} \end{aligned}$$

mit $\mu = 1 + j$.

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2$$

ausgewertet bei μ ergibt

$$\begin{aligned} \mu^2 - 2\mu + 2 &= (1+j)^2 - 2(1+j) + 2 \\ &= 1 + 2j - 1 - 2 - 2j + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ansatz im Resonanzfall:

$$\begin{aligned} y &= cxe^{\mu x} \\ y' &= c(e^{\mu x} + x\mu e^{\mu x}) = ce^{\mu x}(1 + \mu x) \\ y'' &= c(\mu e^{\mu x}(1 + \mu x) + e^{\mu x}\mu) = ce^{\mu x}(2\mu + \mu^2 x) \end{aligned}$$

Einsetzen in komplexe DGL.

$$\begin{aligned}
 ce^{\mu x}(2\mu + \mu^2 x - 2(1 + \mu x) + 2x) &= e^{\mu x} \\
 c \left(2\mu - 2 + x \underbrace{(\mu^2 - 2\mu + 2)}_{=0} \right) &= 1 \\
 2c(\mu - 1) &= 1 \\
 c &= \frac{1/2}{\mu - 1} = \frac{1/2}{j} = -\frac{j}{2}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen von c in den Ansatz liefert eine partikuläre Lösung der komplexen DGL.

$$y = -\frac{j}{2}xe^{(1+j)x}.$$

Der Realteil hiervon ist eine partikuläre Lösung der reellen DGL.

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{2}x \operatorname{re}(je^xe^{jx}) \\
 &= -\frac{1}{2}xe^x \operatorname{re}(j(\cos(x) + j \sin(x))) \\
 &= \frac{1}{2}xe^x \sin(x).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{x \sin(x)e^{-y}}{\sin(e^{y+1})}.$$

Lösung von Aufgabe 6. Die DGL ist separierbar.

$$e^y \sin(e^{y+1})dy = x \sin(x)dx.$$

Stammfunktion auf der linken Seite mit Substitution.

$$u = e^{y+1}, \quad \frac{du}{dy} = e^{y+1}, \quad dy = \frac{1}{e^{y+1}}du.$$

Damit ist eine Stammfunktion

$$\begin{aligned}
 \int e^y \sin(e^{y+1})dy &= \int e^y \sin(u) \frac{1}{e^{y+1}}du \\
 &= \int \frac{e^y}{e^y e} \sin(u)du \\
 &= \frac{1}{e} \int \sin(u)du \\
 &= -\frac{1}{e} \cos(u) \\
 &= -\frac{1}{e} \cos(e^{y+1}).
 \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion auf der rechten Seite mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int x \sin(x) dx &= -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= \sin(x) - x \cos(x).\end{aligned}$$

Damit hat man die Gleichung

$$\begin{aligned}-\frac{1}{e} \cos(e^{y+1}) &= \sin(x) - x \cos(x) + C \\ \cos(e^{y+1}) &= ex \cos(x) - e \sin(x) + C \\ e^{y+1} &= \pm \arccos(ex \cos(x) - e \sin(x) + C) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y + 1 &= \ln(\pm \arccos(ex \cos(x) - e \sin(x) + C) + 2k\pi) \\ y &= \ln(\pm \arccos(ex \cos(x) - e \sin(x) + C) + 2k\pi) - 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1/(t+1) & \text{falls } t \geq 1 \\ t & \text{falls } t < 1. \end{cases}$$

Finden Sie einen Funktionsterm für f ohne Fallunterscheidung, indem Sie Sprungfunktionen $\sigma(t)$ verwenden.

Berechnen Sie dann die verallgemeinerte Ableitung von f und vereinfachen Sie so weit wie möglich unter Anwendung der Ausblendeigenschaft und der verallgemeinerten Gleichheit von Funktionen.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}f(t) &= \sigma(t-1) \frac{1}{t+1} + (1 - \sigma(t-1))t \\ f'(t) &= \delta(t-1) \frac{1}{t+1} - \sigma(t-1) \frac{1}{(t+1)^2} - \delta(t-1)t + \underbrace{1 - \sigma(t-1)}_{=\sigma(1-t)} \\ &= \frac{1}{2} \delta(t-1) - \sigma(t-1) \frac{1}{(t+1)^2} - \delta(t-1) + \sigma(1-t) \\ &= -\frac{1}{2} \delta(t-1) - \sigma(t-1) \frac{1}{(t+1)^2} + \sigma(1-t).\end{aligned}$$

Die Gleichheit

$$1 - \sigma(t-1) = \sigma(1-t)$$

gilt nur im verallgemeinerten Sinn, da die Funktionen an der Stelle $t = 1$ ungleich sind.

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{1}{\cos(x)} y' + \frac{1}{\sin(x)} y = \sin(x)$$

für $0 < x < \pi/2$.

Lösung von Aufgabe 8. Es handelt sich um eine lineare DGL.

$$y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \sin(x) \cos(x).$$

Lösen der homogenen DGL.

$$\begin{aligned} y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y &= 0 \\ y' &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y \\ \frac{1}{y}dy &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion auf der rechten Seite erhält man mit Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)}du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx &= -\int \frac{\cos(x)}{u} \frac{1}{\cos(x)}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln|u| \\ &= -\ln|\sin(x)|. \end{aligned}$$

Da $0 < x < \pi/2$ ist

$$-\ln|\sin(x)| = -\ln(\sin(x)).$$

Gleichheit der Stammfunktionen ergibt

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\ln(\sin(x)) + C \\ |y| &= e^{-\ln(\sin(x)) + C} = K \frac{1}{e^{\ln(\sin(x))}} = K \frac{1}{\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\ y &= K \frac{1}{\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y &= k(x) \frac{1}{\sin(x)} \\ y' &= k'(x) \frac{1}{\sin(x)} + k(x)(-1) \frac{1}{\sin^2(x)} \cos(x) \\ &= k'(x) \frac{1}{\sin(x)} - k(x) \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} k'(x) \frac{1}{\sin(x)} - k(x) \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} k(x) \frac{1}{\sin(x)} &= \sin(x) \cos(x) \\ k'(x) \frac{1}{\sin(x)} &= \sin(x) \cos(x) \\ k'(x) &= \sin^2(x) \cos(x). \end{aligned}$$

Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \sin^2(x) \cos(x) dx \\ &= \int u^2 \cos(x) \frac{1}{\cos(x)} du \\ &= \int u^2 du \\ &= \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3(x) + C. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= k(x) \frac{1}{\sin(x)} \\ &= \left(\frac{1}{3} \sin^3(x) + C \right) \frac{1}{\sin(x)} \\ &= \frac{1}{3} \sin^2(x) + C \frac{1}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Für jede Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$f_\infty(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du.$$

die Fläche unter f zwischen $-\infty$ und t .

Zeigen Sie, dass für alle Funktionen $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f_\infty * g = f * g_\infty$$

sofern die Integrale existieren. Sie dürfen alle Eigenschaften der Faltung verwenden, die in der Vorlesung genannt wurden.

Lösung von Aufgabe 9. Unter Verwendung der Faltung gilt

$$f_\infty(t) = (\sigma * f)(t).$$

Damit gilt mit dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz der Faltung

$$\begin{aligned} f_\infty * g &= (\sigma * f) * g = \sigma * (f * g) = \sigma * (g * f) \\ &= (\sigma * g) * f = f * (\sigma * g) = f * g_\infty. \end{aligned}$$

Alternativ kann man die Aussage auch wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} (f_\infty * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\infty(t - \tau) g(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \left(\int_{u=-\infty}^{t-\tau} f(u) du \right) g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Damit man die Reihenfolge der Integrale vertauschen kann, substituiert man im inneren Integral

$$x = u + \tau, \quad \frac{dx}{du} = 1, \quad du = dx.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} (f_\infty * g)(t) &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^t f(x - \tau) dx \right) g(\tau) d\tau \\ &= \int_{x=-\infty}^t \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(x - \tau) g(\tau) d\tau dx \\ &= \int_{-\infty}^t (f * g)(x) dx \\ &= (f * g)_\infty. \end{aligned}$$

Durch Umbenennen von f und g erhält man in gleicher Weise

$$(g_\infty * f)(t) = (g * f)_\infty.$$

Mit dem Kommutativgesetz der Faltung gilt daher

$$(f_\infty * g) = (f * g)_\infty = (g * f)_\infty = g_\infty * f = f * g_\infty.$$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine singuläre Matrix. Beweisen Sie, dass dann auch AB und BA singulär sind.

Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Theoreme verwenden.

Lösung von Aufgabe 10.

- Zu zeigen: AB ist singulär.
Da B singulär ist, gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und

$$B\vec{x} = \vec{0}.$$

Folglich ist

$$(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}) = A\vec{0} = \vec{0}.$$

Damit hat das homogene LGS $AB\vec{x} = \vec{0}$ eine nichttriviale Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ und folglich ist die Matrix AB singulär.

- Zu zeigen: BA ist singulär.
Da B singulär ist, gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und

$$B\vec{x} = \vec{0}.$$

Wenn A singulär ist, ist auch BA singulär nach dem vorigen Beweis. Wenn A regulär ist, gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$A\vec{y} = \vec{x}.$$

Da $\vec{x} \neq \vec{0}$ folgt $\vec{y} \neq \vec{0}$. Damit ist

$$(BA)\vec{y} = B(A\vec{y}) = B\vec{x} = \vec{0}.$$

Folglich ist BA singulär.

Alternativ hätte man auch so vorgehen können: BA ist singulär genau dann wenn $(BA)^T$ singulär ist. Umformen ergibt

$$(BA)^T = A^T B^T.$$

Da B singulär ist, ist auch B^T singulär. Im ersten Teil wurde gezeigt, dass ein Produkt von Matrizen singulär ist, wenn der zweite Faktor singulär ist. Damit ist $A^T B^T$ singulär und folglich auch $(BA)^T$ bzw. BA .