

Mathematik 2

Skript zur Vorlesung an der Hochschule Heilbronn
(Stand: 11. März 2025)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1	Der rote Faden	4
1.1	Differentialgleichungen	5
1.2	Lineare zeitinvariante Systeme	6
1.3	Integraltransformationen	8
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	11
2.1	Einführendes Beispiel	11
2.2	Aufstellen einer Differentialgleichung	13
2.3	Gewöhnliche DGL in expliziter Darstellung	15
2.4	Lösen durch Integration	16
2.5	Separierbare DGL erster Ordnung - Trennung der Variablen	18
2.6	Lineare DGL erster Ordnung - Variation der Konstanten	28
2.7	Allgemeine DGL erster Ordnung, Eulerscher Polygonzug	32
2.8	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von DGL	34
2.9	Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	35
3	Faltung und Dirac Impuls	43
3.1	Anwendungen aus der Praxis	46
3.2	Faltung	55
3.3	Glättung durch Faltung	62
3.4	Dirac Impuls	68
3.5	Verallgemeinerte Ableitung	73
3.6	Ausblendeigenschaft	78
4	Lineare zeitinvariante Systeme	82
4.1	Beispiele für lineare zeitinvariante Systeme	86
4.2	Abschlusseigenschaften von linearen zeitinvarianten Systemen	98
4.3	Anwendungsbeispiel aus der Mechanik	101
4.4	Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems	103
5	Fourier Reihen	104
5.1	Harmonische Schwingungen	104
5.2	Aufgabenstellung	105
5.3	Berechnung der Fourier Koeffizienten	106
5.4	Vergleich mit Taylor Reihen	109
5.5	Fourier Reihe einer Rechteckschwingung	110
5.6	Fourier Reihe des Impulszugs	112
6	Fourier Transformation	113
6.1	Übergang von Fourier Reihen zur Fourier Transformation	113
6.2	Eigenschaften der Fourier Transformation	119
6.3	Fourier Transformierte spezieller Funktionen	127
6.4	Fourier Transformierte von periodischen Funktionen	132
6.5	Dualitätsprinzip der Fourier Transformation	134
6.6	Abtastung, Aliasing und Signalrekonstruktion	137
6.7	Fourier Transformierte der Gaußschen Glockenkurve	142

7	Laplace Transformation	144
7.1	Von der Fourier- zur Laplace Transformation	144
7.2	Laplace Transformation spezieller Funktionen	147
7.3	Eigenschaften der Laplace Transformation	152
7.4	Lösen von DGL mit Laplace Transformation	165
A	Anhang	169
A.1	Rechengesetze für Faltung und Dirac Impuls	169
A.2	Die wichtigsten Fourier Transformationspaare	170
A.3	Rechengesetze für die Fourier Transformation	171
A.4	Die wichtigsten Laplace Transformationspaare	173
A.5	Rechengesetze für die Laplace Transformation	174

1 Der rote Faden

In dieser Vorlesung werden wir uns mit Systemen beschäftigen, die ein Eingangssignal f in ein Ausgangssignal h transformieren.

- Ein solches System könnte z.B. eine elektrische Schaltung sein, wobei $f(t)$ die Eingangsspannung und $h(t)$ die Spannung am Kondensator ist.

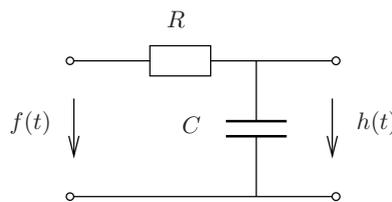


Abbildung 1.1: Elektrische Schaltung wobei $f(t)$ die Eingangsspannung und $h(t)$ die Spannung am Kondensator ist.

- Bei einem mechanischen System könnte $f(t)$ eine Kraft sein, die auf einen Wagen wirkt und $h(t)$ die Position des Wagens.

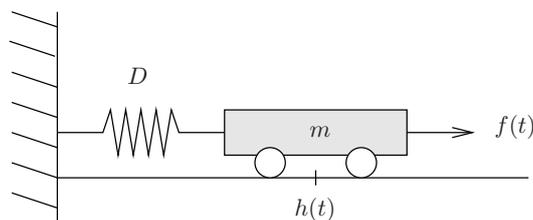


Abbildung 1.2: Feder-Masse System wobei $f(t)$ eine externe Kraft ist, die auf den Wagen wirkt und $h(t)$ seine Position.

Ein System S ist für uns daher eine Funktion, die eine Eingangsfunktion f auf eine Ausgangsfunktion h abbildet, d.h.

$$S(f) = h.$$

Die Sache wird dadurch kompliziert, dass man den Funktionswert von h zum Zeitpunkt t nicht allein aus dem Funktionswert von f zum Zeitpunkt t berechnen kann sondern hierfür in der Regel alle Funktionswerte von f zu früheren Zeitpunkten $\tau < t$ kennen muss: Die Position des Wagens zum Zeitpunkt t ist unabhängig von der Kraft, die zum Zeitpunkt t wirkt.

Es ist daher falsch, zu schreiben

$$S(f(t)) = h(t).$$

S nimmt als Argument eine Funktion f , nicht den Funktionswert $f(t)$ zum Zeitpunkt t . Korrekt wäre hingegen

$$[S(f)](t) = h(t)$$

für alle t .

- Die Spannung am Kondensator $h(t)$ zum Zeitpunkt t kann nicht allein aus der Eingangsspannung $f(t)$ zum Zeitpunkt t berechnet werden. Hierfür muss man wissen, wie viel Ladung zu *früheren* Zeitpunkten $\tau < t$ auf den Kondensator geflossen ist aufgrund der Eingangsspannung $f(\tau)$. Außerdem muss man die Anfangsladung des Kondensators kennen.
- Auch die Position des Wagens $h(t)$ zum Zeitpunkt t kann nicht allein aus der Kraft $f(t)$ zum Zeitpunkt t berechnet werden. Hierfür muss man wissen, welche Kraft $f(\tau)$ zu *früheren* Zeitpunkten $\tau < t$ auf den Wagen gewirkt hat und was die Position und Geschwindigkeit des Wagens am Anfang war.

1.1 Differentialgleichungen

Der Zusammenhang zwischen f und h ist in der Regel nicht ganz trivial und kann mathematisch durch eine Differentialgleichung beschrieben werden.

- In Bild 1.1 sei $q(t)$ die Ladung des Kondensators. Diese berechnet sich aus der Spannung $h(t)$ des Kondensators durch

$$q(t) = Ch(t).$$

Durch den Widerstand fließt der Strom

$$\begin{aligned} i(t) &= q'(t) \\ &= Ch'(t). \end{aligned}$$

Die Spannung am Widerstand ist damit

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ &= RCh'(t) \end{aligned}$$

Mit der Maschenregel erhält man

$$RCh'(t) + h(t) = f(t).$$

In dieser Gleichung ist f gegeben und h gesucht. Auflösen nach h ist schwierig, da sowohl h als auch h' in der Gleichung auftreten. Eine Gleichung dieser Art nennt man daher Differentialgleichung (DGL).

- In Bild 1.2 wirkt die Kraft $f(t)$ nach rechts. Andererseits wirkt aufgrund der Federung nach dem Hookeschen Gesetz die Kraft $Dh(t)$ nach links. Die Summe dieser beiden Kräfte bewirkt eine Beschleunigung des Wagens,

wobei die Beschleunigung gleich der zweiten Ableitung der Position h ist. Man erhält mit dem Trägheitsgesetz somit die Gleichung

$$f(t) - Dh(t) = mh''(t).$$

Bringt man wie im Beispiel der Elektrotechnik die Eingangskraft $f(t)$ auf eine Seite, erhält man die DGL

$$mh''(t) + Dh(t) = f(t).$$

Mit der Lösung von DGL werden wir uns in Kapitel 2 beschäftigen. Für die hier vorgestellten DGL gibt es aufgrund ihrer speziellen Struktur einfache Lösungsverfahren, die in Kapitel 2.9 vorgestellt werden. Wir müssen dabei allerdings voraussetzen, dass das Eingangssignal $f(t)$ eine einfache Funktion wie z.B. eine Schwingung oder ein Polynom ist.

Kompliziertere DGL erhält man, wenn die Komponenten wie z.B. der Widerstand zeitlich nicht konstant sind. Solche DGL werden in Kapitel 2.6 betrachtet, allerdings unter der Annahme, dass keine höheren Ableitungen auftreten.

Schwierig wird's auch, wenn die Funktion $h(t)$ in einer nichtlinearen Funktion auftritt wie z.B. $\sin(h(t))$. Ein Spezialfall, in dem auch solche DGL lösbar sind, wird in Kapitel 2.5 vorgestellt.

In anderen Fällen ist man auf numerische Näherungsverfahren wie z.B. dem Euler Verfahren angewiesen, siehe Kapitel 2.7.

1.2 Lineare zeitinvariante Systeme

Die beiden im vorigen Abschnitt behandelten Systeme S haben zwei Eigenschaften, die die Sache ganz entscheidend vereinfachen. Sie sind linear und zeitinvariant:

- Für beliebige Eingangssignale f_1, f_2 und ihre zugehörigen Ausgangssignale h_1, h_2 gilt

$$S(f_1 + f_2) = h_1 + h_2.$$

Hat man es also mit einer Überlagerung zweier Eingangssignale zu tun, werden die zugehörigen Ausgangssignale ebenfalls überlagert. Man kann die DGL somit für jedes Eingangssignal f_1 und f_2 separat lösen und muss nur noch die zugehörigen Ausgangssignale h_1 und h_2 addieren.

- Für beliebige Eingangssignale f , deren zugehörige Ausgangssignale h und Konstanten a gilt

$$S(af) = ah.$$

Verstärkt man das Eingangssignal, führt dies zu einer entsprechenden Verstärkung des Ausgangssignals.

- Mit $f_{\hat{t}}$ bezeichnen wir das Signal f um \hat{t} zeitlich verzögert, d.h.

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}).$$

Verzögert man das Eingangssignal, dann führt dies lediglich zu einer Verzögerung des Ausgangssignals, d.h.

$$S(f_{\hat{t}}) = h_{\hat{t}}.$$

Dies stimmt allerdings nur, wenn sich die Komponenten des Systems (Widerstand, Kondensator, Masse, Federkonstante) zeitlich nicht ändern, daher der Begriff Zeitinvarianz.

Das wichtigste Ergebnis von Kapitel 4 ist, dass für lineare, zeitinvariante Systeme S der Zusammenhang zwischen Eingang f und Ausgang h viel einfacher als durch eine DGL beschrieben werden kann. Es gibt zu jedem solchen System S eine Funktion g so dass

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

Diese Operation $*$ nennt man Faltung. Obwohl die Faltung zunächst schwierig aussieht, rechnet sich's damit leicht, da für die Faltung jede Menge Gesetze gelten, siehe Kapitel A.1. Aus dieser Beschreibung wird auch klar, dass der Funktionswert $h(t)$ zum Zeitpunkt t eben nicht nur vom Funktionswert $f(t)$ zum Zeitpunkt t abhängt sondern i.a. auch von Eingangswerten $f(\tau)$ zu allen Zeitpunkten τ . In praktischen Anwendungen sind v.a. solche Systeme interessant, wo sich diese Abhängigkeit auf die Vergangenheit beschränkt, d.h. $\tau < t$. Solche Systeme nennt man kausal. Außerdem wird häufig angenommen, dass das Eingangssignal f erst zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt, d.h. $f(\tau) = 0$ für $\tau < 0$. Der Zusammenhang vereinfacht sich dann zu

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Wie kann man nun zu einem gegebenen System S die Funktion g berechnen? Wir werden sehen, dass

$$g = S(\delta)$$

wobei δ der sog. Dirac Impuls ist. Man kann sich den Dirac Impuls vorstellen als Funktion, die überall Null ist, nur an der Stelle $t = 0$ unendlich. Die Funktion g heißt daher Impulsantwort des Systems S . Mit dem Dirac Impuls kann man viele Dinge stark vereinfachen, insbesondere da im Zusammenhang mit der Faltung viele Gesetze gelten wie z.B.

$$f * \delta = f.$$

Der Dirac Impuls ist für die Faltung das, was die Eins für die Multiplikation oder die Null für die Addition ist. Praktische Anwendung findet der Dirac Impuls z.B. in der Physik, wo man gerne mit Punktmassen arbeitet: deren Massendichte ist ein Dirac Impuls.

1.3 Integraltransformationen

Die Berechnung der Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems und das Lösen von DGL ist oft mühsam. Neben vielen anderen Anwendungen ist die Laplace Transformation ein Werkzeug, das dieses Problem erheblich vereinfacht. Die Idee hierzu ist wie folgt.

Fourier Reihe. Zunächst werden wir in Kapitel 5 zeigen, dass man jede T -periodische Funktion $f(t)$ in eine Summe aus komplexen Schwingungen $e^{jk\omega t}$ zerlegen kann, wobei $\omega = 2\pi/T$ und $k \in \mathbb{Z}$.

$$f(t) = \sum_k z_k e^{jk\omega t}.$$

Dies ist ganz ähnlich wie die Darstellung von $f(t)$ als Taylor Reihe, wobei die Summanden nun eben Schwingungen mit Kreisfrequenz $k\omega$ sind. Die Koeffizienten z_k heißen Fourier Koeffizienten und können berechnet werden durch

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Fourier Transformation. Interessanterweise klappt diese Zerlegung in Schwingungen auch für nichtperiodische Funktionen $f(t)$, wobei statt der Summe nun ein Integral auftritt und statt Fourier Koeffizienten z_k eine Funktion $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Die Funktion $F(\omega)$ heißt Fourier Transformierte von $f(t)$ und kann durch

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

berechnet werden. Man schreibt

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega).$$

Auf diese Weise hat man zwei äquivalente Darstellungen eines Signals: im Zeitbereich $f(t)$ und im Frequenzbereich $F(\omega)$. Viele Dinge vereinfachen sich erheblich, wenn man in den Frequenzbereich wechselt.

- Eine frequenzselektive Filterung wie z.B. ein Tiefpass ist im Frequenzbereich natürlich trivial. Aus diesem Grund ist die Fourier Transformation ein unverzichtbares Werkzeug in der digitalen Signalverarbeitung.
- Aus dem o.g. Dirac Impuls $\delta(t)$ wird im im Frequenzbereich die einfache konstante Eins Funktion:

$$\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1.$$

- Aus der für uns wichtigen, aber auch komplizierten Faltung wird eine einfache Multiplikation:

$$(f * g)(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega)G(\omega).$$

Laplace Transformation. Dummerweise erfordert die Berechnung von $F(\omega)$ ein uneigentliches Integral und die dabei auftretenden Grenzwerte existieren häufig nicht. Dieses Problem wird mit der Laplace Transformation behoben. Die Laplace Transformierte ist definiert durch

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Für den Spezialfall $s = j\omega$ steht auf der rechten Seite die Fourier Transformierte. Man kann also die Laplace Transformation als Verallgemeinerung der Fourier Transformation verstehen. Für die Laplace Transformation gelten die entsprechenden Gesetze wie für die Fourier Transformation, insbesondere auch der Faltungssatz. Für DGL ist folgender Zusammenhang relevant:

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s).$$

Aus der Ableitung im Zeitbereich, die DGL so schwierig macht, wird also eine einfache Multiplikation mit s im Bildbereich.

Schauen wir uns mit diesen Werkzeugen ausgerüstet nochmal die Beispiele vom Anfang des Kapitels an.

- Für das RC-Glied in Bild 1.1 haben wir die DGL

$$RC h'(t) + h(t) = f(t)$$

hergeleitet. Sei $H(s)$ die Laplace Transformierte von $h(t)$. Dann gilt

$$h'(t) \circ\text{---}\bullet sH(s).$$

Im Bildbereich erhält man damit die Gleichung

$$\begin{aligned} RCsH(s) + H(s) &= F(s) \\ H(s)(RCs + 1) &= F(s) \\ H(s) &= F(s) \frac{1}{RCs + 1}. \end{aligned}$$

Man kann die DGL im Bildbereich also sehr einfach lösen und muss $H(s)$ dann nur noch in den Zeitbereich zurücktransformieren. Mit der Impulsantwort g des Systems gilt andererseits im Zeitbereich

$$h(t) = (f * g)(t).$$

Mit dem Faltungssatz gilt daher

$$H(s) = F(s)G(s)$$

und somit

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Diese Funktion $G(s)$ heißt Übertragungsfunktion des Systems. Die Impulsantwort kann durch inverse Laplace Transformation der Übertragungsfunktion berechnet werden:

$$g(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{RCs + 1}.$$

- Für das mechanische System in Bild 1.2 haben wir die DGL

$$mh''(t) + Dh(t) = f(t).$$

aufgestellt. Sei $H(s)$ die Laplace Transformierte von $h(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(t) &\circ\text{---}\bullet sH(s) \\ h''(t) &\circ\text{---}\bullet s^2H(s). \end{aligned}$$

Im Bildbereich erhält man damit die Gleichung

$$\begin{aligned} ms^2H(s) + DH(s) &= F(s) \\ H(s)(ms^2 + D) &= F(s) \\ H(s) &= F(s) \frac{1}{ms^2 + D}. \end{aligned}$$

Wie im vorigen Beispiel kann man nun die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + D}$$

ablesen. Das Ausgangssignal $h(t)$ und die Impulsantwort $g(t)$ erhält man durch inverse Laplace Transformation.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Einführendes Beispiel

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel einer Differentialgleichung (DGL):

$$y'(x) = 3y(x).$$

Die Gleichung unterscheidet sich von den bisher behandelten Gleichungen dadurch, dass eine unbekannte Funktion y und ihre Ableitung y' auftritt. Eine Lösung der DGL ist daher nicht eine Zahl x sondern eine Funktion $y(x)$ so dass

$$y'(x) = 3y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Eine Differentialgleichung ist somit nicht eine Gleichung von Zahlen sondern eine Gleichung von Funktionen und es wäre unmissverständlicher, das “von x ” wegzulassen:

$$y' = 3y, \quad y \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Da das unüblich ist, formulieren wir das Problem wie folgt:

Gesucht ist eine Funktion $y \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$y'(x) = 3y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} .$$

Entsprechend ist die Lösungsmenge der DGL eine Menge von Funktionen

$$\mathbb{L} = \{y \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y'(x) = 3y(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \}.$$

Für die meisten Differentialgleichungen sind die Lösungsfunktionen nicht durch elementare Terme darstellbar. Man sagt dann, dass die DGL nicht “geschlossen lösbar” ist. Das ist das selbe Dilemma wie bei der Integralrechnung, wo z.B. die Funktion $e^{(x^2)}$ zwar durchaus eine Stammfunktion hat, diese aber nicht durch einen elementaren Term beschrieben werden kann.

In diesem Kapitel werden wir aber einige Typen von Differentialgleichungen kennen lernen, die geschlossen lösbar sind und es werden Verfahren vorgestellt um die Lösungsmenge zu berechnen. Glücklicherweise sind es genau diese einfachen Typen von Differentialgleichungen, die in der Praxis häufig auftreten.

Für das o.g. Beispiel ist die Lösungsmenge übrigens sehr einfach: Die Ableitung von y muss proportional zu y sein und wir wissen, dass dies für die e -Funktion der Fall ist. Mit etwas Probieren erhält man somit

$$\mathbb{L} = \{y \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = ce^{3x}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Wie man diese Lösungsmenge systematisch berechnet, wird später gezeigt. Wir können aber bereits jetzt durch Einsetzen verifizieren, dass

$$y(x) = ce^{3x}$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Lösungsfunktion der DGL ist. Setzt man y auf der linken Seite der Gleichung

$$y'(x) = 3y(x)$$

ein, erhält man

$$\begin{aligned} y'(x) &= (ce^{3x})' \\ &= 3ce^{3x}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite erhält man

$$3y(x) = 3ce^{3x}$$

und in der Tat steht somit auf beiden Seiten die gleiche Funktion.

2.2 Aufstellen einer Differentialgleichung

In den beiden Beispielen aus der Elektrotechnik und der Mechanik aus Kapitel 1 war bereits bekannt, dass bestimmte physikalische Größen durch Ableitungen voneinander abhängen, z.B.

$$\begin{aligned}i(t) &= q'(t) \\v(t) &= s'(t) \\a(t) &= s''(t).\end{aligned}$$

In diesem Kapitel soll nun ein einfaches Beispiel vorgestellt werden, bei dem solche Zusammenhänge zunächst gar nicht gegeben sind.

Die Aufgabe besteht darin, in einer Bakterienkultur die Anzahl $y(t)$ von Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t zu berechnen. Hierzu wird zunächst qualitativ überlegt, wie viele Bakterien im Zeitintervall zwischen t und $t + \Delta t$ neu hinzukommen.

Die Anzahl neuer Bakterien

$$y(t + \Delta t) - y(t)$$

ist näherungsweise proportional

- zur Anzahl der anfangs vorhandenen Bakterien $y(t)$ und
- zur Länge Δt des Beobachtungszeitraums.

Die erste Annahme gilt nur wenn unbegrenzt Raum und Nahrung zur Verfügung steht. Die zweite Annahme gilt nur wenn man voraussetzt, dass sich die neu hinzugekommenen Bakterien nicht vermehren. Wenn aber Δt sehr klein ist, kommen so wenige Bakterien hinzu, dass die Anzahl deren Kinder vernachlässigbar ist. Solche vereinfachende Annahmen führen zu einem mathematischen Modell. Es gilt dann

$$y(t + \Delta t) - y(t) = ay(t)\Delta t$$

für eine Konstante a bzw.

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = ay(t).$$

Da das ganze sowieso nur für sehr kleine Δt stimmt, führen wir den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durch und erhalten

$$y'(t) = ay(t).$$

Diese DGL hat die gleiche Struktur wie die DGL in Kapitel 2.1 und damit ist die Lösung

$$y(t) = ce^{at}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Die Bakterien vermehren sich also wie erwartet exponentiell.

Ist die Anzahl Bakterien $y(0)$ zum Startzeitpunkt $t = 0$ bekannt, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt. Da

$$y(0) = ce^{a \cdot 0} = c$$

ist die Lösung

$$y(t) = y(0)e^{at}.$$

Die Proportionalitätskonstante a kann nun experimentell bestimmt werden.

2.3 Gewöhnliche DGL in expliziter Darstellung

Um die Notation zu vereinheitlichen, werden wir die gesuchte Funktion in DGL immer mit $y(x)$ bezeichnen. Häufig lässt man das Funktionsargument weg und schreibt y statt $y(x)$.

Definition 2.1 (Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung.)

Eine Gleichung, in der eine Variable x und eine einstellige Funktion $y(x)$ mit ihren ersten n Ableitungen $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ vorkommen können, heißt gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung.

Die DGL hat explizite Form wenn die höchste Ableitung $y^{(n)}(x)$ allein auf einer Seite steht, d.h.

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

wobei f ein beliebiger Term ist.

Eine n mal differenzierbare Funktion $y \in \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der DGL auf der Menge \mathbb{D} , wenn sie die DGL für alle $x \in \mathbb{D}$ erfüllt.

Hierzu ein paar Beispiele.

$y' = 2x$	DGL 1. Ordnung, explizite Form, y kommt nicht vor.
$y' = y$	DGL 1. Ordnung, explizite Form, x kommt nicht vor.
$y' = xy$	DGL 1. Ordnung, explizite Form.
$\sin(xy') = y$	DGL 1. Ordnung, implizite Form.
$y'' = \sin(x)$	DGL 2. Ordnung, explizite Form ohne y und y' .
$y'' = \sin(y)$	DGL 2. Ordnung, explizite Form ohne x und y' .
$y'' + 2y' + y = \sin(x)$	DGL 2. Ordnung

Im allgemeinen hat eine DGL unendlich viele Lösungsfunktionen. Die Menge aller Lösungsfunktionen heißt allgemeine Lösung. Jedes Element der allgemeinen Lösung heißt partikuläre Lösung.

2.4 Lösen durch Integration

Viele DGL kann man durch einfaches Integrieren lösen. Zwei Funktionen sind gleich genau dann wenn sich ihre Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden. Sind also $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen und ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann gilt

$$f(x) = g(x)$$

genau dann wenn es eine Konstante C gibt mit

$$F(x) = G(x) + C.$$

Man kann eine Gleichung also äquivalent umformen, indem man auf beiden Seiten zu einer Stammfunktion übergeht. Wichtig dabei ist, dass man die Integrationskonstante nicht vergisst!

Beispiel. Sei

$$y'(x) = 2x.$$

Auf beiden Seiten eine Stammfunktion berechnen.

- Eine Stammfunktion von $y'(x)$ ist $y(x)$.
- Eine Stammfunktion von $2x$ ist x^2 .

Eine Funktion $y(x)$ ist somit Lösung der DGL genau dann wenn es eine Konstante C gibt so dass für alle x gilt

$$y(x) = x^2 + C.$$

Beispiele für Lösungsfunktionen sind somit

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^2 + 5 \\ y_2(x) &= x^2 - 17 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel. Sei

$$y''(x) = \cos(x).$$

Auf beiden Seiten eine Stammfunktion berechnen.

- Eine Stammfunktion von $y''(x)$ ist $y'(x)$.
- Eine Stammfunktion von $\cos(x)$ ist $\sin(x)$.

Eine Funktion $y(x)$ ist somit Lösung der DGL genau dann wenn es eine Konstante C gibt so dass für alle x gilt

$$y'(x) = \sin(x) + C.$$

Und nochmal auf beiden Seiten zur Stammfunktion übergehen.

- Eine Stammfunktion von $y'(x)$ ist $y(x)$.
- Eine Stammfunktion von $\sin(x) + C$ ist $-\cos(x) + Cx$.

Eine Funktion $y(x)$ ist somit Lösung der DGL genau dann wenn es Konstanten C und D gibt so dass für alle x gilt

$$y(x) = -\cos(x) + Cx + D.$$

Beispiele für Lösungsfunktionen sind somit

$$\begin{aligned}y_1(x) &= -\cos(x) + 4x - 5 \\y_2(x) &= -\cos(x) + 13 \\&\vdots\end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel. Gesucht ist der von einem frei fallenden Massestück m zurückgelegte Weg $s(t)$. Das Massestück wird mit der Gravitationskonstante g beschleunigt, d.h. es gilt

$$s''(t) = g.$$

Integrieren liefert

$$\begin{aligned}s'(t) &= gt + C \\s(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + Ct + D.\end{aligned}$$

Damit die Lösung eindeutig wird, sei $s(0) = s_0$ und $v(0) = v_0$ gegeben. Setzt man in die o.g. Gleichungen $t = 0$ ein, erhält man

$$\begin{aligned}s'(0) &= C = v_0 \\s(0) &= D = s_0.\end{aligned}$$

Die Lösung mit gegeben Startwerten ist damit

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

2.5 Separierbare DGL erster Ordnung - Trennung der Variablen

Herleitung. Könnte man sich wünschen, wie DGL aussehen sollen damit sie besonders leicht lösbar sind, würde man z.B. die Form

$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$

vorschlagen, wobei f und g beliebige Funktionen sind. Die linke Seite sieht sehr nach Kettenregel aus. Ist F Stammfunktion von f , gilt

$$[F(y(x))]’ = f(y(x))y'(x).$$

Eine Stammfunktion der linken Seite der DGL ist somit $F(y(x))$. Ist G eine Stammfunktion der rechten Seite g , dann wird aus der ursprünglichen DGL durch Integrieren beider Seiten

$$F(y(x)) = G(x) + C.$$

Hier treten keine Ableitungen mehr auf, d.h. man muss die Gleichung nur noch nach $y(x)$ auflösen.

Beispiel 2.2 Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ erhält man die DGL

$$\sin(y(x))y'(x) = x^2.$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int \sin(y(x))y'(x)dx = \frac{1}{3}x^3.$$

Da der Integrand auf der linken Seite die Form $f(y(x))y'(x)$ hat, kann man eine Stammfunktion durch Umkehrung der Kettenregel berechnen. In der Praxis macht man das durch Substitution:

$$u = y(x), \quad \frac{du}{dx} = y'(x), \quad dx = \frac{1}{y'(x)}du$$

$$\begin{aligned} \int \sin(y(x))y'(x)dx &= \int \sin(u)y'(x)\frac{1}{y'(x)}du \\ &= \int \sin(u)du \\ &= -\cos(u) \\ &= -\cos(y(x)). \end{aligned}$$

Damit erhält man die Gleichung

$$-\cos(y(x)) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

die man nun nur noch nach $y(x)$ auflösen muss.□.

Trennung der Variablen. Um den oben beschriebenen Rechenweg abzukürzen, gibt es folgende Vorgehensweise, bei der man jedoch prinzipiell exakt die gleichen Schritte durchführt. Ausgehend von der DGL

$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$

ersetzt man die Ableitung $y'(x)$ durch den Differentialquotienten dy/dx und $y(x)$ durch y . Nach Multiplikation mit dx erhält man

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

In dieser Form tritt links kein x und rechts kein y auf. Man nennt diesen Typ von DGL daher *separierbare DGL*. Man integriert nun die linke Seite "nach y " und die rechte nach x und erhält wie oben

$$F(y) = G(x) + C.$$

Jetzt muss nur noch nach y aufgelöst werden.

Beispiel 2.3 In o.g. Beispiel sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \sin(y(x))y'(x) &= x^2 \\ \sin(y)y' &= x^2 \\ \sin(y)\frac{dy}{dx} &= x^2 \\ \sin(y)dy &= x^2dx \\ -\cos(y) &= \frac{1}{3}x^3 + C. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde auf beiden Seiten die Stammfunktion berechnet. Die Integration nach y auf der linken Seite entspricht der oben durchgeführten Integration durch Substitution. \square

Rezept zur Lösung von separierbaren DGL erster Ordnung.

- Ersetze $y(x)$ durch y und $y'(x)$ durch dy/dx .
- Forme die DGL um so dass links kein x und rechts kein y vorkommt, d.h. die Form

$$f(y)dy = g(x)dx$$

hat. Dies ist nicht immer möglich und kennzeichnet die Klasse der separierbaren DGL.

- Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x . Integrationskonstante nicht vergessen!
- Löse die entstehende Gleichung nach y auf.

Beispiel ohne Rezept.

$$y'(x) = 2xy^2(x)$$

- Umformen

$$\frac{1}{y^2(x)}y'(x) = 2x$$

- Stammfunktion auf beiden Seiten. Linke Seite mit Substitution

$$u = y(x), \quad \frac{du}{dx} = y'(x), \quad dx = \frac{1}{y'(x)}du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2(x)}y'(x)dx &= \int \frac{1}{u^2}y'(x)\frac{1}{y'(x)}du \\ &= \int \frac{1}{u^2}du \\ &= -\frac{1}{u} = -\frac{1}{y(x)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Gleichung

$$-\frac{1}{y(x)} = x^2 + C \text{ für beliebiges } C$$

- Lösen der Gleichung

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$$

Gleiches Beispiel mit Rezept.

$$y'(x) = 2xy^2(x)$$

- Differentialnotation:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

- Trennung der Variablen

$$\frac{1}{y^2}dy = 2xdx$$

- Integration

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C \text{ für beliebiges } C$$

- Lösung

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

Ob eine DGL separierbar ist oder nicht, lässt sich einfach erkennen, wenn sie explizite Form hat.

Definition 2.4 (Separierbare DGL.)

Eine DGL heißt separierbar, wenn sie auf die Form

$$y' = u(y)v(x)$$

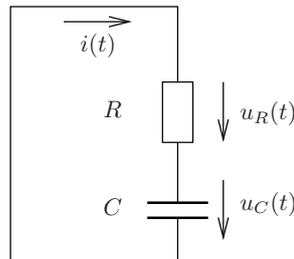
gebracht werden kann. Hierbei ist $u(y)$ ein Term, in dem nur y auftritt und $v(x)$ ein Term, in dem nur x auftritt.

Ausgehend von dieser Form kann die Trennung der Variablen leicht durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}y' &= u(y)v(x) \\ \frac{1}{u(y)}y' &= v(x) \\ \frac{1}{u(y)}dy &= v(x)dx.\end{aligned}$$

Anwendungsbeispiele.

Beispiel 2.5 Ein einfaches Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik ist die Entladung eines Kondensators mit Kapazität C über einen Ohmschen Widerstand R . Gesucht ist die Ladung $q(t)$ des Kondensators.



Für die Spannung am Kondensator gilt

$$u_C(t) = \frac{1}{C}q(t).$$

Da die Stromstärke $i(t)$ gleich der Ladungsänderung des Kondensators ist, gilt

$$i(t) = q'(t).$$

Damit ist die Spannung am Widerstand

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ &= Rq'(t). \end{aligned}$$

Aufgrund der Maschenregel gilt

$$\begin{aligned} u_C(t) + u_R(t) &= 0 \\ \frac{1}{C}q(t) + Rq'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine DGL mit unbekannter Funktion $q(t)$. In expliziter Form erhält man

$$q'(t) = -\frac{1}{RC}q(t).$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(t)}q'(t) &= -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{q}dq &= -\frac{1}{RC}dt. \end{aligned}$$

Integration.

$$\begin{aligned}\ln(|q|) &= -\frac{1}{RC}t + A \quad \text{wobei } A \text{ eine beliebige Konstante ist} \\ |q| &= e^{-t/(RC)}e^A \\ &= Ke^{-t/(RC)} \quad \text{mit } K = e^A \in \mathbb{R}^+ \\ q &= \pm Ke^{-t/(RC)} \\ &= Ke^{-t/(RC)} \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ist die Anfangsladung $q(0) = q_0$ gegeben, erhält man aus der allgemeinen Lösung für den Spezialfall $t = 0$

$$\begin{aligned}q_0 &= q(0) \\ &= Ke^{-0/(RC)} \\ &= K\end{aligned}$$

und damit

$$q(t) = q_0 e^{-t/(RC)}. \square$$

Beispiel 2.6 Dieses Beispiel ist etwas länglich, zeigt aber dass separierbare DGL in der Praxis durchaus vorkommen.

Gesucht ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines aus der Ruhelage fallenden Gegenstands mit Masse m . Auf den Gegenstand wirkt die Gravitationskraft mg sowie die Luftreibungskraft $rv(t)^2$, wobei r eine Konstante ist. Mit

$$\begin{aligned}F_g &= mg \\ F_r &= -rv(t)^2\end{aligned}$$

gilt nach dem Trägheitsgesetz und $a(t) = v'(t)$

$$\begin{aligned}F_r + F_g &= ma(t) \\ -rv(t)^2 + mg &= mv'(t) \\ mv'(t) + rv(t)^2 &= mg \\ v'(t) + \frac{r}{m}v(t)^2 &= g \\ v'(t) &= g - \frac{r}{m}v(t)^2.\end{aligned}$$

Beginnend aus der Ruhelage nimmt die Geschwindigkeit zu. Sie wächst aber aufgrund von der Luftreibung nicht beliebig. Wenn $v(t)$ so groß ist, dass die rechte Seite Null ist, dann ist auch $v'(t) = 0$ und die Geschwindigkeit bleibt konstant. Diese Grenzgeschwindigkeit erhält man aus

$$\begin{aligned}0 &= g - \frac{r}{m}v(t)^2 \\ v(t)^2 &= \frac{mg}{r} \\ v(t) &= \sqrt{\frac{mg}{r}} = \alpha.\end{aligned}$$

Mit der üblichen Notation $y(x)$ für die gesuchte Funktion statt $v(t)$ erhält man die DGL

$$y' = g - \frac{r}{m}y^2.$$

Diese DGL ist separierbar. (Die Funktion von x auf der rechten Seite ist die Konstante Eins.) Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{g - \frac{r}{m}y^2} dy &= dx \\ -\frac{m}{r} \frac{1}{y^2 - \frac{mg}{r}} dy &= dx \\ \frac{1}{y^2 - \alpha^2} dy &= -\frac{r}{m} dx \end{aligned}$$

Die linke Seite wird mit Partialbruchzerlegung integriert. Faktorisierung des Nennerpolynoms.

$$y^2 - \alpha^2 = (y - \alpha)(y + \alpha).$$

Ansatz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - \alpha^2} &= \frac{c_1}{y - \alpha} + \frac{c_2}{y + \alpha} \\ 1 &= c_1(y + \alpha) + c_2(y - \alpha) \end{aligned}$$

Spezialfälle $y = \alpha$ und $y = -\alpha$.

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_1\alpha & c_1 &= \frac{1}{2\alpha} \\ 1 &= -2c_2\alpha & c_2 &= -\frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - \alpha^2} &= \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{y - \alpha} - \frac{1}{y + \alpha} \right) \\ \int \frac{1}{y^2 - \alpha^2} dy &= \frac{1}{2\alpha} (\ln|y - \alpha| - \ln|y + \alpha|). \end{aligned}$$

Da $0 \leq y < \alpha$ ist

$$\begin{aligned} |y - \alpha| &= \alpha - y \\ |y + \alpha| &= \alpha + y \end{aligned}$$

Rechte Seite nach x integrieren ergibt

$$\int -\frac{r}{m} dx = -\frac{rx}{m}.$$

Gleichheit der Stammfunktionen bis auf eine Konstante C ist somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} (\ln(\alpha - y) - \ln(\alpha + y)) &= -\frac{rx}{m} + C \\ \frac{1}{2\alpha} (\ln(\alpha + y) - \ln(\alpha - y)) &= \frac{rx}{m} + C \\ \ln(\alpha + y) - \ln(\alpha - y) &= \frac{2\alpha rx}{m} + C \\ &= 2\beta x + C \\ \ln\left(\frac{\alpha + y}{\alpha - y}\right) &= 2\beta x + C \\ \frac{\alpha + y}{\alpha - y} &= e^{2\beta x + C} \\ \alpha + y &= (\alpha - y)e^{2\beta x + C} \\ y(e^{2\beta x + C} + 1) &= \alpha(e^{2\beta x + C} - 1) \\ y &= \alpha \frac{e^{2\beta x + C} - 1}{e^{2\beta x + C} + 1} \end{aligned}$$

wobei

$$\beta = \frac{r}{m}\alpha = \frac{g}{\alpha}.$$

Da der Gegenstand aus der Ruhelage fällt, ist $y(0) = 0$. Für $x = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \frac{e^C - 1}{e^C + 1} \\ C &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$y = \alpha \frac{e^{2\beta x} - 1}{e^{2\beta x} + 1} = \alpha \tanh(\beta x).$$

Mit der ursprünglichen Notation ist somit

$$v(t) = \alpha \tanh(\beta t). \square$$

Erweiterungen. Für eine beliebige Funktion f ist die DGL

$$y' = f(ax + by + c)$$

zunächst nicht separierbar, da sich die rechte Seite nicht als Produkt einer Funktion von y und einer Funktion von x darstellen lässt. Mit

$$u = ax + by + c, \quad u' = a + by', \quad y' = \frac{u' - a}{b}$$

wird aus der gegebenen DGL

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

bzw.

$$u' = bf(u) + a.$$

Diese DGL ist separierbar, da auf der rechten Seite x gar nicht auftritt und somit die rechte Seite trivialerweise Produkt einer Funktion von u und einer Funktion von x ist: Die Funktion von x ist die konstante Eins Funktion. Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{bf(u) + a} u' &= 1 \\ \frac{1}{bf(u) + a} du &= dx. \end{aligned}$$

Durch Integration auf beiden Seiten und Auflösen erhält man die allgemeine Lösung $u(x)$, aus der man dann $y(x)$ durch Rücksubstitution bestimmen kann:

$$y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b}.$$

Analog lässt sich auch eine DGL der Form

$$y' = f(y/x)$$

durch Substitution $u = y/x$ lösen.

Beispiel 2.7 Folgendes Beispiel werden wir im nächsten Abschnitt benötigen, wobei $g(x)$ eine beliebige Funktion ist.

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

- Explizite Form.

$$y' = -g(x)y$$

- Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}y' &= -g(x) \\ \frac{1}{y}dy &= -g(x)dx \end{aligned}$$

- Integration, G sei eine Stammfunktion von g .

$$\ln(|y|) = -G(x) + C$$

- Lösung

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-G(x)+C} \\ &= e^C e^{-G(x)} \\ y &= \pm e^C e^{-G(x)} \\ &= K e^{-G(x)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Konstante $\pm e^C$ durch K abgekürzt. Da man für C jeden beliebigen Wert einsetzen darf, kann auch $K = \pm e^C$ jeden beliebigen Wert annehmen und man erhält immer eine Lösungsfunktion. Es gibt jedoch eine Ausnahme, da $\pm e^C$ nie Null ist. Trotzdem erhält man auch für $K = 0$ eine Lösungsfunktion: In diesem Fall ist $y = 0$ die konstante Nullfunktion und durch Einsetzen in die DGL sieht man, dass auch dies eine Lösung ist. Genau genommen hätte man schon bei der Trennung der Variablen eine Fallunterscheidung machen müssen, ob $y = 0$ ist.

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y = K e^{-G(x)} \text{ mit } K \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Die Lösungsfunktionen y sind somit alle skalare Vielfache der Funktion $e^{-G(x)}$. Die Lösungsmenge ist damit abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Interpretiert man die Funktion $e^{-G(x)}$ als Vektor, entspricht die Lösungsmenge einer Ursprungsgeraden mit Richtungsvektor $e^{-G(x)}$. Die Lösungsmenge ist damit ein eindimensionaler Vektorraum. Per Analogie kann man damit alles, was man über Spannräume weiß, auf die Lösungsmenge lineare DGL übertragen, die in den nächsten Kapiteln vorgestellt werden. \square

2.6 Lineare DGL erster Ordnung - Variation der Konstanten

Neben den separierbaren DGL erster Ordnung gibt es noch eine weitere Klasse von DGL erster Ordnung, die nach Rezept geschlossen lösbar sind.

Definition 2.8 (Lineare DGL erster Ordnung.)

Eine DGL heißt lineare DGL erster Ordnung wenn sie auf die Form

$$y'(x) + g(x)y(x) = r(x)$$

gebracht werden kann, wobei $g(x)$ und $r(x)$ Terme sind, in denen y nicht auftritt.

Allgemeine homogene Lösung. Zunächst betrachten wir den Fall, wenn die rechte Seite $r(x)$ Null ist, d.h.

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

Man spricht dann von homogenen linearen DGL erster Ordnung. Die Lösungsmenge dieser DGL hat eine besonders einfache Struktur: sie ist abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation.

- Sind y_1 und y_2 Lösungen der DGL, dann auch $y_1 + y_2$.
- Ist y eine Lösung und $a \in \mathbb{R}$, dann auch ay .

Die homogene lineare DGL erster Ordnung ist separierbar und kann durch Trennung der Variablen gelöst werden, siehe das Beispiel in Kapitel 2.5 auf Seite 27. Das dort hergeleitete Ergebnis ist

$$y_H(x) = Ke^{-G(x)}$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist und K eine beliebige Konstante.

Inhomogene Lösung. Um auf die Lösung der inhomogenen DGL zu kommen, geht man von der allgemeinen Lösung der homogenen DGL aus, ersetzt aber die Konstante K durch eine zunächst unbekannte Funktion $k(x)$. Diesen Schritt nennt man Variation der Konstanten. Dass man auf diese Weise tatsächlich zu einer Lösung der inhomogenen DGL kommt, ist zunächst völlig überraschend! Man kann aber nachträglich einfach verifizieren, dass die Sache funktioniert wenn man $k(x)$ richtig wählt:

Der Lösungsansatz ist also

$$y(x) = k(x)e^{-G(x)}.$$

Dieser Ansatz wird nun in die inhomogene DGL eingesetzt. Hierzu muss zunächst $y'(x)$ bestimmt werden.

$$y'(x) = k'(x)e^{-G(x)} - k(x)g(x)e^{-G(x)}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\underbrace{k'(x)e^{-G(x)} - g(x)k(x)e^{-G(x)}}_{y'(x)} + g(x)\underbrace{k(x)e^{-G(x)}}_{y(x)} = r(x).$$

Glücklicherweise – und dies ist unabhängig von $g(x)$ und $r(x)$ immer so – kürzt sich $g(x)k(x)e^{-G(x)}$ weg und übrig bleibt

$$k'(x)e^{-G(x)} = r(x)$$

bzw.

$$k'(x) = r(x)e^{G(x)}.$$

Jetzt muss man eine Stammfunktion von $r(x)e^{G(x)}$ berechnen — nennen wir diese $S(x)$. Damit gilt

$$k(x) = S(x) + C.$$

Einsetzen der so berechneten Funktion $k(x)$ in den Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} y(x) &= (S(x) + C)e^{-G(x)} \\ &= Ce^{-G(x)} + S(x)e^{-G(x)}. \end{aligned}$$

Die Lösung stellt sich also dar als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y_H(x) = Ce^{-G(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

$$y_P(x) = S(x)e^{-G(x)}.$$

Beispiel. Gegeben ist die DGL

$$y'(x) + 2xy(x) = 4x.$$

Zuerst wird die allgemeine Lösung der homogenen DGL berechnet.

$$y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

- Trennung der Variablen

$$\frac{1}{y} dy = -2x dx$$

- Integration

$$\ln(|y|) = -x^2 + C$$

- Lösen

$$y = Ke^{-x^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Durch Variation der Konstanten erhält man den Lösungsansatz

$$y(x) = k(x)e^{-x^2}.$$

- Ableiten

$$y'(x) = k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}$$

- In DGL einsetzen.

$$\underbrace{k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}}_{y'(x)} + \underbrace{2xk(x)e^{-x^2}}_{y(x)} = 4x.$$

- Vereinfachen

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-x^2} &= 4x \\ k'(x) &= 4xe^{x^2}. \end{aligned}$$

- Integrieren

$$k(x) = 2e^{x^2} + C.$$

- In Ansatz einsetzen

$$\begin{aligned} y(x) &= (2e^{x^2} + C)e^{-x^2} \\ &= 2 + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

Tatsächlich hätte man diese DGL auch einfacher lösen können. Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} y'(x) + 2xy(x) &= 4x \\ y'(x) &= 4x - 2xy(x) \\ y'(x) &= \underbrace{2x}_{u(x)} \underbrace{(2 - y(x))}_{v(y)} \end{aligned}$$

Die DGL ist also separierbar und hätte auch durch Trennung der Variablen gelöst werden können. Das Ergebnis ist natürlich das Selbe.

Linearität. Warum heißt dieser DGL Typ linear? Weder die Funktion $g(x)$ noch $r(x)$ müssen linear sein! Zunächst ist festzustellen, dass die Lösungen $y(x)$ der DGL von der rechten Seite $r(x)$ abhängen. Durch die Vorgabe des Startwerts $y(0) = 0$ ist diese Lösung eindeutig.¹ Zu jeder rechten Seite $f(x)$ gibt es dann genau eine Funktion $h(x)$ mit

$$h'(x) + g(x)h(x) = f(x) \text{ und } h(0) = 0.$$

¹Von Integrierbarkeitsbedingungen und der Existenz der Lösung nur auf Intervallen soll hier abgesehen werden.

Die DGL mit gegebenem Startwert definiert somit eine Funktion S mit

$$S(f) = h.$$

Diese Funktion S ist linear, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(uf) &= uS(f). \end{aligned}$$

- Die erste Linearitätsbedingung zeigt man wie folgt: Sei $S(f_1) = h_1$ und $S(f_2) = h_2$, d.h.

$$\begin{aligned} h_1'(x) + g(x)h_1(x) &= f_1(x) \text{ und } h_1(0) = 0 \\ h_2'(x) + g(x)h_2(x) &= f_2(x) \text{ und } h_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass $S(f_1 + f_2) = h_1 + h_2$, d.h.

$$(h_1 + h_2)'(x) + g(x)(h_1 + h_2)(x) = (f_1 + f_2)(x) \text{ und } (h_1 + h_2)(0) = 0.$$

Dies folgt aus der Linearität der Ableitung:

$$\begin{aligned} (h_1 + h_2)'(x) + g(x)(h_1 + h_2)(x) &= h_1'(x) + h_2'(x) + g(x)h_1(x) + g(x)h_2(x) \\ &= h_1'(x) + g(x)h_1(x) + h_2'(x) + g(x)h_2(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) \\ (h_1 + h_2)(0) &= h_1(0) + h_2(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Die zweite Linearitätsbedingung zeigt man analog.

2.7 Allgemeine DGL erster Ordnung, Eulerscher Polygonzug

Eine DGL erster Ordnung in expliziter Darstellung hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

wobei f ein Term ist. Oft sind solche DGL nicht geschlossen lösbar, d.h. es gelingt nicht, einen Funktionsterm für $y(x)$ anzugeben. Ist ein Funktionswert von $y(x)$ bekannt, z.B. an der Stelle $x = 0$, dann ist die Lösung eindeutig. Man kann dann weitere Funktionswerte von y näherungsweise mit dem Eulerschen Polygonzug Verfahren berechnen.

Die Ableitung $y'(x)$ an der Stelle x ist definiert als Steigung der Tangenten von $y(x)$ im Punkt x . Die Tangentesteigung kann approximiert werden durch die Sekantensteigung zwischen x und $x + \Delta x$ für sehr kleine Δx , d.h. näherungsweise gilt

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = y'(x)$$

Umformen ergibt

$$y(x + \Delta x) = y(x) + y'(x)\Delta x.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der DGL kann man y an allen Stellen

$$x_n = n\Delta x, \quad n \in \mathbb{N}$$

berechnen:

- Für $n = 0$ wurde $y(x_0) = y(0)$ als bekannt angenommen.
- Wenn man $y(x_n)$ für ein bestimmtes n berechnet hat, kann man $y(x_{n+1})$ wie folgt ermitteln:

- Ersetzt man x durch x_n in der DGL, erhält man $y'(x_n)$ durch

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)).$$

- Ersetzt man x durch x_n in obiger Gleichung, erhält man $y(x_{n+1})$ durch

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + \Delta x) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)\Delta x. \end{aligned}$$

Beispiel. Gegeben ist die DGL

$$y'(x) = x + y(x) \text{ mit Anfangswert } y(x_0) = 1.$$

Die Schrittweite sei $\Delta x = 0.1$. Es gilt wie oben $x_n = n\Delta x$.

- $n = 1$

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= x_0 + y(x_0) \\ &= 1 \\ y(x_1) &= y(x_0) + y'(x_0)\Delta x \\ &= 1 + 0.1 = 1.1 \end{aligned}$$

- $n = 2$

$$\begin{aligned}y'(x_1) &= x_1 + y(x_1) \\ &= 0.1 + 1.1 = 1.2 \\ y(x_2) &= y(x_1) + y'(x_1)\Delta x \\ &= 1.1 + 0.12 = 1.22\end{aligned}$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned}y'(x_2) &= x_2 + y(x_2) \\ &= 0.2 + 1.22 = 1.42 \\ y(x_3) &= y(x_2) + y'(x_2)\Delta x \\ &= 1.22 + 0.142 = 1.362\end{aligned}$$

- usw.

2.8 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von DGL

Gegeben sei eine DGL erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit Startwert

$$y_0 = y(0).$$

Mit dem Eulerschen Polygonzug vor Augen würde man leicht zu der Vermutung kommen, dass so eine DGL immer genau eine Lösung hat sofern $f(x, y(x))$ definiert ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 2.9 Sei

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sqrt{y(x)}, \\y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem hat viele Lösungen für $x \in \mathbb{R}_0^+$, z.B.

$$\begin{aligned}y(x) &= 0 \\y(x) &= \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

Der Eulersche Polygonzug würde nur die erste Lösung liefern.

Beispiel 2.10 Sei

$$\begin{aligned}y'(x) &= y^2, \\y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Die DGL ist separierbar und man erhält durch Trennung der Variablen die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Mit dem Startwert $y(0) = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}1 &= -\frac{1}{C} \\C &= -1\end{aligned}$$

und damit die Lösungsfunktion

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

Diese Funktion ist an der Stelle $x = 1$ jedoch nicht definiert. Mit dem Eulerverfahren würde man über diese Stelle laufen ohne etwas zu merken.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Anfangswertproblemen ist also durchaus kritisch, selbst bei "harmlos" aussehenden Differentialgleichungen. Ein Kriterium hierzu bietet der Satz von Picard-Lindelöf.

2.9 Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Als Verallgemeinerung der linearen DGL erster Ordnung betrachten wir nun den Fall n -ter Ordnung.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x).$$

Um die Sache zu vereinfachen, schränken wir uns auf den wichtigen Spezialfall ein, dass die Koeffizienten $a_i(x)$ konstant sind. Statt mit Funktionen $a_i(x)$ hat man es also einfach mit Konstanten a_i zu tun.

Definition 2.11 (Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.)

Eine DGL heißt lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wenn sie auf die Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = r(x)$$

gebracht werden kann, wobei a_0, \dots, a_{n-1} Konstanten sind.

Das Lösungsverfahren besteht darin, dass man zunächst die allgemeine Lösung y_H der homogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

bestimmt und dann eine partikuläre Lösung y_P der inhomogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = r(x)$$

berechnet. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann $y_H + y_P$.

- Dass $y_H + y_P$ tatsächlich Lösung der inhomogenen DGL ist, sieht man, indem man $y_H + y_P$ einsetzt:

$$\begin{aligned} & (y_H + y_P)^{(n)}(x) + \dots + a_1(y_H + y_P)'(x) + a_0(y_H + y_P)(x) \\ &= \underbrace{y_H^{(n)}(x) + \dots + a_1y_H'(x) + a_0y_H(x)}_{=0} + \underbrace{y_P^{(n)}(x) + \dots + a_1y_P'(x) + a_0y_P(x)}_{=r(x)} \\ &= r(x). \end{aligned}$$

- Dass andererseits jede Lösung \hat{y} der inhomogenen DGL als Summe aus der partikulären Lösung y_P und einer homogenen Lösung geschrieben werden kann, d.h.

$$\hat{y} \in y_H + y_P$$

bzw.

$$\hat{y} - y_P \in y_H$$

sieht man, indem man zeigt, dass $\hat{y} - y_P$ Lösung der homogenen DGL ist. Dazu muss man lediglich $\hat{y} - y_P$ in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} & (\hat{y} - y_P)^{(n)}(x) + \dots + a_1(\hat{y} - y_P)'(x) + a_0(\hat{y} - y_P)(x) \\ &= \underbrace{\hat{y}^{(n)}(x) + \dots + a_1\hat{y}'(x) + a_0\hat{y}(x)}_{=r(x)} - \underbrace{(y_P^{(n)}(x) + \dots + a_1y_P'(x) + a_0y_P(x))}_{=r(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung. Berechnen wir nun die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

Wie im Fall der linearen DGL erster Ordnung (mit nicht-konstantem Koeffizienten) ist auch die Lösungsmenge in diesem Fall abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation:

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL, dann auch $y_1(x) + y_2(x)$.
- Ist $y(x)$ eine Lösung und $u \in \mathbb{R}$, dann auch $uy(x)$.

Die Menge aller Lösungen bildet daher einen Vektorraum. Ohne Beweis sei vermerkt, dass dieser Vektorraum immer von genau n Basisfunktionen erzeugt wird. Hat man also n linear unabhängige Lösungen y_1, \dots, y_n gefunden, dann ist die allgemeine homogene Lösung die Menge aller Linearkombinationen

$$y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Die n linear unabhängigen Lösungen findet man bei diesem DGL Typ mit dem Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Zur Berechnung von λ muss der Ansatz in die DGL eingesetzt werden. Hierzu sind die Ableitungen erforderlich:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Einsetzen des Lösungsansatzes in die DGL liefert

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = 0.$$

Kürzen mit $e^{\lambda x}$ liefert

$$\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{p(\lambda)} = 0.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad n , mit n (komplexen) Nullstellen und heißt charakteristisches Polynom.

Fall 1. Im einfachsten Fall hat das charakteristische Polynom n einfache reelle Nullstellen λ_i . Die allgemeine Lösung ist dann

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Fall 2. Falls ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar $\lambda, \bar{\lambda} = a \pm jb$ auftritt, würde der direkte Ansatz komplexwertige Lösungsfunktionen $e^{(a \pm jb)x}$ liefern. Um bei reellen Lösungen zu bleiben, hilft Umformen:

$$\begin{aligned} e^{(a \pm jb)x} &= e^{ax} e^{\pm jbx} \\ &= e^{ax} (\cos(bx) \pm j \sin(bx)). \end{aligned}$$

Die beiden konjugiert komplexen Lösungsfunktionen sind also

$$e^{ax} (\cos(bx) + j \sin(bx)) \text{ und } e^{ax} (\cos(bx) - j \sin(bx))$$

Da Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, können wir die beiden Lösungen addieren bzw. subtrahieren und erhalten nach Division durch 2 bzw. $2j$ reelle Lösungsfunktionen

$$e^{ax} \cos(bx) \text{ und } e^{ax} \sin(bx).$$

Dies ist aber nichts anderes als Realteil und Imaginärteil von $e^{\lambda x}$. Die Regel ist daher aus einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar $(\lambda, \bar{\lambda})$ die beiden reellen Funktionen

$$\operatorname{re}(e^{\lambda x}) \text{ und } \operatorname{im}(e^{\lambda x})$$

zu machen.

Fall 3. Hat das charakteristische Polynom eine k -fache Nullstelle λ , dann sind

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x}$$

linear unabhängige Lösungsfunktionen. Überzeugen wir uns, dass dies tatsächlich stimmt am Fall $n = 2$. Sei also

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

das charakteristische Polynom mit doppelter Nullstelle λ , d.h. $p(\lambda) = 0$ und $p'(\lambda) = 0$. Um zu sehen, dass $y(x) = x e^{\lambda x}$ Lösung der homogenen DGL ist, setzt man sie in die DGL ein. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{\lambda x} + x \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= 2 \lambda e^{\lambda x} + x \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL erhält man

$$2 \lambda e^{\lambda x} + x \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 (e^{\lambda x} + x \lambda e^{\lambda x}) + a_0 x e^{\lambda x} = 0$$

Kürzen mit $e^{\lambda x}$ und Ausklammern von x liefert

$$\underbrace{2 \lambda + a_1}_{p'(\lambda)} + x \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{p(\lambda)} = 0.$$

Da sowohl $p(\lambda)$ als auch $p'(\lambda)$ Null ist, ist die DGL erfüllt, d.h. $x e^{\lambda x}$ ist tatsächlich eine Lösung.

Abschließend noch ein Zahlenbeispiel zu jedem der 3 Fälle für $n = 2$.

Beispiel zu Fall 1.

$$y'' - 4y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Allgemeine Lösung

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Beispiel zu Fall 2.

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j$$

Komplexe Lösungsfunktionen

$$e^{(-2+j)x}, \quad e^{(-2-j)x}.$$

Reelle Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = e^{-2x} \cos(x), \quad y_2(x) = e^{-2x} \sin(x).$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y_H(x) &= C_1 e^{-2x} \cos(x) + C_2 e^{-2x} \sin(x) \\ &= e^{-2x} (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) \end{aligned}$$

Beispiel zu Fall 3.

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = x e^{2x}$$

Allgemeine Lösung

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Nachdem wir die allgemeine Lösung y_H der homogenen DGL gefunden haben, muss nun noch eine partikuläre Lösung y_P der inhomogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = r(x).$$

ermittelt werden. Die rechte Seite $r(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Zunächst ein paar Vereinfachungen:

- Wenn die Störfunktion eine Summe zweier einfacherer Störfunktionen ist, d.h.

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x)$$

kann man aufgrund der Linearität zunächst eine partikuläre Lösung y_{P1} bzw. y_{P2} für die DGL

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) &= r_1(x) \\ y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) &= r_2(x) \end{aligned}$$

suchen und $y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$ wählen.

- Wenn die Störfunktion die Form

$$r(x) = us(x)$$

hat, dann kann man wiederum zunächst die DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = s(x)$$

lösen und die Ergebnisfunktion mit u multiplizieren.

- Ist $a_0 = 0$, dann kann man die Ordnung der DGL um eins reduzieren, indem man auf beiden Seiten zur Stammfunktion übergeht, d.h.

$$y^{(n-1)}(x) + a_{n-1}y^{(n-2)}(x) + \dots + a_2y'(x) + a_1y(x) = R(x) + C$$

wobei R eine Stammfunktion von r und C eine beliebige Konstante ist.

- Ist $r(x)$ der Realteil einer komplexen Funktion $r_C(x)$, d.h.

$$r(x) = \operatorname{re}(r_C(x)),$$

berechnet man zunächst eine komplexe Lösungsfunktion y_C der DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = r_C(x)$$

und nimmt von dieser den Realteil, d.h.

$$y_P(x) = \operatorname{re}(y_C(x)).$$

Dies setzt jedoch voraus, dass die Koeffizienten a_i der DGL reell sind. Der Grund, warum das funktioniert ist, dass man einen reellen Faktor a und die Ableitung aus der Realteiloperation herausziehen kann, d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(ay'_C(x)) &= \operatorname{re}((y_{\operatorname{re}}(x) + jy_{\operatorname{im}}(x))') \\ &= \operatorname{re}(y'_{\operatorname{re}}(x) + jy'_{\operatorname{im}}(x)) \\ &= ay'_{\operatorname{re}}(x) \\ &= a(\operatorname{re}(y_C(x)))'. \end{aligned}$$

Das Selbe gilt wenn die rechte Seite Imaginärteil einer komplexen Funktion ist.

Für spezielle Störfunktionen gibt es Ansätze, die zu einer Lösung führen.

- $r(x)$ ist ein Polynom vom Grad m . Als Ansatz wählt man dann ebenfalls ein Polynom vom Grad m , d.h.

$$y(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m.$$

Durch Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich lassen sich die c_i bestimmen.

- $r(x) = e^{\mu x}$. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden.
 - Ist μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann führt der Ansatz

$$y(x) = ce^{\mu x}$$

zum Erfolg. Die Konstante c kann Einsetzen in die DGL und Kürzen mit $e^{\mu x}$ berechnet werden.

- Ist μ eine s -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann liegt ein Resonanzfall vor. Der Ansatz ist dann

$$y(x) = cx^s e^{\mu x}.$$

- $r(x) = \cos(\omega x)$ bzw. $r(x) = \sin(\omega x)$ kann man auf den vorigen Fall reduzieren durch

$$\cos(\omega x) = \operatorname{re}(e^{j\omega x}) \text{ bzw. } \sin(\omega x) = \operatorname{im}(e^{j\omega x}).$$

Alternativ kann man auch den Ansatz

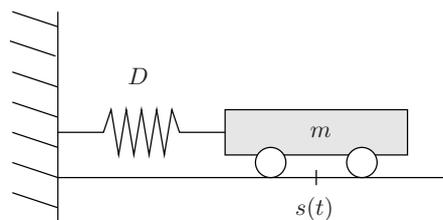
$$y(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

nehmen falls $j\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynom ist und

$$y(x) = x^s (a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x))$$

falls $j\omega$ eine s -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Anwendungsbeispiel. Im folgenden Bild ist ein Wagen der Masse m dargestellt, der sich horizontal bewegen kann und über eine Feder mit Federkonstante D an einer Wand befestigt ist. Die Reibungskraft sei $rv(t)$. In der Position $s = 0$ sei die Feder entspannt. Gesucht ist die Position $s(t)$ des Wagens in Abhängigkeit von der Zeit t .



Aus dem Trägheitsgesetz folgt

$$-Ds(t) - rv(t) = ma(t)$$

bzw.

$$ms''(t) + rs'(t) + Ds(t) = 0.$$

Es handelt sich also um eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz

$$s(t) = e^{\lambda t}$$

führt auf das charakteristische Polynom

$$m\lambda^2 + r\lambda + D = 0.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mD}}{2m}.$$

- Wenn starke Reibung vorliegt, d.h. $r^2 > 4mD$, erhält man zwei reelle Nullstellen, die beide negativ sind. Die allgemeine Lösung ist dann

$$s_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

d.h. der Wagen führt keine Schwingung aus und bewegt sich asymptotisch in die Ruhelage.

- Im Grenzfall $r^2 = 4mD$ erhält man eine doppelte Nullstelle $\lambda = -r/(2m)$ und die allgemeine Lösung

$$s_H(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

Der Wagen führt auch hier keine Schwingung aus und bewegt sich asymptotisch in die Ruhelage.

- Interessant ist der Fall, wenn die Reibung klein ist, d.h. $r^2 < 4mD$. In diesem Fall erhält man konjugiert komplexe Nullstellen

$$\lambda, \bar{\lambda} = \rho \pm j\omega, \quad \rho = -\frac{r}{2m}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4mD - r^2}}{2m} = \sqrt{\frac{D}{m} - \rho^2}$$

Eine komplexe Lösungsfunktion ist dann

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{\rho t} e^{j\omega t} \\ &= e^{\rho t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung in diesem Fall ist

$$s_H(t) = e^{\rho t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)).$$

Der Wagen führt also eine gedämpfte Schwingung aus. Anhand der Formel für ω lässt sich verifizieren, dass die Frequenz groß ist, wenn D groß ist (harte Federung), m klein ist (leichter Wagen) und ρ klein ist (schwache Reibung).

Lassen wir nun auf diesen Wagen eine externe Kraft $\cos(\hat{\omega}t)$ wirken. Man erhält damit eine inhomogene, lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ms''(t) + rs'(t) + Ds(t) = \cos(\hat{\omega}t).$$

Die allgemeine homogene Lösung wurde bereits bestimmt, es fehlt also noch eine partikuläre inhomogene Lösung. Da $r \neq 0$, haben die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in jedem Fall einen Realteil. Da $\hat{\omega}$ reell ist, ist $j\hat{\omega}$ rein imaginär und somit nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Resonanz kann also nicht eintreten. Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos(\hat{\omega}t) + b \sin(\hat{\omega}t) \\ s'(t) &= \hat{\omega}(-a \sin(\hat{\omega}t) + b \cos(\hat{\omega}t)) \\ s''(t) &= \hat{\omega}^2(-a \cos(\hat{\omega}t) - b \sin(\hat{\omega}t)) \end{aligned}$$

erhält man durch Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} &m\hat{\omega}^2(-a \cos(\hat{\omega}t) - b \sin(\hat{\omega}t)) \\ &+ r\hat{\omega}(-a \sin(\hat{\omega}t) + b \cos(\hat{\omega}t)) \\ &+ D(a \cos(\hat{\omega}t) + b \sin(\hat{\omega}t)) \\ &= \cos(\hat{\omega}t). \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen, erhält man das LGS

$$\begin{aligned} -m\hat{\omega}^2 a + r\hat{\omega}b + Da &= 1 \\ -m\hat{\omega}^2 b - r\hat{\omega}a + Db &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a = \frac{D - m\hat{\omega}^2}{(D - m\hat{\omega}^2)^2 + (r\hat{\omega})^2}, \quad b = \frac{r\hat{\omega}}{(D - m\hat{\omega}^2)^2 + (r\hat{\omega})^2}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit

$$s(t) = s_H(t) + a \cos(\hat{\omega}t) + b \sin(\hat{\omega}t).$$

Da aufgrund der Reibung $s_H(t)$ gegen Null geht, führt der Wagen asymptotisch eine erzwungene Schwingung mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ (und nicht mit seiner Eigenfrequenz ω) aus. Wenn jedoch die Reibung schwach ist (d.h. r klein) und $\hat{\omega} \approx \omega$, dann wird der Nenner von a und b sehr klein. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung wird dann sehr groß. Das System schaukelt sich auf da es näherungsweise mit seiner Eigenfrequenz angeregt wird.

3 Faltung und Dirac Impuls

Motivation. In diesem Kapitel betrachten wir Systeme, die ein Eingangssignal $f(t)$ in ein Ausgangssignal $h(t)$ transformieren.

$$f \rightarrow \boxed{\text{System } S} \rightarrow h = S(f)$$

Ein System S ist somit eine Funktion von Funktionen, d.h.

$$S \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}), \quad S(f) = h.$$

Da $S(f)$ eine Funktion ist, kann man auch schreiben

$$[S(f)](t) = h(t) \quad \text{für alle } t.$$

- Ein einfaches Beispiel eines solchen Systems könnte die Verzögerung sein, d.h.

$$S(f) = f_{\hat{t}}$$

wobei $f_{\hat{t}}$ die um \hat{t} verschobene Funktion f ist, d.h.

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}).$$

- In technischen Anwendungen spielen Verstärker eine wichtige Rolle, d.h.

$$S(f) = af$$

wobei a der Verstärkungsfaktor ist.

- Ein interessanteres Beispiel ist der Differenzierer

$$S(f) = f'$$

bzw. der Integrierer

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

- In der Signalverarbeitung kommen Systeme vor, die in einem Eingangssignal f bestimmte Frequenzbereiche herausfiltern oder verstärken. Für solche Systeme ist die Fourier Transformation ein wichtiges Werkzeug, siehe Kapitel 6.
- Man kann sich auch ein System aus der Elektrotechnik vorstellen, in dem f die Eingangsspannung und $S(f)$ die Spannung an einem Bauteil beschreibt. In solchen Systemen hängen f und $S(f)$ oft über Differentialgleichungen zusammen – vergessen Sie also nicht, was Sie im letzten Kapitel gelernt haben!

Alle genannten Beispiele und viele praxisrelevante Systeme haben zwei zentrale Eigenschaften, die die Sache ganz erheblich vereinfachen: Die Linearität und die Zeitinvarianz.

$$\begin{array}{ccc}
 f_1, f_2 & \xrightarrow{+} & f_1 + f_2 \\
 \downarrow S & & \downarrow S \\
 S(f_1), S(f_2) & \xrightarrow{+} & S(f_1 + f_2) = S(f_1) + S(f_2)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\cdot a} & af \\
 \downarrow S & & \downarrow S \\
 S(f) & \xrightarrow{\cdot a} & S(af) = aS(f)
 \end{array}$$

Bei einem linearen System ist es egal, ob man zwei Signale zuerst addiert und dann durch das System transformiert oder ob man die Signale zuerst separat durch das System transformiert und danach addiert. Es ist weiterhin egal, ob man ein Signal zuerst verstärkt und dann transformiert oder ob man es zuerst transformiert und danach verstärkt.

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\text{Verzögerung}} & f_i \\
 \downarrow S & & \downarrow S \\
 S(f) & \xrightarrow{\text{Verzögerung}} & S(f_i) = S(f)_i
 \end{array}$$

Bei einem zeitinvarianten System ist es egal, ob man ein Signal zuerst verzögert und dann transformiert oder ob man es zuerst transformiert und danach verzögert.

Auch die Fourier- und Laplace Transformation (siehe Kapitel 6 und 7) sind Systeme in dem Sinn, dass sie eine Eingangsfunktion in eine Ausgangsfunktion überführen. Sie sind auch beide linear, aber nicht zeitinvariant.

Lineare zeitinvariante Systeme können mathematisch sehr einfach durch die Faltung beschrieben werden. Zu jedem linearen zeitinvarianten System S gibt es eine Funktion g , so dass

$$S(f) = f * g$$

wobei der Stern die Faltungsoperation ist:²

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Die Funktion g heißt Impulsantwort des Systems und ist, wie der Name suggeriert die Antwort des Systems, wenn das Inputsignal ein kurzer und starker Impuls δ ist, d.h.

$$g = S(\delta).$$

Kennt man also $S(\delta)$, dann kann man $S(f) = f * S(\delta)$ für jede Funktion f durch Faltung berechnen.

²Genau genommen stimmt dies nur wenn man eine Glättung zulässt, siehe Kapitel 3.4.

Überblick.

- In Kapitel 3.1 werde ich Sie anhand einiger Beispiele überzeugen, dass es viele Systeme in völlig unterschiedlichen Anwendungen gibt, in denen immer wieder das Ausgangssignal h durch Faltung aus dem Eingangssignal f berechnet werden kann.
- In Abschnitt 3.2 schauen wir uns die Faltungsoperation $f*g$ an. Auch wenn die Formel ziemlich hässlich ist, gelten für die Faltung überraschend viele Rechengesetze, mit denen man die Dinge vereinfachen kann. In Kapitel 6 und 7 zeigen wir, dass man die Faltung auch mit der Fourier- oder Laplace Transformation berechnen kann, also keine Panik.
- Insbesondere kann man mit der Faltung auch Funktionen glätten und damit Sprünge und Knicke beseitigen (Kapitel 3.3). Eigenschaften von Funktionen, die genau genommen Stetigkeit oder Differenzierbarkeit voraussetzen, lassen sich damit auf unstetige Funktionen übertragen.
- Der Grenzfall einer infinitesimal geringen Glättung führt zum Dirac Impuls (Kapitel 3.4). Mit diesem Konzept ist es möglich, den Begriff der Ableitung auf Funktionen zu verallgemeinern, die Sprungstellen haben (Kapitel 3.5).
- Für den Umgang mit dem Dirac Impuls gibt es sehr einfache Gesetze wie z.B. die Ausblendeigenschaft (Kapitel 3.6). Die wichtigsten Gesetze zum Rechnen mit der Faltung und dem Dirac Impuls sind im Anhang in Kapitel A.1 zusammengefasst.

3.1 Anwendungen aus der Praxis

Anwendungsbeispiel Hochschule

Die Hochschule nimmt in jedem Jahr t eine Anzahl $f(t)$ von Studierenden auf. Gesucht ist die Anzahl $h(t)$ von Absolventen im Jahr t .

Der Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $h(t)$ wird dadurch kompliziert, dass nicht alle Studierenden gleich lange für ihren Abschluss brauchen. Ein bestimmter Anteil braucht 3 Jahre, andere 4, manche 5 usw. und manche brechen ihr Studium ab. Diese Information wird in folgender Tabelle zusammengefasst, wobei $g(t)$ der Anteil von Studierenden ist, die t Jahre brauchen.

t	3	4	5
$g(t)$	0.4	0.2	0.1

Die Anzahl Absolventen $h(t)$ im Jahr t setzen sich nun zusammen aus

- 40 Prozent der Erstsemester des Jahres $t - 3$,
- 20 Prozent der Erstsemester des Jahres $t - 4$,
- 10 Prozent der Erstsemester des Jahres $t - 5$.

Somit ist

$$\begin{aligned} h(t) &= 0.4f(t-3) + 0.2f(t-4) + 0.1f(t-5) \\ &= \sum_{k=3,4,5} g(k)f(t-k). \end{aligned}$$

Setzt man $g(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ außer $k = 3, 4, 5$, kann man diese Formel verallgemeinern zu

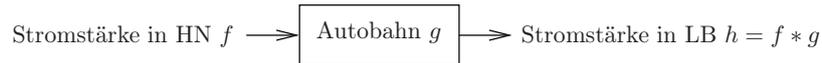
$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)f(t-k) \\ &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

Diese Verknüpfung der Funktionen f und g heißt diskrete Faltung. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße bei bestimmten Systemen mit Speicher. In diesem Kontext kann man eine Hochschule als System betrachten, das Studierende "speichert".



Anwendungsbeispiel Autobahn

Eine Autobahn kann als Speicher für Autos betrachtet werden. Wir messen die Stromstärke $f(t)$ in Heilbronn und $h(t)$ in Ludwigsburg zum Zeitpunkt t . Die Einheit ist Autos pro Sekunde. Das Experiment beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$, d.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$. Das Ziel ist wie im vorigen Beispiel, $h(t)$ aus $f(t)$ zu berechnen.



Im Gegensatz zum vorigen Beispiel ist diesmal die Zeit t jedoch kontinuierlich. Es macht daher keinen Sinn zu fragen, welcher Anteil $g(t)$ der Autos exakt t Sekunden braucht um von Heilbronn nach Ludwigsburg zu kommen, denn dieser Anteil wäre Null für jedes t . Wir geben daher den Anteil $G(t)$ Autos an, der *weniger* als t Sekunden braucht. Für sehr kleine t oder negative t ist $G(t) = 0$, für sehr große t geht $G(t)$ gegen Eins.

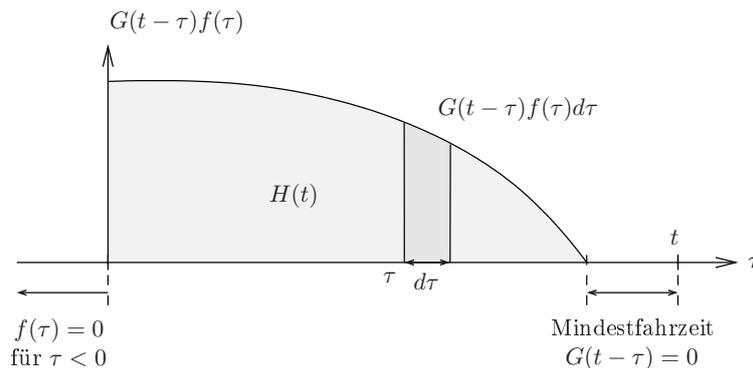
Halten wir den Zeitpunkt t fest und betrachten einen früheren Zeitpunkt $\tau < t$. In einem kurzen Zeitintervall der Länge $d\tau$ um den Zeitpunkt τ herum fahren

$$f(\tau)d\tau$$

Autos in Heilbronn ab. Da $d\tau$ sehr kurz ist, darf man annehmen, dass sich die Stromstärke $f(\tau)$ in diesem Intervall nicht ändert. Von diesen Autos ist ein Anteil von $G(t-\tau)$ weniger als $t-\tau$ Sekunden unterwegs, d.h. bis zum Zeitpunkt t in Ludwigsburg angekommen. Diese Anzahl ist somit

$$G(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Um die Gesamtzahl Autos zu erhalten, die bis zum Zeitpunkt t in Ludwigsburg eingetroffen ist und zu einem beliebigen Zeitpunkt τ abgefahren ist, muss man diesen Term über alle τ aufsummieren bzw. integrieren, da τ kontinuierlich ist.



Man erhält damit

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

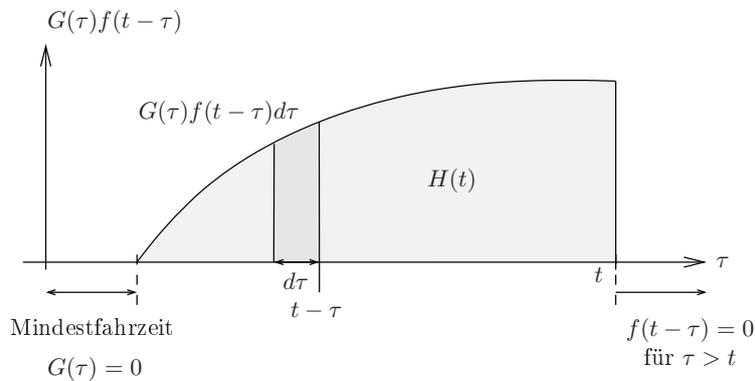
Tatsächlich würde es genügen, für $\tau = 0, \dots, t$ zu integrieren, da $G(t - \tau) = 0$ für $\tau > t$ und $f(\tau) = 0$ für $\tau < 0$.

Die Stromstärke in Ludwigsburg ist die zeitliche Ableitung der Anzahl eingetroffener Autos. Damit gilt

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt} H(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} G(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

Alternativer Rechenweg. Man hätte das Problem auch anders lösen können: Von einem festen Zeitpunkt t ausgehend schauen wir τ Sekunden in die Vergangenheit. Die Stromstärke war dort $f(t - \tau)$. In einem kurzen Intervall der Dauer $d\tau$ um dem Zeitpunkt $t - \tau$ herum fahren $f(t - \tau)d\tau$ Autos in Heilbronn ab. Bis zum Zeitpunkt t ist hiervon ein Anteil von $G(\tau)$ Autos in Ludwigsburg angekommen, d.h. insgesamt

$$G(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$



$$G(t - \tau) = 0$$

Wieder müssen wir über alle Zeitpunkte τ summieren bzw. integrieren um die Gesamtzahl aller Autos zu erhalten, die zum Zeitpunkt t in Ludwigsburg angekommen sind.

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$

Da die Stromstärke die zeitliche Ableitung der Anzahl ist, wird nach t abgeleitet.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

Eine Stammfunktion von $f'(t - \tau)$ ist $-f(t - \tau)$. Umformen mit partieller Integration ergibt

$$\begin{aligned} h(t) &= [G(\tau)(-f(t - \tau))]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)(-f(t - \tau)) d\tau \\ &= -G(\infty)f(-\infty) + G(-\infty)f(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

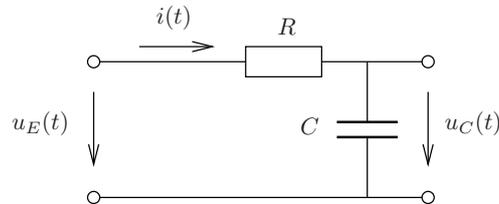
Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $G(-\infty) = f(-\infty) = 0$. Beim ersten Rechenweg erhielten wir das Ergebnis

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)f(\tau) d\tau.$$

Tatsächlich macht die Vertauschung von f und g aber keinen Unterschied. Wie in Kapitel 3.2 gezeigt wird, ist die Faltung kommutativ.

Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik

In folgender Schaltung soll die Spannung am Kondensator $u_C(t)$ in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ bestimmt werden.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator entladen, d.h. es gilt $u_C(0) = 0$. Weiterhin gilt $u_E(t) = 0$ für $t < 0$.

Für die Ladung $q(t)$ des Kondensators gilt

$$q(t) = C u_C(t).$$

Damit ist die Stromstärke

$$\begin{aligned} i(t) &= q'(t) \\ &= C u_C'(t). \end{aligned}$$

Mit der Maschenregel gilt nun

$$\begin{aligned} u_E(t) &= R i(t) + u_C(t) \\ &= R C u_C'(t) + u_C(t). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene, lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$R C u_C'(t) + u_C(t) = 0$$

erhält man mit dem Ansatz $u_C(t) = e^{\lambda t}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} R C \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{R C}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine homogene Lösung

$$u_C(t) = K e^{-t/(R C)}.$$

Mit Variation der Konstanten bestimmt man nun eine inhomogene Lösung. Der Ansatz

$$\begin{aligned} u_C(t) &= k(t) e^{-t/(R C)} \\ u_C'(t) &= k'(t) e^{-t/(R C)} - \frac{1}{R C} k(t) e^{-t/(R C)} \end{aligned}$$

wird in die inhomogene DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 RCu'_C(t) + u_C(t) &= u_E(t) \\
 RC \left(\underbrace{k'(t)e^{-t/(RC)} - \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/(RC)}}_{u'_C(t)} \right) + \underbrace{k(t)e^{-t/(RC)}}_{u_C(t)} &= u_E(t) \\
 RCk'(t)e^{-t/(RC)} - k(t)e^{-t/(RC)} + k(t)e^{-t/(RC)} &= u_E(t) \\
 RCk'(t)e^{-t/(RC)} &= u_E(t)
 \end{aligned}$$

Auflösen nach $k'(t)$ ergibt

$$k'(t) = u_E(t) \frac{1}{RC} e^{t/(RC)}.$$

Eine Stammfunktion von $k'(t)$ ist

$$\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_E(\tau) e^{\tau/(RC)} d\tau$$

wobei man statt der Untergrenze $-\infty$ auch eine beliebige andere Konstante hätte wählen können. Die Menge aller Stammfunktionen ist

$$k(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_E(\tau) e^{\tau/(RC)} d\tau + D$$

wobei D eine beliebige Konstante ist. Damit ist

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= k(t)e^{-t/(RC)} \\
 &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_E(\tau) e^{\tau/(RC)} e^{-t/(RC)} d\tau + D e^{-t/(RC)}.
 \end{aligned}$$

Wählt man die Startbedingung $u_C(-\infty) = 0$ erhält man $D = 0$ und die eindeutige Lösung

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_E(\tau) e^{-(t-\tau)/(RC)} d\tau.$$

Dies lässt sich durch Substitution $u = t - \tau$ vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{1}{RC} - \int_{\infty}^0 u_E(t-u) e^{-u/(RC)} du \\
 &= \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} u_E(t-u) e^{-u/(RC)} du \\
 &= \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} u_E(t-\tau) e^{-\tau/(RC)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

lässt sich dies weiter umformen in

$$u_C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_E(t - \tau) \sigma(\tau) \frac{1}{RC} e^{-\tau/(RC)} d\tau.$$

Mit

$$g(t) = \sigma(t) \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)}$$

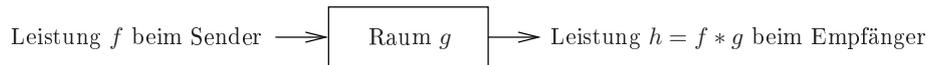
gilt somit

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_E(t - \tau) g(\tau) d\tau \\ &= (u_E * g)(t), \end{aligned}$$

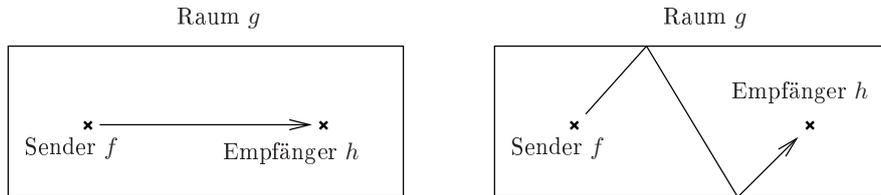
d.h. der Zusammenhang zwischen Eingangsspannung u_E und Ausgangsspannung u_C ist wieder eine Faltung mit einer Funktion g .

Anwendungsbeispiel aus der Akustik

In einem Raum befindet sich eine Schallquelle, die zum Zeitpunkt t die Leistung $f(t)$ abstrahlt und ein Mikrofon, das die Leistung $h(t)$ aufnimmt. Wie im vorigen Beispiel soll die Funktion h in Abhängigkeit von f berechnet werden. In diesem Beispiel fungiert der Raum als Speicher für Schallenergie, die vom Sender zum Empfänger wandert.



Aufgrund von Reflektionen an den Wänden gibt es viele unterschiedlich lange Wege, auf denen die Energie transportiert wird, wobei ein Teil auch von den Wänden und der Luft absorbiert wird.



Sei $G(t)$ der Teil der Senderenergie, die nach weniger als t Sekunden beim Empfänger ankommt. Wie im Beispiel mit der Autobahn wird zunächst ein fester Zeitpunkt t betrachtet. Zu einem (früheren) Zeitpunkt $\tau < t$ strahlte der Sender die Leistung $f(\tau)$ Watt ab. In einem kurzen Zeitintervall der Länge $d\tau$ um τ herum hat der Sender die Energie $f(\tau)d\tau$ Joule in den Raum geschickt. Da $d\tau$ sehr kurz ist, kann angenommen werden, dass die Senderleistung in diesem Intervall konstant ist. Von dieser Energie hat der Anteil $G(t - \tau)$ eine Laufzeit kleiner $t - \tau$ und kommt daher bis zum Zeitpunkt t beim Empfänger an, d.h.

$$G(t - \tau)f(\tau)d\tau \text{ Joule.}$$

Dieser Energiebetrag muss über alle τ aufsummiert bzw. integriert werden. Die Gesamtenergie, die bis zum Zeitpunkt t beim Empfänger eingetroffen ist, ist somit

$$H(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau)f(\tau)d\tau \text{ Joule.}$$

Da $G(t) = 0$ für $t < 0$ ist $G(t - \tau) = 0$ für $\tau > t$ und man kann bis ∞ integrieren, d.h.

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau)f(\tau)d\tau \text{ Joule.}$$

Da die Leistung $h(t)$ die zeitliche Ableitung der Energie $H(t)$ ist, erhält man

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{d}{dt}H(t) \\&= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau)f(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}G(t - \tau)f(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)f(\tau)d\tau \\&= (f * g)(t) \text{ Watt.}\end{aligned}$$

3.2 Faltung

In den Beispielen aus Kapitel 3.1 sind wir immer wieder auf den selben Zusammenhang zwischen einer Eingangsfunktion f und einer Ausgangsfunktion h gestoßen. Es handelte sich dabei immer um Systeme mit einem Speicher, deren Verhalten durch die Impulsantwort g beschrieben wurde.

Definition 3.1 Faltung

Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f, g ist definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

für alle t , für die das uneigentliche Integral existiert.

Tatsächlich kam bei den Beispielen der Term

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)f(\tau)d\tau$$

heraus. Das macht aber keinen Unterschied, denn die Faltung ist kommutativ.

Theorem 3.2 (Faltung ist kommutativ)

Die Faltung ist kommutativ, d.h. es gilt

$$f * g = g * f.$$

Beweis. Aus der Definition

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

erhält man mit Substitution $\mu = t - \tau$ und $d\tau = -d\mu$:

$$\begin{aligned} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau &= \int_{\mu=\infty}^{-\infty} g(t - \mu)f(\mu)(-d\mu) \\ &= \int_{\mu=-\infty}^{\infty} f(\mu)g(t - \mu)d\mu \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= (g * f)(t). \square \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$

Die Funktionen f und g dürfen bei der Faltung vertauscht werden.

Die Faltung hat überraschend viele Eigenschaften, die das Rechnen vereinfachen und in diesem Kapitel gezeigt werden.

Vorweg aber eine Warnung: Für “die meisten” Funktionen f, g existiert $f * g$ nicht, weil die Grenzwerte, die man ja bei dem uneigentlichen Integral berechnen muss, nicht existieren. Die nachfolgenden Aussagen über die Faltung gelten daher natürlich nur, wenn diese Grenzwerte existieren!

In dem praktisch wichtigen Spezialfall wenn f und g Funktionen sind, die für negative Argumente Null sind (kausale Funktionen), reduziert sich jedoch das uneigentliche Integral auf einen endlichen Integrationsbereich.

Theorem 3.3

Sei

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

Dann gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

und

$$(f * g)(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Beweis. Sei

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Laut Definition gilt

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Für $\tau > t$ ist $t - \tau < 0$ und damit $f(t - \tau) = 0$. Folglich kann die Obergrenze des Integrals auf t abgesenkt werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Da $g(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ können Bereiche, wo $\tau < 0$ ist, aus dem Integral eliminiert werden.

- Für $t < 0$ ist dies der gesamte Integrationsbereich und

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau = 0 = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Wenn also f und g kausale Funktionen sind, dann auch $f * g$.

- Für $t \geq 0$ kann der Bereich $\tau = -\infty, \dots, 0$ eliminiert werden und es gilt

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad \square$$

In den Anwendungen werden die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ oft "künstlich" auf Null gesetzt für negative Argumente durch einen Faktor $\sigma(t)$. Im Faltungsintegral tauchen dann Faktoren $\sigma(\tau)$ bzw. $\sigma(t - \tau)$ auf.

Theorem 3.4

$$(\sigma f * \sigma g)(t) = \sigma(t) \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Beweis. Da $\sigma(t)f(t) = \sigma(t)g(t) = 0$ für $t < 0$ folgt aus dem vorigen Theorem, dass

$$\begin{aligned} (\sigma f * \sigma g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)g(\tau) \sigma(t - \tau)f(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t \sigma(\tau)g(\tau) \sigma(t - \tau)f(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

- Falls $t < 0$ ist τ im gesamten Integrationsbereich negativ und somit der Faktor $\sigma(\tau) = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} (\sigma f * \sigma g)(t) &= \int_0^t \sigma(\tau)g(\tau)\sigma(t - \tau)f(t - \tau)d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Falls $t \geq 0$ ist im gesamten Integrationsbereich $\sigma(\tau) = \sigma(t - \tau) = 1$. Damit ist

$$\begin{aligned} (\sigma f * \sigma g)(t) &= \int_0^t \sigma(\tau)g(\tau)\sigma(t - \tau)f(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Beide Fälle lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} (\sigma f * \sigma g)(t) &= \int_0^t \sigma(\tau)g(\tau) \sigma(t - \tau)f(t - \tau)d\tau \\ &= \sigma(t) \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau. \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden wird wieder der allgemeine Fall betrachtet wenn f und g auf ganz \mathbb{R} ungleich Null sein können.

Theorem 3.5 (Faltung ist linear)

Die Faltung ist linear, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2) * g &= f_1 * g + f_2 * g \\ (af) * g &= a(f * g)\end{aligned}$$

für alle Funktionen f, g und Skalare a .

$$\begin{array}{ccc} f_1, f_2 & \xrightarrow{+} & f_1 + f_2 \\ \downarrow *g & & \downarrow *g \\ f_1 * g, f_2 * g & \xrightarrow{+} & (f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\cdot a} & af \\ \downarrow *g & & \downarrow *g \\ f * g & \xrightarrow{\cdot a} & (af) * g = a(f * g) \end{array}$$

Beweis. Zunächst sollte man sich klar machen, dass dies Gleichungen von Funktionen sind. Die Addition $(f_1 + f_2)$ in der ersten Gleichung ist eine Addition von Funktionen, die skalare Multiplikation af in der zweiten Gleichung bedeutet die Multiplikation einer Zahl mit einer Funktion. Zwei Funktionen sind gleich genau dann wenn ihr Funktionswert gleich ist für alle t . Im Folgenden sei t also eine beliebige Zahl. Die nachfolgenden Gleichungen sind somit Gleichungen der Funktionswerte bei t , d.h. Gleichungen von Zahlen.

$$\begin{aligned} [(f_1 + f_2) * g](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 + f_2)(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(\tau)g(t - \tau) + f_2(\tau)g(t - \tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)g(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= (f_1 * g)(t) + (f_2 * g)(t) \\ &= [f_1 * g + f_2 * g](t) \\ [(af) * g](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (af)(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= a(f * g)(t) \\ &= [a(f * g)](t). \quad \square \end{aligned}$$

Bei der nächsten Eigenschaft spielt die Verschiebung eine wichtige Rolle.

Notation 3.6

Für jede Funktion f und jede Zahl \hat{t} sei $f_{\hat{t}}$ definiert durch

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}) \text{ für alle } t .$$

Das Schaubild von $f_{\hat{t}}$ erhält man aus dem Schaubild von f , indem man es um \hat{t} nach rechts verschiebt. Ist f ein physikalisches Signal, so ist $f_{\hat{t}}$ das selbe Signal um \hat{t} verzögert. Oft ist es hilfreich, $f_{\hat{t}}$ als Komposition darzustellen, d.h.

$$f_{\hat{t}} = f \circ v \text{ mit } v(t) = t - \hat{t}.$$

Theorem 3.7 (Faltung ist zeitinvariant)

$$f_{\hat{t}} * g = (f * g)_{\hat{t}}.$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\text{Verschiebung um } \hat{t}} & f_{\hat{t}} \\ *g \downarrow & & \downarrow *g \\ f * g & \xrightarrow{\text{Verschiebung um } \hat{t}} & f_{\hat{t}} * g = \\ & & (f * g)_{\hat{t}} \end{array}$$

Beweis. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \tau - \hat{t} \\ du &= d\tau \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} (f_{\hat{t}} * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{t}}(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - \hat{t})g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t - (u + \hat{t}))du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g((t - \hat{t}) - u)du \\ &= (f * g)(t - \hat{t}) \\ &= (f * g)_{\hat{t}}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Unter bestimmten Stetigkeitsbedingungen darf die Reihenfolge von Ableitung und Integral vertauscht werden. Für uns sind diese Bedingungen i.a. unkritisch, da in den für uns relevanten, praktischen Anwendungen ohnehin fast alle Signale beliebig glatt sind. Im nächsten Kapitel wird zudem eine Technik vorgestellt, mit der man Sprünge und Knicke in Funktionen glätten kann.

Theorem 3.8 (Faltung und Ableitung ist vertauschbar.)

$$f' * g = (f * g)'$$

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\text{Ableitung}} & f' \\
 *g \downarrow & & \downarrow *g \\
 f * g & \xrightarrow{\text{Ableitung}} & f' * g = \\
 & & (f * g)'
 \end{array}$$

Beweis.

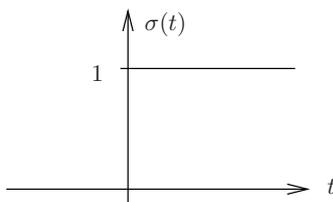
$$\begin{aligned}
 (f * g)'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (f(t - \tau)g(\tau)d\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} (f(t - \tau)) \right) g(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t - \tau)g(\tau)d\tau \\
 &= (f' * g)(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

Die Integration einer Funktion kann durch eine Faltung mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$ bewerkstelligt werden.

Definition 3.9

Die Heavisidesche Sprungfunktion ist definiert durch

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Theorem 3.10 (Integration durch Faltung)**

$$(f * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (f * \sigma)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau. \quad \square \end{aligned}$$

Damit ist $f * \sigma$ eine Stammfunktion von f .

Die in diesem Abschnitt gezeigten Eigenschaften sind im Anhang auf Seite 169 zusammengefasst.

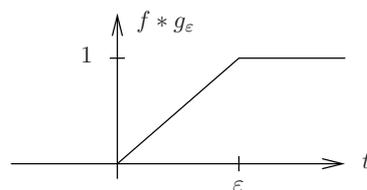
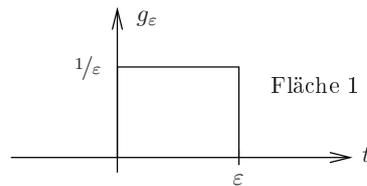
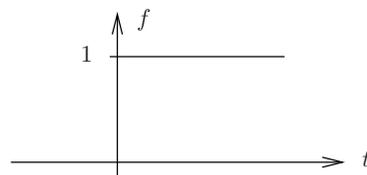
3.3 Glättung durch Faltung

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie Sprünge und Knicke in einer Funktion $f(t)$ durch Faltung mit einer geeigneten Funktion $g_\varepsilon(t)$ geglättet werden können ohne dass sich $f(t)$ sonst wesentlich ändert. Als Beispiel für eine Funktion mit einem Sprung dient uns die Heavisidesche Sprungfunktion

$$f(t) = \sigma(t).$$

Beispiel 3.11 Sei $g_\varepsilon(t)$ ein Rechteckimpuls der Breite $\varepsilon > 0$ mit Fläche 1, d.h.

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Sprung in $f(t)$ wird durch Faltung mit g_ε zu einer Rampe in $f * g_\varepsilon$ geglättet:

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- Für $t < 0$ ist das Integral Null.
- Für $t > \varepsilon$ ist das Integral Eins, da die Fläche unter g_ε Eins ist.

- Für $0 \leq t \leq \varepsilon$ kann das Integral auf den Bereich $0 \dots t$ eingeschränkt werden, da $g_\varepsilon(\tau) = 0$ für $\tau < 0$. In diesem Bereich ist g_ε konstant $1/\varepsilon$ und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau &= \int_0^t g_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1 d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\tau]_0^t \\ &= \frac{1}{\varepsilon} t. \end{aligned}$$

Dies ist der Term für die Rampe zwischen $t = 0$ und $t = \varepsilon$.

Insgesamt erhält man somit

$$(f * g_\varepsilon)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t > \varepsilon \\ t/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon. \end{cases}$$

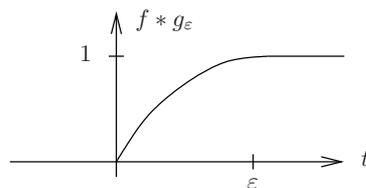
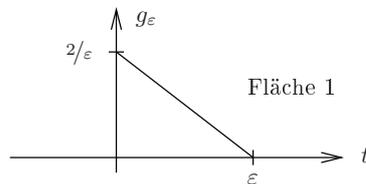
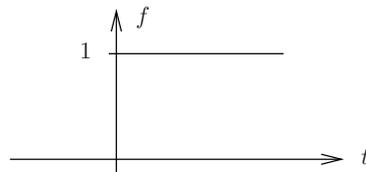
Durch die Faltung mit g_ε ist nun $f * g_\varepsilon$ zwar stetig, hat aber an den Stellen $t = 0$ und $t = \varepsilon$ einen Knick und ist dort nicht differenzierbar.

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird aus der Rampe wieder ein Sprung, d.h. es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

Beispiel 3.12 Sei nun g_ε kein Rechteckimpuls sondern ein Sägezahnimpuls der Breite $\varepsilon > 0$ mit Fläche 1, d.h.

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2/\varepsilon - 2t/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & \text{für } t > \varepsilon. \end{cases}$$



$f * g_\varepsilon$ hat zwar immer noch einen Knick bei $t = 0$ aber der Knick bei $t = \varepsilon$ wurde geglättet so dass die Funktion dort jetzt differenzierbar ist:

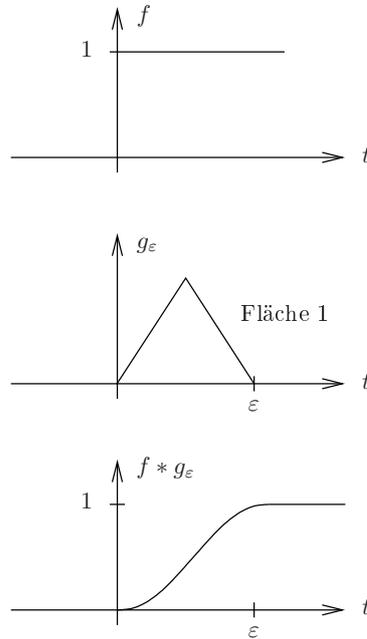
$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- Für $t < 0$ ist das Integral Null.
- Für $t > \varepsilon$ ist das Integral Eins.
- Für $0 \leq t \leq \varepsilon$ kann das Integral auf den Bereich $0 \dots t$ eingeschränkt werden und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau &= \int_0^t (2/\varepsilon - 2\tau/\varepsilon^2) d\tau \\ &= [2\tau/\varepsilon - \tau^2/\varepsilon^2]_0^t \\ &= 2t/\varepsilon - t^2/\varepsilon^2. \end{aligned}$$

In diesem Bereich ist $f * g_\varepsilon$ somit eine Parabel. Die Steigung bei $t = 0$ ist $2/\varepsilon$, was zu dem Knick an dieser Stelle führt. Die Steigung bei $t = \varepsilon$ ist Null, und damit ist die Funktion an dieser Stelle differenzierbar.

Beispiel 3.13 Ist g_ε ein Dreiecksimpuls der Breite $\varepsilon > 0$ mit Fläche 1, wird auch der Knick bei $t = 0$ geglättet.



Nun ist $f * g_\varepsilon$ überall differenzierbar, jedoch an den Stellen $t = 0$ und $t = \varepsilon$ nur einmal.

Für sehr kleine Werte von ε unterscheiden sich f und $f * g_\varepsilon$ nur im Bereich $[0, \varepsilon]$, d.h. beliebig wenig. In allen o.g. Beispielen gilt somit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

Wenn g_ε glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar ist, Fläche 1 hat, im Intervall $[0, \varepsilon]$ nicht negativ und Null sonst ist, ist $f * g_\varepsilon$ ebenfalls unendlich oft differenzierbar und unterscheidet sich von f beliebig wenig falls $\varepsilon \rightarrow 0$. Tatsächlich kann man so eine Funktion wie folgt konstruieren. Sei

$$u(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0. \end{cases}$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die n -te Ableitung die Form

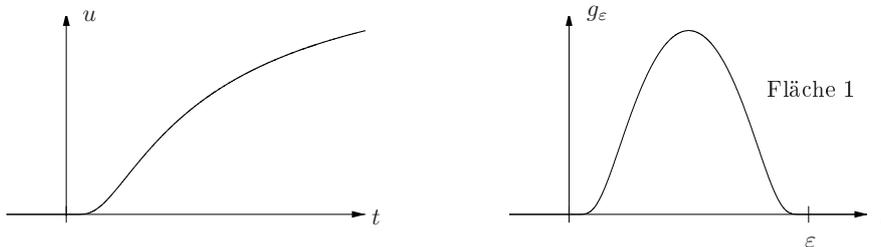
$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} r(t)e^{-1/t} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

hat, wobei $r(t)$ ein Polynom in $1/t$ ist. Folglich ist $u(t)$ unendlich oft differenzierbar. Damit ist auch

$$g(t) = u(t)u(\varepsilon - t)$$

überall unendlich oft differenzierbar mit $g(t) = 0$ für $t \notin [0, \varepsilon]$. Zum Schluss muss nur noch die Fläche auf 1 normiert werden durch

$$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt} g(t).$$



Dass die Faltung einer Funktion f mit g_ε eine Glättung bewirkt, kann man auch dadurch veranschaulichen, dass der Funktionswert von $f * g_\varepsilon$ an der Stelle t ein gewichteter Mittelwert von f im Intervall $[t - \varepsilon, t]$ ist, d.h. im ε -Bereich vor t . Es gilt

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(\tau) f(t - \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Zerlegt man das Intervall $[0, \varepsilon]$ in n Teilintervalle der Breite $\Delta\tau = \varepsilon/n$ kann man das Integral durch eine Summe approximieren und erhält

$$(f * g_\varepsilon)(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_\varepsilon(i\Delta\tau) f(t - i\Delta\tau) \Delta\tau.$$

Sei nun

$$g_i = g_\varepsilon(i\Delta\tau) \Delta\tau \quad f_i = f(t - i\Delta\tau), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Die f_i sind hierbei Abtastwerte von f im Intervall $[t - \varepsilon, t]$. Die Gewichte g_i sind nicht negativ und summieren sich näherungsweise zu Eins da

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i = \sum_{i=0}^{n-1} g_\varepsilon(i\Delta\tau) \Delta\tau \approx \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(\tau) d\tau = 1.$$

Damit kann

$$(f * g_\varepsilon)(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_i f_i$$

als gewichteter Mittelwert der Funktionswerte von f im Bereich $t - \varepsilon \dots t$ interpretiert werden. Für sehr kleines ε gilt damit

$$(f * g_\varepsilon)(t) \approx f(t)$$

falls f bei t stetig ist, d.h. keinen Sprung oder Ausreißer hat.

3.4 Dirac Impuls

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, dass man durch Faltung mit g_ε eine Funktion f glätten kann. Die entstehende Funktion $f * g_\varepsilon$ ist dann unendlich oft differenzierbar, auch wenn f Sprungstellen oder Knicke hat (die Existenz des Faltungsintegrals wird immer vorausgesetzt).

Die tatsächliche "Form" von g_ε ist dabei unerheblich. Wichtig ist nur, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

- g_ε ist unendlich oft differenzierbar,
- $g_\varepsilon(t) \geq 0$ für alle t und $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t \notin [0, \varepsilon]$,
- die Fläche unter g_ε ist 1, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Für sehr kleines $\varepsilon > 0$ sind $f * g_\varepsilon$ und f nahezu identisch. Man kann daher für praktische Anwendungen problemlos f durch $f * g_\varepsilon$ ersetzen und muss sich nicht mehr um Differenzierbarkeit kümmern. Tatsächlich gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t)$$

für alle t , an denen f stetig ist. Die beiden Operationen Glättung und Grenzwert heben sich somit gegenseitig auf.

$$\begin{array}{ccc}
 f & & \text{Originalbereich} \\
 \downarrow *g_\varepsilon & \uparrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \text{-----} \\
 f * g_\varepsilon & & \text{geglätteter Bereich}
 \end{array}$$

In vielen Anwendungen der Ingenieurwissenschaften ist der Funktionswert an einer Unstetigkeitsstelle irrelevant. Wir definieren daher eine "distributionelle Gleichheit" von Funktionen wenn diese nach beliebig geringfügiger Glättung gleich sind. Die Distributionentheorie ist u.a. die Grundlage für den Dirac Impuls. Aus Zeitgründen werden wir dieses Thema jedoch nur sehr informell streifen und stark vereinfachen. Eine gute Einführung in die Distributionentheorie findet man z.B. in [3] und [6].

Definition 3.14 (Distributionelle Gleichheit)

Zwei Funktionen f_1, f_2 heißen gleich als Distributionen wenn

$$f_1 * g_\varepsilon = f_2 * g_\varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Wenn zwei Funktionen im klassischen Sinn gleich sind, dann auch im distributionellen. Andererseits gibt es aber Funktionen, im distributionellen Sinn gleich sind, aber nicht im klassischen. Dies ist der Fall wenn sich zwei Funktionen nur an abzählbar vielen Stellen unterscheiden.

Beispiel 3.15 Sei

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$f_1(0) \neq f_2(0)$$

aber

$$f_1 * g_\varepsilon = f_2 * g_\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Damit sind f_1 und f_2 ungleich als Funktionen aber gleich als Distributionen.

Beispiel 3.16 Sei

$$f_1(t) = \sin(t) \quad \text{und} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{falls } t \notin \mathbb{Z} \\ 42 & \text{falls } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dann ist $f_1 \neq f_2$ aber

$$f_1 * g_\varepsilon = f_2 * g_\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Damit sind f_1 und f_2 ungleich als Funktionen aber gleich als Distributionen.

Im Folgenden werden wir nicht mehr zwischen Gleichheit und distributioneller Gleichheit unterscheiden und nur noch letztere verwenden. Wenn wir in Zukunft von einer Funktion f sprechen, meinen wir damit die Menge aller Funktionen, die gleich f sind im Sinne der distributionellen Gleichheit. Eine solche Äquivalenzklasse von Funktionen bezeichnen wir als Distribution.

Für infinitesimal kleines $\varepsilon > 0$ wird die Funktion $g_\varepsilon(t)$ mit dem Symbol $\delta(t)$ bezeichnet. Anschaulich handelt es sich um eine Funktion, die "Breite" Null, "Höhe" Unendlich und Fläche Eins hat – was somit natürlich keine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} sein kann. Tatsächlich ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

- **Fall $t = 0$.** Da g_ε stetig ist und $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t < 0$ muss auch $g_\varepsilon(0) = 0$ sein für alle $\varepsilon \neq 0$ und somit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(0) = 0$.
- **Fall $t < 0$.** Da $g_\varepsilon(t) = 0$ für alle $\varepsilon \neq 0$ gilt auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) = 0$.

- **Fall $t > 0$.** Da $g_\varepsilon(t) = 0$ für alle $\varepsilon < t$ gilt auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) = 0$.

Für uns ist damit $\delta(t)$ kein mathematisches Objekt sondern nur eine syntaktische Abkürzung für einen Grenzwert.³

Wenn in einem Term das Symbol $\delta(t)$ auftritt, ist damit der Grenzwert des Terms für $\varepsilon \rightarrow 0$ gemeint, wobei $\delta(t)$ in dem Term durch $g_\varepsilon(t)$ ersetzt wird.

Mit dieser Definition des Symbols $\delta(t)$ ist die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

trivialerweise korrekt.

Ein paar Beispiele, wie mit dem Dirac Impuls gerechnet werden kann.

Beispiel 3.17

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel 3.18

$$(f * \delta)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

Damit ist $f * \delta = f$, d.h. der Dirac Impuls ist das neutrale Element der Faltung. Die Gleichheit gilt nur im distributionellen Sinn, da i.a.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)(\hat{t}) \neq f(\hat{t})$$

falls f bei \hat{t} unstetig ist.

Beispiel 3.19

$$\begin{aligned} \sigma(t)\delta(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(t)g_\varepsilon(t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) \\ &= \delta(t). \end{aligned}$$

Damit ist $\sigma\delta = \delta$. Voraussetzung hierfür war, dass die Funktion $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t < 0$.

Diese Einschränkung wird in der Standard Distributionentheorie nicht getroffen, was zur Folge hat, dass $\sigma(t)\delta(t)$ dort undefiniert ist. Tatsächlich sind in dieser Theorie Produkte $f(t)\delta(t)$ nur definiert wenn $f(t)$ unendlich oft differenzierbar ist.

³In der Standard Distributionentheorie wird $\delta(t)$ tatsächlich definiert als linearer Operator.

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\sigma(t)\delta(-t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(t)g_\varepsilon(-t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Man darf also i.a. in einem Term $\delta(-t)$ nicht durch $\delta(t)$ ersetzen. In der Standard Distributionentheorie bedeutet $\delta(t)$ nicht nur eine syntaktische Abkürzung sondern ein mathematisches Objekt und es gilt hier $\delta(t) = \delta(-t)$.

Tatsächlich gilt

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(t) = 0$$

obwohl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Solche scheinbaren Widersprüche traten auch schon früher in der Differentialrechnung auf. Das Symbol dx wurde auch hier als Abkürzung für einen Grenzwert verwendet. Zum Beispiel gilt für die Ableitung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

obwohl

$$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Man darf somit scheinbar durch dx dividieren, obwohl $dx = 0$ ist. Die Erklärung ist, dass bei der Verwendung von dx der Grenzwert auf den *gesamten* Term angewandt werden muss.

Definition 3.20 (Differential)

Sei $T(dx)$ ein Term, indem dx auftritt und $T(\Delta x)$ der Term, der aus $T(dx)$ entsteht, indem man jedes Auftreten von dx durch Δx ersetzt. Dann ist $T(dx)$ definiert durch

$$T(dx) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} T(\Delta x).$$

Definition 3.21 (Dirac Impuls)

Sei $T(\delta)$ ein Term, in dem δ auftritt und $T(g_\varepsilon)$ der Term, der aus $T(\delta)$ entsteht, indem man jedes Auftreten von δ durch g_ε ersetzt. Dann ist $T(\delta)$ definiert durch

$$T(\delta) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} T(g_\varepsilon)$$

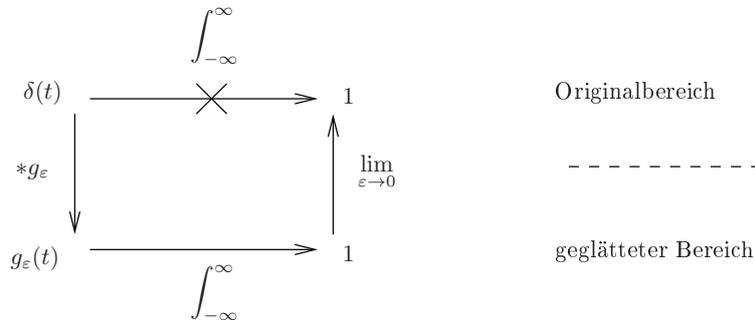
falls der Grenzwert den selben Wert für alle g_ε hat mit

- g_ε ist unendlich oft differenzierbar
- $g_\varepsilon(t) \geq 0$ für alle t und $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t \notin [0, \varepsilon]$
-

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Diese Definition des Dirac Impulses unterscheidet sich technisch von der, die in der Distributionentheorie allgemein verwendet wird, ist aber Dank der Analogie zur Differentialrechnung etwas leichter verständlich und für unsere Anwendungen vorteilhaft.

Durch Glättung (Faltung mit g_ε) verlagern wir ein Problem vom Originalbereich in den geglätteten Bereich, lösen es dort und transformieren das Ergebnis durch Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ wieder zurück.



Informell wird der Dirac Impuls oft “definiert” durch

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund des Funktionswerts ∞ bei $t = 0$ führt das Rechnen mit dem Dirac Impuls nach dieser “Definition” zu undefinierten Ergebnissen und Widersprüchen. So hat z.B. die Fläche unter dem Dirac Impuls Breite Null aber Höhe Unendlich aber $0\infty \neq 1$. Weiterhin würde aus o.g. “Definition” $\delta(t) = 2\delta(t)$ folgen, was aber nicht stimmt. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 2$$

und somit muss $\delta(t) \neq 2\delta(t)$ sein.

3.5 Verallgemeinerte Ableitung

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar. Was ist die Ableitung der geglätteten Sprungfunktion? Nach Theorem 3.10 bewirkt Faltung mit $\sigma(t)$ eine Integration. Folglich gilt

$$\begin{aligned} (\sigma * g_\varepsilon)'(t) &= \left(\int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau \right)' \\ &= (G_\varepsilon(t) - G_\varepsilon(-\infty))' \\ &= G'_\varepsilon(t) \\ &= g_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Nimmt man den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ auf beiden Seiten erhält man

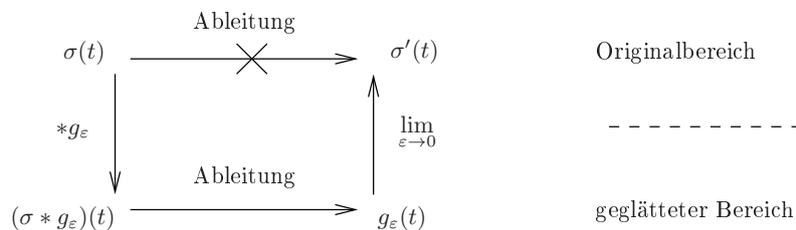
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma * g_\varepsilon)'(t) = \delta(t),$$

was vereinfacht geschrieben wird als

$$\sigma'(t) = \delta(t).$$

Anschaulich macht das auch Sinn: Die Steigung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ ist überall Null und an der Sprungstelle selbst unendlich.

Mit $\sigma'(t)$ ist hier die verallgemeinerte oder distributionelle Ableitung gemeint: Die Funktion wird erst durch Faltung mit g_ε geglättet, das Ergebnis abgeleitet und anschließend mit Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ zurücktransformiert.



Definition 3.22 (Verallgemeinerte Ableitung)

Die verallgemeinerte (oder distributionelle) Ableitung $f'(t)$ einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f'(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (f * g_\varepsilon)'(t).$$

Für differenzierbare Funktionen liefert die verallgemeinerte Ableitung das gleiche Ergebnis wie die normale Ableitung. In diesem Sinne ist die distributionelle Ableitung tatsächlich nur eine Erweiterung des Ableitungsbegriffs auf nicht differenzierbare Funktionen.

Interessant ist der Fall wenn f einen Knick hat, d.h. linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert der Ableitung ungleich ist. Der Funktionswert der verallgemeinerten Ableitung ist dann an dieser Stelle der *linksseitige* Grenzwert, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.23 Die Funktion $f(t) = |t|$ hat einen Knick bei $t = 0$ und ist dort nicht differenzierbar. Für die einseitigen Grenzwerte der Ableitung gilt

$$f'(0^-) = -1, \quad f'(0^+) = 1.$$

Um Differenzierbarkeit von $f * g_\varepsilon$ zu erreichen, genügt ein Rechteckimpuls

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |t - \tau| d\tau. \end{aligned}$$

- Falls $t > \varepsilon$ ist im Integrationsbereich $\tau < t$ und $|t - \tau| = t - \tau$.

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [t\tau - \tau^2/2]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (t\varepsilon - \varepsilon^2/2) \\ &= t - \varepsilon/2. \end{aligned}$$

- Falls $t < 0$ ist im Integrationsbereich $\tau > t$ und $|t - \tau| = \tau - t$.

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\tau - t) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\tau^2/2 - t\tau]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2/2 - t\varepsilon) \\ &= \varepsilon/2 - t. \end{aligned}$$

- Falls $0 \leq t \leq \varepsilon$ muss das Integral aufgespalten werden.

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t (t - \tau) d\tau + \int_t^\varepsilon (\tau - t) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left([t\tau - \tau^2/2]_0^t + [\tau^2/2 - t\tau]_t^\varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (t^2 - t^2/2 + \varepsilon^2/2 - t\varepsilon - t^2/2 + t^2) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2/2 - t\varepsilon + t^2) \\ &= \varepsilon/2 - t + t^2/\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist

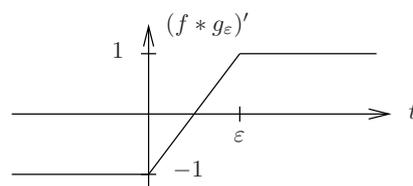
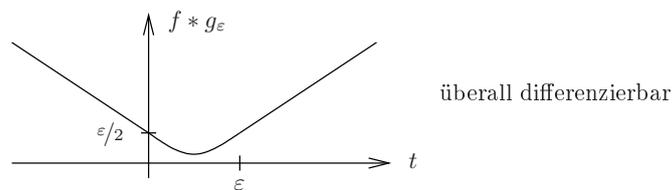
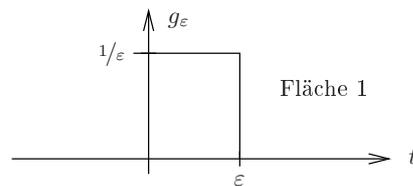
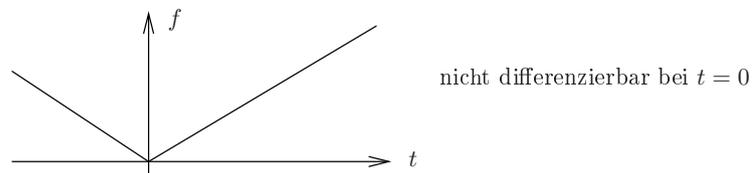
$$(f * g_\varepsilon)(t) = \begin{cases} \varepsilon/2 - t & \text{falls } t < 0 \\ \varepsilon/2 - t + t^2/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ t - \varepsilon/2 & \text{falls } t > \varepsilon \end{cases}$$

$$(f * g_\varepsilon)'(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ -1 + 2t/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & \text{falls } t > \varepsilon. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Ableitung von f an der Knickstelle $t = 0$ ist somit der *linksseitige* Grenzwert von f' bei $t = 0$.

$$f'(0) = (f * g_\varepsilon)'(0) = -1 = f'(0^-)$$

Der Grund hierfür ist, dass $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t < 0$ gefordert wird.



In vielen Situationen kann man die bekannten Ableitungsregeln auch auf die verallgemeinerte Ableitung anwenden. Es gibt allerdings Ausnahmen, wie folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 3.24 Für alle t gilt

$$\sin(\sigma(t)) = \sigma(t) \sin(1).$$

Leitet man beide Seiten unter Verwendung der Kettenregel ab, erhält man

$$\cos(\sigma(t))\delta(t) = \sin(1)\delta(t).$$

Das kann jedoch nicht sein. Ersetzt man $\delta(t)$ wieder durch $g_\varepsilon(t)$ würde hieraus für alle $t \geq 0$ folgen, dass

$$g_\varepsilon(t) \cos(1) = g_\varepsilon(t) \sin(1).$$

Der Unterschied kommt daher, dass bei der verallgemeinerten Ableitung von verketteten Funktionen zwei Operationen im Spiel sind, deren Reihenfolge nicht vertauscht werden darf: Die Glättung durch Faltung mit g_ε und die Komposition.

- Wird zuerst σ geglättet und dann die sin-Funktion angewandt, erhält man die Funktion

$$\sin \circ (\sigma * g_\varepsilon)$$

mit der Ableitung

$$\begin{aligned} \cos(\sigma * g_\varepsilon)(\sigma * g_\varepsilon)' &= \cos(\sigma * g_\varepsilon)g_\varepsilon \\ &\rightarrow \cos(\sigma)\delta. \end{aligned}$$

Dieser Weg würde bei der Kettenregel eingeschlagen werden, da man zur Berechnung der inneren Ableitung die innere Funktion *zuerst* glätten muss.

- Wird zuerst sin auf σ angewandt und dann geglättet, erhält man

$$\begin{aligned} (\sin \circ \sigma) * g_\varepsilon &= (\sin(1)\sigma) * g_\varepsilon \\ &= \sin(1)(\sigma * g_\varepsilon) \end{aligned}$$

mit der Ableitung

$$\begin{aligned} \sin(1)(\sigma * g_\varepsilon)' &= \sin(1)g_\varepsilon \\ &\rightarrow \sin(1)\delta. \end{aligned}$$

Die Kettenregel muss daher eingeschränkt werden auf den Fall, dass die innere Funktion differenzierbar ist.

Beispiel 3.25 Für alle t gilt

$$\sigma(t)\sigma(t) = \sigma(t).$$

Leitet man die linke Seite mit der Produktregel ab, erhält man

$$\begin{aligned}(\sigma(t)\sigma(t))' &= \delta(t)\sigma(t) + \sigma(t)\delta(t) \\ &= 2\delta(t).\end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$\sigma(t)' = \delta(t).$$

Auch hier kommt das Problem daher, dass im ersten Fall zuerst geglättet und dann multipliziert wurde während im zweiten Fall zuerst multipliziert und dann geglättet wurde.

Die Produktregel muss daher eingeschränkt werden auf den Fall, dass mindestens ein Faktor differenzierbar ist.

3.6 Ausblendeigenschaft

Nachdem bisher die Faltung einer Funktion f mit einem schmalen Impuls g_ε untersucht wurde, geht es nun um die Multiplikation.

Falls f bei $t = 0$ stetig ist, gilt für kleine ε die Näherung

$$f(t)g_\varepsilon(t) \approx f(0)g_\varepsilon(t) \quad \text{für alle } t.$$

- Für $t \notin [0, \varepsilon]$ sind beide Seiten der Gleichung Null, da dort $g_\varepsilon(t) = 0$ ist.
- Für $t \in [0, \varepsilon]$ ist $f(t) \approx f(0)$, da dort $t \approx 0$ und f bei $t = 0$ stetig ist.

Der Spezialfall $t = 0$ lässt sich verallgemeinern. Falls f bei $t = \hat{t}$ stetig ist, gilt für kleines ε die Näherung

$$f(t)g_\varepsilon(t - \hat{t}) \approx f(\hat{t})g_\varepsilon(t - \hat{t}) \quad \text{für alle } t.$$

- Für $t \notin [\hat{t}, \hat{t} + \varepsilon]$ sind beide Seiten der Gleichung Null, da dort $g_\varepsilon(t - \hat{t}) = 0$ ist.
- Für $t \in [\hat{t}, \hat{t} + \varepsilon]$ ist $f(t) \approx f(\hat{t})$, da dort $t \approx \hat{t}$ und f bei $t = \hat{t}$ stetig ist.

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ sind beide Seiten gleich.

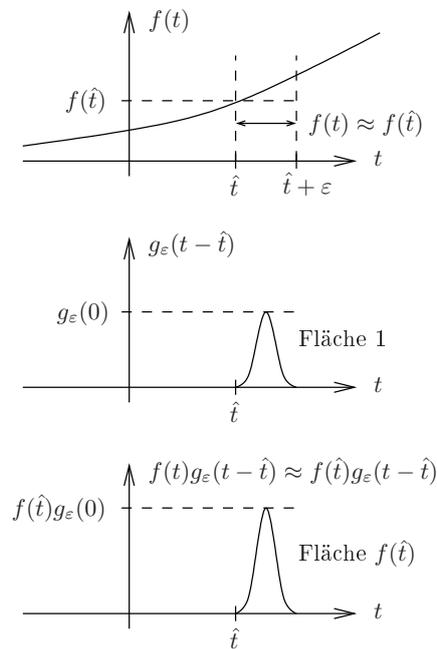
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t)g_\varepsilon(t - \hat{t}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\hat{t})g_\varepsilon(t - \hat{t})$$

bzw.

$$f(t)\delta(t - \hat{t}) = f(\hat{t})\delta(t - \hat{t})$$

für alle t und \hat{t} sofern f bei \hat{t} stetig ist.

Diese Gleichung ist immer dann nützlich, wenn man ein Produkt von einer Funktion $f(t)$ mit einem um \hat{t} verschobenen Dirac Impuls hat. In diesem Fall kann man die *Funktion* $f(t)$ durch die *Konstante* $f(\hat{t})$ ersetzen.



Wenn f stetig bei \hat{t} ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\hat{t})dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{t})\delta(t-\hat{t})dt \\
 &= f(\hat{t}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\hat{t})dt \\
 &= f(\hat{t}).
 \end{aligned}$$

Theorem 3.26 (Ausblendeigenschaft)

Sei f an der Stelle \hat{t} stetig. Dann gilt für alle t

$$\begin{aligned}
 f(t)\delta(t-\hat{t}) &= f(\hat{t})\delta(t-\hat{t}) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\hat{t})dt &= f(\hat{t}).
 \end{aligned}$$

Die wichtigsten Rechengesetze für den Dirac Impuls sind im Anhang auf Seite 169 zusammengefasst.

Beispiel 3.27 Sei $f(t) = \sigma(t) \cos(t)$. Dann gilt mit der Produktregel der Ableitung und der Ausblendeigenschaft

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t) \cos(t) - \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t) \cos(0) - \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t) - \sigma(t) \sin(t). \end{aligned}$$

Der Sprung in $f(t)$ führte zu einem Impuls in $f'(t)$.

Berechnet man von $f'(t)$ wiederum das unbestimmte Integral, erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int (\delta(t) - \sigma(t) \sin(t)) dt &= \int \delta(t) dt - \int \sigma(t) \sin(t) dt \\ &= \sigma(t) - \left(\sigma(t)(-\cos(t)) - \int \delta(t)(-\cos(t)) dt \right) \\ &= \sigma(t) + \sigma(t) \cos(t) - \int \delta(t) \cos(t) dt \\ &= \sigma(t) + \sigma(t) \cos(t) - \int \delta(t) \cos(0) dt \\ &= \sigma(t) + \sigma(t) \cos(t) - \sigma(t) \\ &= \sigma(t) \cos(t). \end{aligned}$$

Beispiel 3.28 Sei

$$f(t) = \sigma(t) \sin(t).$$

Die Funktion hat einen Knick bei $t = 0$ und ist dort nicht differenzierbar. Mit der Produktregel und der Ausblendeigenschaft ist dann

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t) \sin(t) + \sigma(t) \cos(t) \\ &= \delta(t) \sin(0) + \sigma(t) \cos(t) \\ &= \sigma(t) \cos(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \cos(t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Würde man $f(t)$ zuerst durch Faltung mit g_ε glätten und dann ableiten erhielte man hingegen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_\varepsilon)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \cos(t) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Da sich die beiden Ableitungen jedoch nur in einem Punkt $t = 0$ unterscheiden, sind sie gleich im distributionellen Sinn.

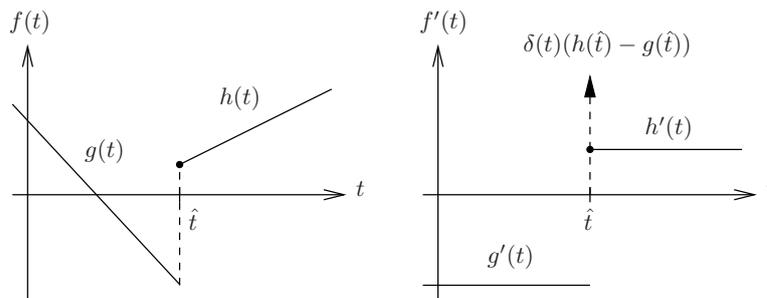
Beispiel 3.29 Mit der Ausblendeigenschaft und der verallgemeinerten Ableitung lassen sich generell auch Funktionen mit Sprungstellen ableiten. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} g(t) & \text{für } t < \hat{t} \\ h(t) & \text{für } t \geq \hat{t} \end{cases} \\ &= g(t) + \sigma(t - \hat{t})(h(t) - g(t)). \end{aligned}$$

Weiter seien g und h an der Stelle \hat{t} stetig, nur f hat dort aufgrund der Fallunterscheidung einen Sprung der Höhe $h(\hat{t}) - g(\hat{t})$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) + \delta(t - \hat{t})(h(t) - g(t)) + \sigma(t - \hat{t})(h'(t) - g'(t)) \\ &= g'(t) + \delta(t - \hat{t})(h(\hat{t}) - g(\hat{t})) + \sigma(t - \hat{t})(h'(t) - g'(t)) \\ &= \delta(t - \hat{t})(h(\hat{t}) - g(\hat{t})) + \begin{cases} g'(t) & \text{falls } t < \hat{t} \\ h'(t) & \text{falls } t \geq \hat{t}. \end{cases} \end{aligned}$$

An der Sprungstelle entsteht somit bei der Ableitung ein Impuls multipliziert mit der Sprunghöhe.



4 Lineare zeitinvariante Systeme

Die in Kapitel 3.1 genannten Beispiele lassen sich als Systeme interpretieren, die ein Eingangssignal f in ein Ausgangssignal h transformieren. Ein System S ist für uns also eine Funktion von Funktionen.

$$f \rightarrow \boxed{\text{System } S} \rightarrow h = S(f)$$

Es wäre falsch zu schreiben $h(t) = S(f(t))$, da S als Argument keine *Zahl* $f(t)$ sondern eine *Funktion* f nimmt, und als Funktionswert keine *Zahl* $h(t)$ sondern eine *Funktion* h zurückgibt. In Ordnung wäre auch

$$h(t) = [S(f)](t) \quad \text{für alle } t.$$

Die Beispielsysteme in Kapitel 3.1 erfüllen zumindest näherungsweise zwei wichtige Eigenschaften, die Linearität und die Zeitinvarianz. Wie bereits im letzten Kapitel bezeichne ein Index \hat{t} an einer Funktion die Verschiebung der Funktion um \hat{t} .

Definition 4.1 Lineare zeitvariante Systeme

Ein System S heißt *linear*, wenn für alle $f, f_1, f_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= aS(f). \end{aligned}$$

Es heißt *zeitinvariant*, wenn für alle $\hat{t} \in \mathbb{R}$ gilt

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}.$$

- Linearität

$$\begin{array}{ccc} f_1, f_2 & \xrightarrow{+} & f_1 + f_2 \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ S(f_1), S(f_2) & \xrightarrow{+} & S(f_1 + f_2) \\ & & = \\ & & S(f_1) + S(f_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\cdot a} & af \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ S(f) & \xrightarrow{\cdot a} & S(af) \\ & & = \\ & & aS(f) \end{array}$$

- Zeitinvarianz

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\text{Verschiebung um } \hat{t}} & f_{\hat{t}} \\
 S \downarrow & & \downarrow S \\
 S(f) & \xrightarrow{\text{Verschiebung um } \hat{t}} & S(f_{\hat{t}}) \\
 & & = \\
 & & S(f)_{\hat{t}}
 \end{array}$$

Die Eigenschaften Linearität und Zeitinvarianz sind bereits im letzten Kapitel im Zusammenhang mit der Faltung aufgetreten und werden mit LTI abgekürzt (Linear Time Invariant). In der Tat ist ein System linear und zeitinvariant, genau dann wenn es durch eine Faltung beschrieben werden kann.

Theorem 4.2

Ein System S ist linear und zeitinvariant genau dann wenn es eine Funktion g gibt, so dass

$$S(f) = f * g.$$

Die Funktion g ist hierbei die Impulsantwort des Systems, d.h.

$$g = S(\delta).$$

Beweis.

- Sei g eine Funktion und S definiert durch

$$S(f) = f * g \quad \text{für alle } f.$$

Zu zeigen ist, dass S linear und zeitinvariant ist. Mit dem was wir im letzten Abschnitt über die Faltung gelernt haben, ist dies einfach:

$$\begin{aligned}
 S(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2) * g \\
 &= f_1 * g + f_2 * g \\
 &= S(f_1) + S(f_2) \\
 S(af) &= (af) * g \\
 &= a(f * g) \\
 &= aS(f) \\
 S(f_{\hat{t}}) &= f_{\hat{t}} * g \\
 &= (f * g)_{\hat{t}} \\
 &= S(f)_{\hat{t}}.
 \end{aligned}$$

- Sei S ein lineares, zeitinvariantes System. Zu zeigen ist, dass es eine Funktion g gibt, so dass

$$S(f) = f * g \quad \text{für alle } f.$$

Zunächst ist klar, dass g die Impulsantwort des Systems sein muss, denn

$$S(\delta) = \delta * g = g.$$

Da der Dirac Impuls das neutrale Element der Faltung ist, gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_{\tau}(t) d\tau \\ f &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Hierbei sind f und δ_{τ} Funktionen, während $f(\tau)$ eine Zahl ist. Anschaulich bedeutet diese Gleichung, dass man jede Funktion f in eine Summe (bzw. Integral) von infinitesimal kleinen Impulsen $\delta_{\tau} d\tau$ an der Stelle τ gewichtet mit dem Funktionswert von f an der Stelle τ zerlegen kann.

Somit gilt

$$S(f) = S\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_{\tau} d\tau\right).$$

Interpretiert man das Integral näherungsweise als Summe, erhält man mit der ersten Linearitätsbedingung von S

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f(\tau) \delta_{\tau}) d\tau.$$

Da $f(\tau)$ und $d\tau$ Zahlen sind, folgt aus der zweiten Linearitätsbedingung von S

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) S(\delta_{\tau}) d\tau.$$

Da S zeitinvariant ist, gilt $S(\delta_{\tau}) = S(\delta)_{\tau}$ und damit

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) S(\delta)_{\tau} d\tau.$$

Hierbei ist $S(\delta) = g$ die Impulsantwort des Systems. Damit gilt

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_{\tau} d\tau$$

bzw.

$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_{\tau}(t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= (f * g)(t) \end{aligned}$$

und damit $S(f) = f * g$. \square

Wir haben damit gezeigt, dass es sich bei der Faltung und bei linearen zeitinvarianten Systemen um das selbe Konzept handelt. Dies ist der selbe Zusammenhang wie zwischen Matrizen und linearen Funktionen:

- Eine lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist vollständig durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren bzw. durch die Matrix

$$A = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$$

beschrieben. Es gilt dann

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Ein lineares zeitinvariantes System S ist vollständig durch die Impulsantwort

$$g = S(\delta)$$

beschrieben. Es gilt dann

$$S(f) = f * g \quad \text{für alle } f.$$

Der Dirac Impuls bei LTI Systemen entspricht den kanonischen Basisvektoren bei linearen Funktionen, die Impulsantwort der Matrix. Man fragt sich natürlich, weshalb bei den linearen Funktionen n Funktionswerte $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)$ zur Beschreibung erforderlich sind, bei LTI Systemen aber nur ein Funktionswert $S(\delta)$. Dies liegt an der zusätzlichen Forderung der Zeitinvarianz, die wir bei linearen Funktionen ja nicht stellen. Würde diese bei LTI Systemen auch entfallen, bräuchte man zur vollständigen Beschreibung eines solchen Systems nicht nur den Funktionswert $S(\delta)$ sondern $S(\delta_\tau)$ für alle τ .

Zeitinvarianz ist in den meisten Anwendungen aber gegeben. In den genannten Beispielen bedeutet dies z.B. dass die elektronischen Bauteile nicht altern oder dass sich die akustischen Eigenschaften des Raums nicht ändern z.B. indem eine Wand eingezogen wird.

4.1 Beispiele für lineare zeitinvariante Systeme

In der Mathematik sind uns bereits diverse Funktionen von Funktionen begegnet wie z.B. Ableitung. Die meisten davon sind linear und zeitinvariant und können daher durch eine Faltung mit einer Impulsantwort beschrieben werden.

Beispiel 4.3 (Identität.)

Beginnen wir mit dem trivialen System S , das nichts tut, d.h.

$$S(f) = f, \quad \text{für alle Funktionen } f.$$

Dieses System ist linear und zeitinvariant, da

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= f_1 + f_2 \\ &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= af \\ &= aS(f) \\ S(f_{\hat{t}}) &= f_{\hat{t}} \\ &= S(f)_{\hat{t}} \end{aligned}$$

Die Impulsantwort $S(\delta)$ dieses Systems steht sofort da:

$$S(\delta) = \delta.$$

Da $S(f) = f * \delta$ folgt

$$f * \delta = f$$

was ja nichts anderes besagt, als das δ das neutrale Element der Faltung ist.

Beispiel 4.4 (Verzögerung.)

Fast genauso einfach ist ein System, das die Eingabefunktion f nur um einen bestimmten Betrag \hat{t} verzögert.

$$S(f) = f_{\hat{t}}.$$

Mit der Zeitinvarianz und dem neutralen Element der Faltung gilt

$$\begin{aligned} S(f) &= S(f * \delta) \\ &= (f * \delta)_{\hat{t}} \\ &= f * \delta_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

Da das System eine Faltung mit $\delta_{\hat{t}}$ durchführt, muss es linear und zeitinvariant sein. Seine Impulsantwort ist $\delta_{\hat{t}}$. Eine Verschiebung kann somit durch Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls bewirkt werden.

Beispiel 4.5 (Addition einer Konstanten.)

Ein System, das zur Eingangsfunktion $f(t)$ eine Konstante $u \neq 0$ addiert, d.h.

$$[S(f)](t) = f(t) + u.$$

ist *nicht* linear. Es gilt

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2)(t) &= (f_1 + f_2)(t) + u \\ &= f_1(t) + f_2(t) + u \\ S(f_1)(t) + S(f_2)(t) &= f_1(t) + u + f_2(t) + u \\ &= f_1(t) + f_2(t) + 2u. \end{aligned}$$

Folglich kann es auch keine Funktion g geben mit $f(t) + u = (f * g)(u)$.

Das System ist aber zeitinvariant. Für alle t gilt

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(t) + u \\ &= f(t - \hat{t}) + u \\ &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= [S(f)]_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$S(f_{\hat{t}}) = [S(f)]_{\hat{t}}.$$

Beispiel 4.6 (Verstärker.)

Ein System, das die Eingangsfunktion $f(t)$ mit einer *Konstanten* u multipliziert, d.h.

$$S(f) = uf$$

ist linear und zeitinvariant. Mit den Rechengesetzen der Faltung gilt $S(f) = f * (u\delta)$, d.h. das System führt eine Faltung mit $u\delta$ durch.

Beispiel 4.7

Sei S ein System, das die Eingangsfunktion $f(t)$ mit einer *Funktion* $u(t)$ multipliziert, d.h.

$$[S(f)](t) = u(t)f(t).$$

Das System ist immer noch linear:

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= u(f_1 + f_2) \\ &= uf_1 + uf_2 \\ &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= u(af) \\ &= a(uf) \\ &= aS(f). \end{aligned}$$

Das System ist aber *nicht* mehr zeitinvariant:

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= u(t)f_{\hat{t}}(t) \\ &= u(t)f(t - \hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= u(t - \hat{t})f(t - \hat{t}). \end{aligned}$$

Es gibt also keine Funktion g mit $uf = f * g$ für alle f .

Beispiel 4.8 (Stauchung in Zeitrichtung.)

Ein System, das die Eingangsfunktion $f(t)$ in Zeitrichtung um Faktor u staucht, d.h.

$$[S(f)](t) = f(ut)$$

ist linear:

$$\begin{aligned} [S(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)(ut) \\ &= f_1(ut) + f_2(ut) \\ &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\ &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\ [S(af)](t) &= (af)(ut) \\ &= a f(ut) \\ &= a [S(f)](t) \\ &= [aS(f)](t). \end{aligned}$$

Es ist aber nicht zeitinvariant: Verschiebt man zuerst und staucht dann, erhält man

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(ut) \\ &= f(ut - \hat{t}). \end{aligned}$$

Den letzten Schritt erhält man aus $f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$ indem man auf beiden Seiten t durch ut ersetzt. Staucht man zuerst und verschiebt dann, erhält man

$$\begin{aligned} [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= f(u(t - \hat{t})). \end{aligned}$$

Den letzten Schritt erhält man aus $[S(f)](t) = f(ut)$ indem man auf beiden Seiten t durch $t - \hat{t}$ ersetzt.

Beispiel 4.9 (Zeitumkehr.)

Das System, das die Eingangsfunktion zeitlich umdreht, d.h.

$$S(f) = f^-$$

mit

$$f^-(t) = f(-t)$$

ist linear:

$$\begin{aligned} [S(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)(-t) \\ &= f_1(-t) + f_2(-t) \\ &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\ &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\ [S(af)](t) &= (af)(-t) \\ &= af(-t) \\ &= a[S(f)](t) \\ &= [aS(f)](t) \end{aligned}$$

Es ist aber nicht zeitinvariant. Aus

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

erhält man

$$f_{\hat{t}}(-t) = f(-t - \hat{t})$$

und damit

$$[S(f_{\hat{t}})](t) = f_{\hat{t}}(-t) = f(-t - \hat{t}).$$

Aus

$$[S(f)](t) = f(-t)$$

erhält man

$$\begin{aligned} [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= f(-(t - \hat{t})) \\ &= f(-t + \hat{t}) \end{aligned}$$

und damit

$$S(f)_{\hat{t}} \neq S(f_{\hat{t}}).$$

Beispiel 4.10 (Differenzierer.)

Das nächste System ist die Ableitung

$$S(f) = f'.$$

Die Linearität folgt direkt aus der Summenregel und der konstanten Faktor Regel der Ableitung.

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)' \\ &= f_1' + f_2' \\ &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= (af)' \\ &= af' \end{aligned}$$

Das System ist auch zeitinvariant. Sei $g(t) = t - \hat{t}$ mit $g'(t) = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{\hat{t}}(t) &= f(t - \hat{t}) \\ &= (f \circ g)(t) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= (f_{\hat{t}})'(t) \\ &= (f \circ g)'(t) \\ &= f'(g(t))g'(t) \\ &= f'(t - \hat{t}) \\ &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= [S(f)]_{\hat{t}}(t) \end{aligned}$$

Das hätte man einfacher haben können, wenn man sich klar macht, dass es egal ist ob man eine Funktion erst ableitet und dann verschiebt oder erst verschiebt und dann ableitet, d.h. $(f')_{\hat{t}} = (f_{\hat{t}})'$.

Die Impulsantwort $S(\delta)$ dieses Systems ist

$$S(\delta) = \delta'.$$

Da $S(f) = f * \delta'$ folgt

$$f' = f * \delta'.$$

Man kann eine Funktion also dadurch ableiten, dass man sie mit δ' faltet.

An dieser Stelle sollte man sich nochmal bewusst machen, dass δ nur eine Abkürzung für g_ε und Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ ist. Die Gleichung

$$f' = f * \delta'$$

gilt somit nur im geglätteten Bereich, d.h. wenn man auf der linken Seite mit g_ε glättet und auf der rechten Seite δ durch g_ε ersetzt. Man erhält dann

$$f' * g_\varepsilon = f * g_\varepsilon',$$

was sich leicht mit partieller Integration zeigen lässt.

Beispiel 4.11 (Integrierer.)

Auch das bestimmte Integral kann als System betrachtet werden:

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Damit liefert $S(f)$ die Stammfunktion F von f mit $F(-\infty) = 0$.

Laut Theorem 3.10 auf Seite 61 gilt

$$(f * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau,$$

d.h.

$$S(f) = f * \sigma.$$

Das System kann also durch eine Faltung mit Impulsantwort σ realisiert werden und ist damit LTI.

Die Eigenschaften können aber auch direkt gezeigt werden:

$$\begin{aligned} [S(f_1 + f_2)](t) &= \int_{-\infty}^t (f_1 + f_2)(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t (f_1(\tau) + f_2(\tau)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \\ &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\ [S(af)](t) &= \int_{-\infty}^t (af)(\tau) d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \\ &= [aS(f)](t) \\ [S(f_{\hat{t}})](t) &= \int_{-\infty}^t f_{\hat{t}}(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau \quad \text{Substitution } u = \tau - \hat{t} \\ &= \int_{-\infty}^{t-\hat{t}} f(u) du \\ &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= [S(f)]_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

Beispiel 4.12 (Lineare DGL.)

Erinnern Sie sich noch an die linearen Differentialgleichungen von Kapitel 2.6? Nach einer Umbenennung der Variablen (sorry), erhalten wir die DGL

$$h'(t) + s(t)h(t) = f(t), \quad h(-\infty) = 0.$$

Wie immer interpretieren wir $f(t)$ als Eingabefunktion des Systems und $h(t)$ als Ausgabefunktion. Damit gilt $S(f) = h$ genau dann wenn h die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems mit rechter Seite f ist.

Dieses System S ist tatsächlich linear – daher der Name *lineare* DGL.

- Sei

$$S(f_1) = h_1 \text{ und } S(f_2) = h_2.$$

Das heißt

$$\begin{aligned} h_1'(t) + s(t)h_1(t) &= f_1(t), & h_1(-\infty) &= 0 \\ h_2'(t) + s(t)h_2(t) &= f_2(t), & h_2(-\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} h_1'(t) + h_2'(t) + s(t)h_1(t) + s(t)h_2(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ (h_1 + h_2)'(t) + s(t)(h_1 + h_2)(t) &= (f_1 + f_2)(t). \end{aligned}$$

Damit ist $h_1 + h_2$ eine Lösung der DGL mit rechter Seite $f_1 + f_2$. Weiterhin erfüllt $h_1 + h_2$ die die Anfangsbedingung

$$(h_1 + h_2)(-\infty) = h_1(-\infty) + h_2(-\infty) = 0.$$

Folglich gilt

$$S(f_1 + f_2) = h_1 + h_2 = S(f_1) + S(f_2).$$

Wäre als Anfangswert nicht Null festgelegt worden, wäre das System nicht linear, da $h_1 + h_2$ die Anfangsbedingung nicht erfüllen würde.

- Sei

$$S(f) = h \text{ und } a \in \mathbb{R}.$$

Das heißt

$$h'(t) + s(t)h(t) = f(t), \quad h(-\infty) = 0.$$

Multipliziert man beide Seiten mit a erhält man

$$\begin{aligned} ah'(t) + s(t)ah(t) &= af(t) \\ (ah)'(t) + s(t)(ah)(t) &= (af)(t). \end{aligned}$$

Damit ist ah eine Lösung der DGL mit rechter Seite af . Weiterhin erfüllt ah die Anfangsbedingung

$$(ah)(-\infty) = ah(-\infty) = 0.$$

Folglich gilt

$$S(af) = ah = aS(f).$$

- Das System ist jedoch *nicht* zeitinvariant: Das System wird u.a. durch die Funktion $s(t)$ beschrieben. Somit hängen nicht nur Ein- und Ausgangssignal von der Zeit ab sondern das System selbst. Sei

$$S(f) = h \text{ und } \hat{t} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$S(f)_{\hat{t}} = h_{\hat{t}}.$$

Wenn S zeitinvariant wäre, müsste $h_{\hat{t}} = S(f_{\hat{t}})$ sein. Das heißt $h_{\hat{t}}$ müsste Lösung des Anfangswertproblems mit rechter Seite $f_{\hat{t}}$ sein, also

$$h'_{\hat{t}}(t) + s(t)h_{\hat{t}}(t) = f_{\hat{t}}(t), \quad h_{\hat{t}}(-\infty) = 0.$$

Dies ist aber nicht so. Gehen wir von $S(f) = h$ aus, d.h.

$$h'(t) + s(t)h(t) = f(t).$$

Da dies für alle t gilt, kann man auf beiden Seiten t durch $t - \hat{t}$ ersetzen und erhält

$$\begin{aligned} h'(t - \hat{t}) + s(t - \hat{t})h(t - \hat{t}) &= f(t - \hat{t}) \\ h'_{\hat{t}}(t) + s_{\hat{t}}(t)h_{\hat{t}}(t) &= f_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung steht aber $s_{\hat{t}}(t)$ an Stelle von $s(t)$!

Damit das System tatsächlich zeitinvariant ist, müsste $s = s_{\hat{t}}$ sein für alle \hat{t} und das klappt nur, wenn $s(t)$ konstant ist. Daher die wichtige Klasse der linearen DGL mit *konstanten* Koeffizienten, die wir im nächsten Beispiel betrachten.

Beispiel 4.13 (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.) Kommen wir zu den linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Kapitel 2.9 zurück. Auch hier benennen wir die Variablen um und erhalten

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 h(t) = f(t).$$

Damit die Lösung $h(t)$ eindeutig ist, fordern wir Anfangsbedingungen

$$h(-\infty) = h'(-\infty) = \dots = h^{(n-1)}(-\infty) = 0.$$

Damit erhalten wir wieder ein System S , das jeder rechten Seite f eine eindeutige Lösungsfunktion h zuweist, die die Anfangsbedingungen erfüllt.

- Sei $S(f_1) = h_1$ und $S(f_2) = h_2$, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i h_1^{(i)}(t) &= f_1(t), & h_1^{(i)}(-\infty) &= 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \\ \sum_{i=0}^n a_i h_2^{(i)}(t) &= f_2(t), & h_2^{(i)}(-\infty) &= 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i h_1^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^n a_i h_2^{(i)}(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ \sum_{i=0}^n a_i (h_1^{(i)}(t) + h_2^{(i)}(t)) &= f_1(t) + f_2(t) \\ \sum_{i=0}^n a_i (h_1 + h_2)^{(i)}(t) &= (f_1 + f_2)(t). \end{aligned}$$

Damit ist $h_1 + h_2$ eine Lösung der DGL mit rechter Seite $f_1 + f_2$, die die Anfangsbedingungen

$$(h_1 + h_2)^{(i)}(-\infty) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

erfüllt. Folglich ist $S(f_1 + f_2) = h_1 + h_2 = S(f_1) + S(f_2)$.

- Sei $S(f) = h$ und $u \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) = f(t), \quad h^{(i)}(-\infty) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1.$$

Multipliziert man beide Seiten mit u erhält man

$$\begin{aligned} u \sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) &= u f(t) \\ \sum_{i=0}^n a_i (uh)^{(i)}(t) &= u f(t). \end{aligned}$$

Damit ist uh eine Lösung der DGL mit rechter Seite uf , die die Anfangsbedingungen

$$(uh)^{(i)}(-\infty) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

erfüllt. Folglich ist $S(uf) = uh = uS(f)$.

- Die Zeitinvarianz ist jetzt Dank der konstanten Koeffizienten auch erfüllt. Sei $S(f) = h$ und $\hat{t} \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) = f(t), \quad h^{(i)}(0) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, n-1.$$

Da diese Gleichung für alle t gilt, kann man auf beiden Seiten t durch $t - \hat{t}$ ersetzen und erhält

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t - \hat{t}) &= f(t - \hat{t}) \\ \sum_{i=0}^n a_i h_{\hat{t}}^{(i)}(t) &= f_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

Damit ist $h_{\hat{t}}$ eine Lösung der DGL mit rechter Seite $f_{\hat{t}}$, die die Anfangsbedingungen

$$h_{\hat{t}}^{(i)}(-\infty) = h^{(i)}(-\infty - \hat{t}) = h^{(i)}(-\infty) = 0$$

für $i = 0, \dots, n-1$ erfüllt. An dieser Stelle wird klar, dass man die Startwerte bei $t = -\infty$ festlegen muss damit das System zeitinvariant ist. Folglich ist

$$S(f_{\hat{t}}) = h_{\hat{t}} = S(f)_{\hat{t}}.$$

4.2 Abschlusseigenschaften von linearen zeitinvarianten Systemen

Da ein LTI System nichts anderes tut, als die Eingangsfunktion mit seiner Impulsantwort zu falten, übertragen sich alle Eigenschaften der Faltung auf LTI Systeme. LTI Systeme kann man auf vielfältige Weise zusammenschalten und das Ergebnis ist wiederum ein LTI System. Diese Abschlusseigenschaften werden nachfolgend untersucht. Weiterhin wird gezeigt, dass beim Hintereinanderschalten von LTI Systemen die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Theorem 4.14 (Abgeschlossenheit unter Addition)

Sind S_1 und S_2 zwei LTI Systeme, dann ist auch das System $S_1 + S_2$, definiert durch

$$(S_1 + S_2)(f) = S_1(f) + S_2(f)$$

wieder LTI.

Beweis. Da S_1 und S_2 LTI sind, existieren laut Theorem 4.2 Funktionen g_1 und g_2 so dass

$$\begin{aligned} S(f_1) &= f * g_1 \\ S(f_2) &= f * g_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2)(f) &= S_1(f) + S_2(f) \\ &= f * g_1 + f * g_2 \\ &= f * (g_1 + g_2). \end{aligned}$$

Mit $g = g_1 + g_2$ gilt somit

$$(S_1 + S_2)(f) = f * g$$

und damit ist $S_1 + S_2$ nach Theorem 4.2 LTI. \square

Theorem 4.15 (Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation)

Ist S ein LTI System und $a \in \mathbb{R}$, dann ist auch das System aS , definiert durch

$$(aS)(f) = aS(f)$$

wieder LTI.

Beweis. Da S LTI ist, existiert laut Theorem 4.2 eine Funktionen g so dass

$$S(f) = f * g.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (aS)(f) &= aS(f) \\ &= a(f * g) \\ &= f * (ag). \end{aligned}$$

Folglich ist aS nach Theorem 4.2 LTI. \square

Theorem 4.16 (Abgeschlossenheit unter Komposition)

Sind S_1 und S_2 zwei LTI Systeme, dann ist auch das System $S_1 \circ S_2$, definiert durch

$$(S_1 \circ S_2)(f) = S_1(S_2(f))$$

wieder LTI.

Beweis. Da S_1 und S_2 LTI sind, existieren laut Theorem 4.2 Funktionen g_1 und g_2 so dass

$$\begin{aligned} S(f_1) &= f * g_1 \\ S(f_2) &= f * g_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (S_1 \circ S_2)(f) &= S_1(S_2(f)) \\ &= S_1(f * g_2) \\ &= (f * g_2) * g_1 \\ &= f * (g_2 * g_1) \quad \text{Faltung ist assoziativ.} \end{aligned}$$

Mit $g = g_2 * g_1$ gilt somit

$$(S_1 \circ S_2)(f) = f * g$$

und damit ist $S_1 \circ S_2$ nach Theorem 4.2 LTI. \square

Die Hintereinanderschaltung zweier LTI Systeme ist somit wiederum LTI. Tatsächlich spielt aufgrund der Kommutativität der Faltung die Reihenfolge der Hintereinanderschaltung keine Rolle, d.h. die Komposition von LTI Systemen ist kommutativ. Das ist überraschend, da die Komposition von Funktionen ja nicht kommutativ ist!

Theorem 4.17 (Komposition von LTI Systemen ist kommutativ.)

Sind S_1 und S_2 zwei LTI Systeme, dann gilt

$$S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1.$$

Beweis. Da S_1 und S_2 LTI sind, existieren laut Theorem 4.2 Funktionen g_1 und g_2 so dass

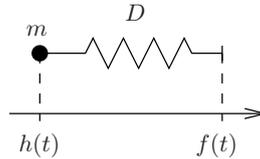
$$\begin{aligned} S(f_1) &= f * g_1 \\ S(f_2) &= f * g_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(S_1 \circ S_2)(f) &= S_1(S_2(f)) \\ &= (f * g_2) * g_1 \\ &= f * (g_2 * g_1) && \text{Faltung ist assoziativ} \\ &= f * (g_1 * g_2) && \text{Faltung ist kommutativ} \\ &= (f * g_1) * g_2 && \text{Faltung ist assoziativ} \\ &= S_2(S_1(f)) \\ &= (S_2 \circ S_1)(f). \square\end{aligned}$$

4.3 Anwendungsbeispiel aus der Mechanik

An einem Massestück m sei eine Feder mit Federkonstanten D angebracht.



Zum Zeitpunkt t befindet sich die Masse an Position $h(t)$, das Ende der Feder bei $f(t)$. Ziel ist es, $h(t)$ in Abhängigkeit von $f(t)$ zu berechnen. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass $f(t) = h(t) = h'(t) = 0$ für $t \leq 0$ und die Feder Ruhelänge Null habe. Damit ist die Kraft, die auf das Massestück wirkt $D(f(t) - h(t))$ und mit dem Trägheitsgesetz gilt

$$mh''(t) = D(f(t) - h(t)).$$

Dies führt zu einer linearen, inhomogenen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$mh''(t) + Dh(t) = Df(t).$$

Nun können wir zwar die homogene DGL lösen, haben aber keinen Ansatz für die inhomogene. Mit etwas physikalischem Grundverständnis erkennt man aber, dass das System linear und zeitinvariant ist, d.h. es gilt

$$h = f * g$$

wobei g die Impulsantwort ist.

$$\text{Feder } f \longrightarrow \boxed{\text{System } g} \longrightarrow \text{Masse } h = f * g$$

Das Problem reduziert sich also darauf, die Impulsantwort zu bestimmen: Wenn $f(t) = \delta(t)$, dann ist $h(t) = g(t)$ die Impulsantwort. Ersetzt man in obiger DGL f durch δ und h durch g , erhält man

$$mg''(t) + Dg(t) = D\delta(t).$$

Leider haben wir bislang auch keinen Ansatz wenn die rechte Seite ein Dirac Impuls ist. Genau für solche Zwecke benötigen wir die Laplace Transformation (siehe Beispiel 7.34 auf Seite 167). Ich verrate Ihnen daher einfach, dass

$$g(t) = \omega \sigma(t) \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{D/m}.$$

Im Prinzip ist das nicht überraschend: Wenn man die Feder einmal kurz und weit auslenkt, wird das Massestück in eine Schwingung mit seiner Eigenfrequenz ω um die Ruhelage versetzt und zwar sinusförmig, da es zum Zeitpunkt $t = 0$ ja an der Stelle $g(0) = 0$ sein muss und Sprünge aufgrund seiner Trägheit nicht möglich sind.

Überzeugen wir uns nun aber, dass diese Funktion $g(t)$ tatsächlich o.g. DGL löst. Hierzu muss man die ersten beiden Ableitungen von g berechnen:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \omega (\sigma'(t) \sin(\omega t) + \sigma(t) \omega \cos(\omega t)) \\ &= \omega (\delta(t) \sin(\omega t) + \sigma(t) \omega \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

An dieser Stelle erinnern wir uns wieder an Theorem 3.26. Damit gilt

$$\begin{aligned} \delta(t) \sin(\omega t) &= \delta(t) \sin(\omega 0) \\ &= \delta(t) 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$g'(t) = \omega^2 \sigma(t) \cos(\omega t).$$

Nochmal ableiten ergibt

$$\begin{aligned} g''(t) &= \omega^2 (\sigma'(t) \cos(\omega t) - \sigma(t) \omega \sin(\omega t)) \\ &= \omega^2 (\delta(t) \cos(\omega t) - \sigma(t) \omega \sin(\omega t)) \\ &= \omega^2 (\delta(t) \cos(\omega 0) - \sigma(t) \omega \sin(\omega t)) \\ &= \omega^2 \delta(t) - \omega^3 \sigma(t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} mg''(t) + Dg(t) &= m\omega^2 \delta(t) - m\omega^3 \sigma(t) \sin(\omega t) + D\omega \sigma(t) \sin(\omega t) \\ &= D\delta(t) - \sigma(t) (-D\omega \sin(\omega t) + D\omega \sin(\omega t)) \\ &= D\delta(t), \end{aligned}$$

d.h. die Funktion $g(t)$ ist tatsächlich Lösung der DGL. Die Position $h(t)$ des Massestücks kann nun für beliebiges $f(t)$ durch Faltung mit der Impulsantwort $g(t)$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \omega \sigma(\tau) \sin(\omega \tau) \\ &= \omega \sigma(t) \int_0^t f(t - \tau) \sin(\omega \tau) d\tau. \end{aligned}$$

4.4 Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems

Lineare zeitinvariante Systeme zeigen ein besonders einfaches Verhalten, wenn das Eingangssignal $f(t)$ eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω ist. In diesem Fall ist nämlich auch das Ausgangssignal $h(t)$ eine harmonische Schwingung mit *gleicher* Kreisfrequenz ω . Wir zeigen dies anhand einer komplexen Schwingung.

Sei S ein lineares zeitinvariantes System mit Impulsantwort g und

$$f(t) = e^{j\omega t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h(t) &= [S(f)](t) \\ &= (f * g)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{G(\omega)} \\ &= G(\omega) e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Da $G(\omega)$ eine Konstante, d.h. unabhängig von t ist, ist $h(t)$ wiederum eine komplexe Schwingung mit Kreisfrequenz ω . Der Faktor $G(\omega)$ bewirkt lediglich, dass die Schwingung um Faktor $|G(\omega)|$ verstärkt und um Phasenwinkel $\angle G(\omega)$ verschoben wird, die Frequenz ω bleibt jedoch gleich.

Die so entstandene Funktion $G(\omega)$ nennt man Übertragungsfunktion des linearen Systems. Wie oben gezeigt, lässt sie sich aus der Impulsantwort berechnen durch

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Dies ist bereits ein Beispiel für eine Fourier Transformation, die im Kapitel 6 ausführlich behandelt wird.

5 Fourier Reihen

In diesem Abschnitt wird eine T -periodische Funktion in eine Überlagerung von einfachen harmonischen Schwingungen zerlegt. Die Frequenzen der Schwingungskomponenten sind dabei ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Man spricht daher von einer Zerlegung in Grund- und Oberschwingungen. Dies hat zahlreiche Anwendungen:

- Die Amplitude, mit der bestimmte Oberschwingungen auftreten, sagen viel über die vorliegende Funktion aus. Dies wird z.B. in der Röntgenspektroskopie oder der automatischen Spracherkennung verwendet.
- Mathematisch sind harmonische Schwingungen viel einfacher zu behandeln als allgemeine periodische Funktionen, man denke z.B. an die komplexe Wechselstromrechnung. Mit Hilfe der Zerlegung kann man jede Schwingungskomponente einer komplizierteren periodischen Funktion separat behandeln und die Ergebnisse anschließend wieder überlagern.

Vorwiegend werden Fourier Reihen zur Analyse von zeitabhängigen Funktionen verwendet. Die Funktionsvariable wird daher im Folgenden mit t bezeichnet anstatt wie bisher mit x .

5.1 Harmonische Schwingungen

Die ‘Bausteine’ aus denen wir eine periodische Funktion zusammensetzen werden sind harmonische Schwingungen. Dies sind einfache Cosinusfunktionen mit einer bestimmten Frequenz, Amplitude und Phasenverschiebung.

Definition 5.1 (Harmonische Schwingung)

Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonische Schwingung wenn es $A, \omega \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ gibt so dass

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Hierbei heißt A Amplitude, ω Kreisfrequenz und φ Phasenwinkel der Schwingung.

Harmonische Schwingungen lassen sich mit komplexen Zahlen wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \varphi) &= \operatorname{re}(Ae^{j(\omega t + \varphi)}) \\ &= \operatorname{re}(Ae^{j\varphi} e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{re}(ze^{j\omega t}) \quad \text{wobei } z = Ae^{j\varphi} \\ &= \frac{1}{2}(ze^{j\omega t} + \bar{z}e^{-j\omega t}). \end{aligned}$$

Den Term $ze^{j\omega t}$ kann man sich in der komplexen Ebene veranschaulichen als Zeiger z mit Länge A und Winkel φ , der sich mit Kreisfrequenz ω gegen den

Uhrzeigersinn dreht. Entsprechend ist $\bar{z}e^{-j\omega t}$ der konjugiert komplexe Zeiger, der sich mit gleicher Kreisfrequenz im Uhrzeigersinn dreht. Da die beiden Zeiger konjugiert komplex sind, ergeben sie in der Summe natürlich immer eine reelle Zahl. Die Zeit für eine Umdrehung ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Eine weitere, reelle Darstellungsmöglichkeit für harmonische Schwingungen ist die sog. phasenwinkelfreie Darstellung. Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \varphi) &= \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \varphi)}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{j\varphi} e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}((\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))) \\ &= A(\cos(\varphi) \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)) \\ &= \underbrace{A \cos(\varphi)}_a \cos(\omega t) + \underbrace{-A \sin(\varphi)}_b \sin(\omega t) \\ &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Die Umrechnung in phasenwinkelfreie Darstellung ist somit

$$a = A \cos(\varphi), \quad b = -A \sin(\varphi).$$

Die Rückrechnung geschieht durch

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan 2(-b, a).$$

Bis auf das Minuszeichen sind dies die gleichen Formeln wie bei der Umrechnung zwischen Kartesischen und Polarkoordinaten.

5.2 Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung besteht darin, eine T -periodische Funktion als gewichtete Summe von harmonischen Schwingungen darzustellen. Damit das klappt, müssen diese Schwingungen ebenfalls T -periodisch sein. Ihre Kreisfrequenzen müssen daher ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ sein. Folgendes Theorem sagt aus, dass so eine Zerlegung immer möglich ist.

Theorem 5.2

Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion und $\omega = 2\pi/T$. Dann gibt es Amplituden $A_k \in \mathbb{R}_0^+$ und Phasen $\varphi_k \in [0, 2\pi[$ so dass

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

für alle t , an denen $f(t)$ stetig ist.

Die Summanden

$$A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

sind harmonische Schwingungen mit k -facher Grundfrequenz und heißen Oberschwingungen. In der Musik bestimmen die A_k die Klangfarbe eines Instruments während die Grundfrequenz ω die Tonhöhe festlegt. Der Summand A_0 wird als Gleichanteil bezeichnet.

5.3 Berechnung der Fourier Koeffizienten

Das Ziel besteht nun darin, für eine gegebene T -periodische Funktion $f(t)$ die Parameter A_k und φ_k zu berechnen. Hierzu ist die komplexe Darstellung vorteilhaft, da für komplexe e -Funktionen einfachere Rechengesetze gelten als für reelle Cosinusfunktionen.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{re}(A_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t}) \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (A_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} + \overline{A_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t}}) \\
 &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} + \overline{z_k} e^{-jk\omega t}, \quad z_0 = A_0, \quad z_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \\
 &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} e^{-jk\omega t}, \quad z_{-k} = \overline{z_k} \\
 &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} z_k e^{jk\omega t} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}.
 \end{aligned}$$

Bei dieser Umformung wurden die komplexen Fourier Koeffizienten z_k eingeführt:

$$\begin{aligned}
 z_0 &= A_0 \\
 z_k &= \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \quad z_{-k} = \overline{z_k}, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

In einem komplexen Fourier Koeffizienten z_k steckt damit die Amplitude A_k und die Phase φ_k der k -ten Oberschwingung:

$$\begin{aligned}
 A_k &= 2|z_k| \\
 \varphi_k &= \angle z_k, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Die Fourier Koeffizienten mit negativem Index sind lediglich konjugiert komplexe Kopien und werden nur mitgeschleppt, damit der Imaginärteil verschwindet.

Im nächsten Schritt müssen nun die z_k berechnet werden. Wir haben die Gleichung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} \quad \text{für alle } t$$

aufgestellt. In dieser Gleichung treten unendlich viele Unbekannte z_k auf. Das Ziel ist zunächst, die Gleichung so umzuformen, dass nur noch eine Unbekannte z_n für ein festes n darin auftritt. Hierzu werden zuerst beide Seiten mit $e^{-jn\omega t}$ multipliziert:

$$f(t)e^{-jn\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j(k-n)\omega t}.$$

Auf der rechten Seite wurden $e^{jk\omega t}e^{-jn\omega t}$ zu $e^{j(k-n)\omega t}$ zusammengefasst. Da auf beiden Seiten die gleiche Funktion steht, bleibt die Gleichung erhalten wenn auf beiden Seiten über eine Periode integriert wird. Aus einer Gleichung von Funktionen wird dann eine Gleichung von Zahlen.

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega t} dt &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j(k-n)\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wurde die Linearität des Integrals ausgenutzt. Der verbleibende Integrand ist eine Schwingung mit $(k-n)$ -facher Grundfrequenz ω . Wird diese über eine Periode integriert, muss Null herauskommen! Die einzige Ausnahme ist der Fall $k=n$. Berechnen wir dies ausführlich.

- Fall 1: $k=n$.

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega t} dt = \int_0^T e^0 dt = T.$$

- Fall 2: $k \neq n$.

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{j(k-n)\omega t} dt &= \frac{1}{j(k-n)\omega} \left[e^{j(k-n)\omega t} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{j(k-n)\omega} (e^{j(k-n)\omega T} - 1) \\ &= \frac{1}{j(k-n)\omega} \underbrace{(e^{2\pi j(k-n)} - 1)}_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \underbrace{\int_0^T e^{j(k-n)\omega t} dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq n \\ T & \text{falls } k = n \end{cases}} \\ &= z_n T \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden alle Summanden außer dem n -ten. Für den Fourier Koeffizient z_n gilt somit

$$z_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Ersetzt man auf beiden Seiten n durch k erhält eine Formel zur Berechnung von z_k :

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Anmerkung. Wenn Sie die Herleitung aufmerksam verfolgt haben, wissen Sie, dass sich das Integral über eine Periode erstrecken muss. Wir haben hier von 0 bis T integriert, hätten aber genauso gut auch von a bis $a + T$ integrieren können für beliebiges a . Dies sieht man auch daran, dass der Integrand $f(t)e^{-jk\omega t}$ eine T -periodische Funktion ist.

5.4 Vergleich mit Taylor Reihen

Die Zerlegung von $f(t)$ in eine Fourier Reihe hat Ähnlichkeit mit der Zerlegung in eine Taylor Reihe zum Entwicklungspunkt \hat{t} . Wir stellen die Ansätze gegenüber:

Taylor Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - \hat{t})^k$$
$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\hat{t})$$

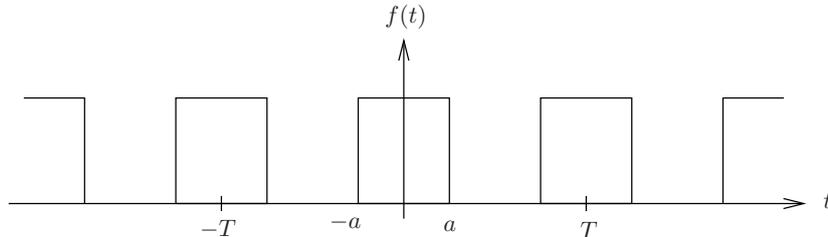
Fourier Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k (e^{j\omega t})^k$$
$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Um die Ähnlichkeit zu verdeutlichen wurde $e^{jk\omega t} = (e^{j\omega t})^k$ umgeformt.

5.5 Fourier Reihe einer Rechteckschwingung

Sei $f(t)$ die im folgenden Bild dargestellte T -periodische Rechteckschwingung wobei $0 < a < T/2$.



Die Fourier Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-a}^a e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{-jk\omega T} [e^{-jk\omega t}]_{-a}^a \quad \text{falls } k \neq 0 \\
 &= \frac{1}{-2\pi jk} (e^{-jk\omega a} - e^{jk\omega a}) \\
 &= \frac{1}{\pi k} \operatorname{im}(e^{jk\omega a}) \\
 &= \frac{1}{\pi k} \sin(k\omega a) \\
 &= \frac{\omega a}{\pi} \frac{\sin(k\omega a)}{k\omega a} \\
 &= \frac{2a}{T} \operatorname{si}(k\omega a).
 \end{aligned}$$

Die hierbei verwendete si-Funktion ist definiert durch

$$\operatorname{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für den oben ausgenommenen Spezialfall $k = 0$ erhält man

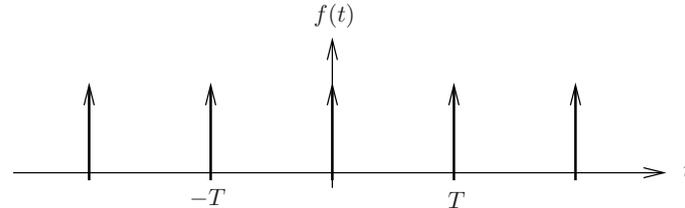
$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j0\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 &= \frac{2a}{T} \\
 &= \frac{2a}{T} \operatorname{si}(0\omega a).
 \end{aligned}$$

Die Ausnahmebehandlung für $k = 0$ ist damit nicht nötig und man erhält für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Formel

$$z_k = \frac{2a}{T} \operatorname{si}(k\omega a).$$

5.6 Fourier Reihe des Impulszugs

Zum Schluss noch ein Beispiel für eine sehr ungewöhnliche periodische Funktion, die aus einer unendlichen Folge von Dirac Impulsen im Abstand T besteht.



Diese Funktion spielt eine zentrale Rolle in der digitalen Signalverarbeitung bei der Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion. Sei

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

ein Impulszug mit Periodendauer T . Anschaulich betrachtet ist $f(t)$ überall Null außer an den Stellen t , die ein ganzzahliges Vielfaches von T sind. Da der Impulszug T -periodisch ist, kann man ihn in eine Fourier Reihe entwickeln:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T.$$

Die Fourier Koeffizienten z_k berechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^0 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Die Fourier Koeffizienten z_k des Impulszugs sind also alle gleich $1/T$. Damit ist die Fourier Reihe des Impulszugs

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega t}.$$

Da $f(t)$ aus Dirac Impulsen besteht, gilt diese Gleichung nur im distributionellen Sinn, siehe Definition 3.14 auf Seite 68. Der Grenzwert der unendlichen Summe auf der rechten Seite existiert nicht in der Menge der Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .

6 Fourier Transformation

6.1 Übergang von Fourier Reihen zur Fourier Transformation

Nicht-periodische Funktionen. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass man eine T -periodische Funktion als Summe von harmonischen Oberschwingungen mit Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ darstellen kann:

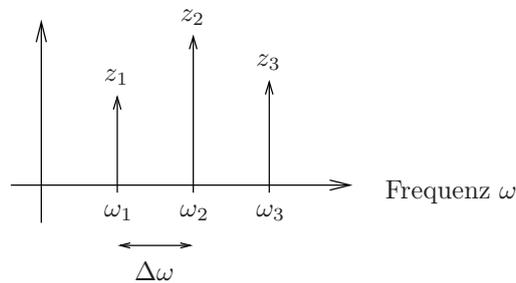
$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}. \end{aligned}$$

Interpretiert man die Gleichheit im distributionellen Sinn, ist sie auch an den Stellen t erfüllt wo f einen Sprung hat. Der k -te Fourier Koeffizient

$$z_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

enthält die Amplitude und die Phase der k -ten Oberschwingung mit Frequenz

$$k\omega = \omega_k.$$



Legt man oben dargestelltes Bild zugrunde, kann man sagen, dass die Fourier Koeffizienten auf der Frequenzachse den Abstand

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$$

haben.

Die komplexen Fourier Koeffizienten z_k kann man durch

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

berechnen. Damit gilt

$$z_k T = \int_0^T f(t) e^{-j\omega_k t} dt.$$

Der Fourier Koeffizient z_k enthält hierbei Amplitude und Phase der Schwingungskomponente von $f(t)$ mit Kreisfrequenz ω_k . Wir definieren nun eine Funktion F an der Stelle ω_k durch

$$F(\omega_k) = z_k T.$$

Die Funktion F ordnet also jeder Frequenz ω_k ihre zugehörige Amplitude und Phase (mal T) als komplexen Zeiger zu. Somit gilt

$$F(\omega_k) = \int_0^T f(t) e^{-j\omega_k t} dt.$$

Bisher haben wir uns auf periodische Funktionen $f(t)$ beschränkt. Eine nicht-periodische Funktion kann man ebenfalls als periodische Funktion verkaufen, wobei im Kleingedruckten steht, dass die Periodendauer eben sehr sehr lang ist, d.h. $T \rightarrow \infty$ und eine Periode von $-\infty$ bis ∞ dauert. Dadurch läuft der Abstand $\Delta\omega = 2\pi/T$ gegen Null, d.h. die Fourier Koeffizienten rücken auf der Frequenzachse immer näher zusammen. Nach dem Grenzübergang kann man somit für jede beliebige Frequenz ω (und nicht nur für diskrete Frequenzen ω_k) einen "Fourier Koeffizienten"

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

berechnen. Diese Funktion $F(\omega)$ heißt Fourier Transformierte der Funktion $f(t)$. Der gleiche Term ist uns auch schon auf Seite 103 als Übertragungsfunktion eines LTI Systems begegnet.

Um die Funktion $f(t)$ durch Rücktransformation aus $F(\omega)$ zu erhalten, geht man wieder von der Fourier Reihe aus.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j\omega_k t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k T e^{j\omega_k t}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad \text{und} \quad z_k T = F(\omega_k)$$

erhält man

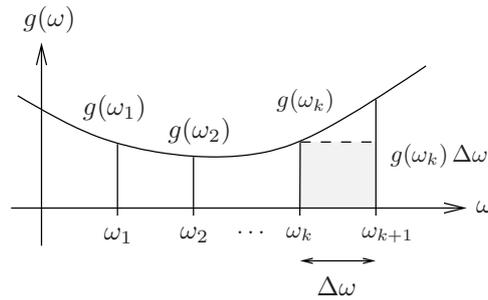
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega_k) e^{j\omega_k t}}_{g(\omega_k)} \Delta\omega.$$

Kürzen wir der Übersicht halber ab

$$g(\omega_k) = F(\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\omega_k) \Delta\omega.$$



Interpretiert man nun $g(\omega_k)$ als Funktionswerte einer kontinuierlichen Funktion $g(\omega)$ an den diskreten Stellen ω_k , sieht man dass die Summe der Flächeninhalt unter $g(\omega)$ ist, d.h.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

für $\Delta\omega \rightarrow 0$. Macht man die Ersetzung

$$g(\omega) = F(\omega)e^{j\omega t}$$

rückgängig, erhält man

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Definition 6.1 (Fourier Transformation)

Die Funktion

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

heißt *Fourier Transformierte* von $f(t)$. Umgekehrt heißt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

inverse Fourier Transformierte von $F(\omega)$.

Man schreibt hierfür auch

$$\begin{aligned} f(t) & \circ \bullet F(\omega) \\ F(\omega) & \bullet \circ f(t) \end{aligned}$$

Die Fourier Transformation bildet eine zeitabhängige Funktion $f(t)$ auf eine frequenzabhängige Funktion $F(\omega)$ ab. Man spricht daher von einer Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich.

Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Man kann den Real- und Imaginärteil von $F(\omega)$ wie folgt separat berechnen:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= A(\omega) + jB(\omega) \end{aligned}$$

wobei $A, B \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ B(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Da $\cos(\omega t)$ eine gerade Funktion ist und $\sin(\omega t)$ ungerade, folgt dass

$$\begin{aligned} A(-\omega) &= A(\omega) \\ B(-\omega) &= -B(\omega) \end{aligned}$$

Der Realteil von $F(\omega)$ ist somit eine gerade Funktion, der Imaginärteil eine ungerade. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= A(-\omega) + jB(-\omega) \\ &= A(\omega) - jB(\omega) \\ &= \overline{F(\omega)}. \end{aligned}$$

Theorem 6.2

Ist F die Fourier Transformierte der reellen Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}.$$

Dies ist nicht überraschend, da für die Fourierkoeffizienten das entsprechende Gesetz gilt:

$$z_{-k} = \overline{z_k}.$$

Symmetrien.

- Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, d.h. $f(t) = f(-t)$, dann ist

$$f(t) \cos(\omega t)$$

gerade und

$$f(t) \sin(\omega t)$$

ungerade. Folglich ist $B(\omega) = 0$ und damit

$$F(\omega) = A(\omega).$$

- Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$, dann ist

$$f(t) \cos(\omega t)$$

ungerade und

$$f(t) \sin(\omega t)$$

gerade. Folglich ist $A(\omega) = 0$ und damit

$$F(\omega) = jB(\omega).$$

Theorem 6.3

Die Fourier Transformierte einer reellen geraden Funktion ist reell und gerade.

Die Fourier Transformierte einer reellen ungeraden Funktion ist rein imaginär und ungerade.

Beispiel 6.4 Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -T < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fourier Transformierte von f ist

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-T}^T \quad \text{falls } \omega \neq 0 \\ &= \frac{j}{\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}) \\ &= \frac{j}{\omega} (2j \sin(-\omega T)) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) \\ &= 2T \text{si}(\omega T) \\ F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2T = 2T \text{si}(0T) \end{aligned}$$

mit

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Damit ist

$$F(\omega) = 2T \text{si}(\omega T) \quad \text{für alle } \omega.$$

Da $f(t)$ gerade ist, ist $F(\omega)$ reell und gerade.

6.2 Eigenschaften der Fourier Transformation

Theorem 6.5 (Linearität)

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\circ\text{---}\bullet F(\omega) + G(\omega) \\ uf(t) &\circ\text{---}\bullet uF(\omega) \end{aligned}$$

Beweis. Aus der Linearität der Integration folgt

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + g(t))e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= F(\omega) + G(\omega) \\ uf(t) &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} uf(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= u \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= uF(\omega). \end{aligned}$$

Theorem 6.6 (Zeitverschiebung)

$$f(t - \hat{t}) \circ\text{---}\bullet F(\omega)e^{-j\omega\hat{t}}$$

Beweis. Mit der Substitution $\tau = t - \hat{t}$ und $d\tau = dt$ folgt

$$\begin{aligned} f(t - \hat{t}) &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \hat{t})e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau + \hat{t})} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega\hat{t}} d\tau \\ &= e^{-j\omega\hat{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{-j\omega\hat{t}} F(\omega). \end{aligned}$$

Theorem 6.7 (Frequenzverschiebung)

$$f(t)e^{j\hat{\omega}t} \circ\text{---}\bullet F(\omega - \hat{\omega})$$

Beweis. Durch Ersetzen von ω durch $\omega - \hat{\omega}$ in Definition 6.1 erhält man

$$\begin{aligned} f(t)e^{j\hat{\omega}t} &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\hat{\omega}t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\hat{\omega})t}dt \\ &= F(\omega - \hat{\omega}). \end{aligned}$$

Theorem 6.8 (Modulationstheorem)

$$f(t) \cos(\hat{\omega}t) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{2}(F(\omega - \hat{\omega}) + F(\omega + \hat{\omega}))$$

Beweis. Mit

$$\cos(\hat{\omega}t) = \frac{1}{2}(e^{j\hat{\omega}t} + e^{-j\hat{\omega}t})$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t) \cos(\hat{\omega}t) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\hat{\omega}t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\hat{\omega}t} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\hat{\omega}t} e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\hat{\omega})t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega+\hat{\omega})t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (F(\omega - \hat{\omega}) + F(\omega + \hat{\omega})). \end{aligned}$$

Theorem 6.9 (Zeitumkehr)

$$f(-t) \circ\!\!\!\bullet F(-\omega)$$

Beweis. Mit der Substitution $\tau = -t$ und $dt = -d\tau$ folgt

$$\begin{aligned} f(-t) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j(-\omega)\tau} d\tau \\ &= F(-\omega). \end{aligned}$$

Theorem 6.10 (Zeitdehnung)

$$f(at) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass wenn sich ein Signal “verlangsamt”, die in ihm auftretenden Schwingungen tiefere Frequenzen annehmen. Wenn eine Saite a mal langsamer schwingt, entsteht eben ein Ton mit a mal tieferer Frequenz.

Beweis.

- Falls $a > 0$ erhält man mit der Substitution $\tau = at$ und $dt = d\tau/a$

$$\begin{aligned} f(at) &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau/a} \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

- Falls $a < 0$ wendet man wieder die Substitution $\tau = at$ und $dt = d\tau/a$ an, muss aber beachten, dass sich die Integrationsgrenzen umkehren da $a\infty = -\infty!$

$$\begin{aligned} f(at) &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau/a} \frac{1}{a} d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Da

$$\frac{1}{|a|} = \begin{cases} 1/a & \text{falls } a > 0 \\ -1/a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

folgt in beiden Fällen

$$f(at) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Theorem 6.11 (Differentiation im Zeitbereich)
--

$$f^{(n)}(t) \circ\text{---}\bullet (j\omega)^n F(\omega)$$

Beweis. Aus der Definition 6.1 der inversen Fourier Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

folgt durch n -fache Ableitung nach t auf beiden Seiten

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Auf der rechten Seite steht die inverse Fourier Transformierte von

$$(j\omega)^n F(\omega)$$

und damit gilt

$$f^{(n)}(t) \circ\text{---}\bullet (j\omega)^n F(\omega).$$

Theorem 6.12 (Differentiation im Frequenzbereich)
--

$(-jt)^n f(t) \circ\text{---}\bullet F^{(n)}(\omega)$

Beweis. Aus der Definition 6.1 der Fourier Transformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

folgt durch n -fache Ableitung nach ω auf beiden Seiten

$$F^{(n)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)^n f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Auf der rechten Seite steht die Fourier Transformierte von

$$(-jt)^n f(t)$$

und damit gilt

$$(-jt)^n f(t) \circ\text{---}\bullet F^{(n)}(\omega).$$

Theorem 6.13 (Faltung im Zeitbereich)

$$(f * g)(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(\omega)G(\omega)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \\
 \circ \longrightarrow \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-j\omega t} d\tau dt \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-j\omega t} dt}_{F(\omega)e^{-j\omega\tau}} d\tau \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)F(\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= F(\omega) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= F(\omega)G(\omega).
 \end{aligned}$$

Beim Schritt von der dritten auf die vierte Zeile wurde die Reihenfolge der Integrale vertauscht. Dies ist aufgrund der Linearität des Integrals zulässig sofern die Integrale existieren (Satz von Fubini).

Von der fünften auf die sechste Zeile wurde die Verschiebung im Zeitbereich (Theorem 6.6)

$$f(t - \tau) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

ausgenutzt.

Theorem 6.14 (Faltung im Frequenzbereich)

$$f(t)g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis der Faltung im Zeitbereich.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - u)G(u)du \\
 \bullet \text{---} \circ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - u)G(u)du \right) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(\omega - u)G(u)e^{j\omega t} dud\omega \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega - u)G(u)e^{j\omega t} d\omega du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} G(u) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega - u)e^{j\omega t} d\omega}_{f(t)e^{jut}} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} G(u)f(t)e^{jut} du \\
 &= f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} G(u)e^{jut} du \\
 &= f(t)g(t).
 \end{aligned}$$

Theorem 6.15 (Satz von Plancherel)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega.$$

Beweis. Aus

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)}e^{j\omega t}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)}e^{-j\omega t}dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt} \\ &= \overline{G(\omega)} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_t f(t)\overline{g(t)}dt &= \int_t \left(\int_{\omega} \frac{1}{2\pi} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \right) \overline{g(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_t \int_{\omega} F(\omega)\overline{g(t)}e^{j\omega t}d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega) \int_t \overline{g(t)}e^{j\omega t}dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega. \end{aligned}$$

Theorem 6.16 (Parsevalsche Gleichung)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Satz von Plancherel für $g(t) = f(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{F(\omega)}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

In Kapitel 3.4 haben wir Funktionen durch Faltung mit g_ε geglättet. Aus den Eigenschaften von g_ε und der Parsevalschen Gleichung folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon^2(t) dt$$

endlich ist. Aus der Parsevalschen Gleichung folgt damit, dass auch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega$$

endlich ist. Damit muss

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G_\varepsilon(\omega) = 0$$

sein. Die Faltung mit $g_\varepsilon(t)$ im Zeitbereich bedeutet Multiplikation mit $G_\varepsilon(\omega)$ im Frequenzbereich. Die Glättung bewirkt folglich, dass hohe Frequenzen mit einem kleinen Faktor multipliziert werden, was einem Tiefpassverhalten entspricht.

6.3 Fourier Transformierte spezieller Funktionen

Theorem 6.17 (Dirac Impuls)

$$\delta(t) \circ \bullet 1.$$

Beweis. Die Ausblendeigenschaft besagt $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$. Mit $f(t) = e^{-j\omega t}$ folgt

$$\begin{aligned} \delta(t) \circ \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^0 dt \\ & = 1 \end{aligned}$$

Damit kann der Einheitsimpuls als inverse Fourier Transformierte der konstanten 1-Funktion beschrieben werden.

Theorem 6.18 (Spektralzerlegung des Dirac Impulses)

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega.$$

Diese Gleichheit gilt nur im distributionellen Sinn, d.h. nach Faltung mit g_ε . Ohne diese Glättung würde das uneigentliche Integral auf der rechten Seite nicht existieren.

Theorem 6.19 (Konstante Funktion)

$$1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi\delta(\omega)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^0 d\omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

Anschaulich ist das auch ziemlich einleuchtend: Eine Konstante Funktion hat überhaupt keine Schwingungskomponenten, außer der "Schwingung" mit Kreisfrequenz Null.

Theorem 6.20 (Signumsfunktion)

$$\text{sign}(t) \circ \bullet \left\{ \begin{array}{ll} 2/j\omega & \text{falls } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0 \end{array} \right.$$

Beweis. Die Signumsfunktion ist wie folgt definiert:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ 1 & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Gesucht ist die Fourier Transformierte $\text{Sign}(\omega)$ von $\text{sign}(t)$. Es gilt

$$\text{sign}'(t) = 2\delta(t).$$

Fourier Transformation auf beiden Seiten unter Verwendung der Ableitungsregel im Zeitbereich ergibt

$$j\omega \text{Sign}(\omega) = 2.$$

Für $\omega \neq 0$ gilt somit

$$\text{Sign}(\omega) = \frac{2}{j\omega}.$$

Die Berechnung von $\text{Sign}(\omega)$ im Spezialfall $\omega = 0$ ist wie folgt. Aus

$$\text{sign}(t) + \text{sign}(-t) = 0$$

folgt

$$\text{Sign}(\omega) + \text{Sign}(-\omega) = 0.$$

Im Spezialfall $\omega = 0$ erhält man

$$\text{Sign}(0) + \text{Sign}(0) = 0$$

und damit $\text{Sign}(0) = 0$, d.h.

$$\text{sign}(t) \circ \bullet \left\{ \begin{array}{ll} 2/j\omega & \text{falls } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{array} \right.$$

Theorem 6.21 (Einheitssprung)

$$\sigma(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Beweis. Man kann die σ Funktion durch die sign-Funktion ausdrücken:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\text{sign}(t) + \frac{1}{2}.$$

Mit dem vorigen Theorem und $1 \circ\text{---}\bullet 2\pi\delta(\omega)$ gilt

$$\sigma(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Man sollte hierbei präzisieren, dass der erste Summand $1/j\omega$ Null sein soll im Spezialfall $\omega = 0$.

Ohne Verwendung der Fourier Transformaten von $\text{sign}(t)$ kann man den Beweis wie folgt führen. Sei

$$\sigma(t) \circ\text{---}\bullet S(\omega).$$

Mit

$$\sigma'(t) = \delta(t)$$

und der Ableitung im Zeitbereich folgt durch Fourier Transformation auf beiden Seiten

$$j\omega S(\omega) = 1,$$

d.h.

$$S(\omega) = \frac{1}{j\omega} \text{ für } \omega \neq 0.$$

Aus

$$\sigma(t) + \sigma(-t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \neq 0 \\ 2 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

folgt

$$S(\omega) + S(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

da der Ausreißer an der Stelle $t = 0$ im Fourier Integral keine Rolle spielt. Für $\omega = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} S(0) + S(0) &= 2\pi\delta(\omega) \\ S(0) &= \pi\delta(\omega). \end{aligned}$$

Da

$$\int_{-\infty}^t f(u) du = (\sigma * f)(t)$$

eine Stammfunktion von $f(t)$ ist und die Fourier Transformierte von $\sigma(t)$ nun bekannt ist, lässt sich mit dem Faltungssatz eine Korrespondenz für die Integration im Zeitbereich beweisen.

Theorem 6.22 (Integration im Zeitbereich)

$$\int_{-\infty}^t f(u) du \quad \circ \bullet \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) F(\omega).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(u) du &= (\sigma * f)(t) \\ &\circ \bullet \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) F(\omega). \end{aligned}$$

6.4 Fourier Transformierte von periodischen Funktionen

Zunächst berechnen wir die Fourier Transformierte von $e^{j\hat{\omega}t}$. Laut Theorem 6.19 gilt

$$1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi\delta(\omega).$$

Verschiebung um $\hat{\omega}$ im Frequenzbereich führt laut Theorem 6.7 zu einem Faktor $e^{j\hat{\omega}t}$ im Zeitbereich und man erhält

$$e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi\delta(\omega - \hat{\omega}).$$

Nun kann man leicht die Fourier Transformierte der sin- und cos-Funktion berechnen:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{\omega}t) &= \frac{1}{2} (e^{j\hat{\omega}t} + e^{-j\hat{\omega}t}) \\ &\circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2} (2\pi\delta(\omega - \hat{\omega}) + 2\pi\delta(\omega + \hat{\omega})) \\ &= \pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) + \delta(\omega + \hat{\omega})) \\ \sin(\hat{\omega}t) &= \frac{1}{2j} (e^{j\hat{\omega}t} - e^{-j\hat{\omega}t}) \\ &\circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2j} (2\pi\delta(\omega - \hat{\omega}) - 2\pi\delta(\omega + \hat{\omega})) \\ &= -j\pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) - \delta(\omega + \hat{\omega})) \end{aligned}$$

Theorem 6.23 (Fourier Transformierte periodischer Funktionen)

$$\begin{aligned} e^{j\hat{\omega}t} &\quad \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi\delta(\omega - \hat{\omega}) \\ \cos(\hat{\omega}t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad \pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) + \delta(\omega + \hat{\omega})) \\ \sin(\hat{\omega}t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad -j\pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) - \delta(\omega + \hat{\omega})) \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Fourier Transformation kann man nun die Fourier Transformierte von Fourier Reihen berechnen:

Theorem 6.24 (Fourier Transformierte von Fourier Reihen)

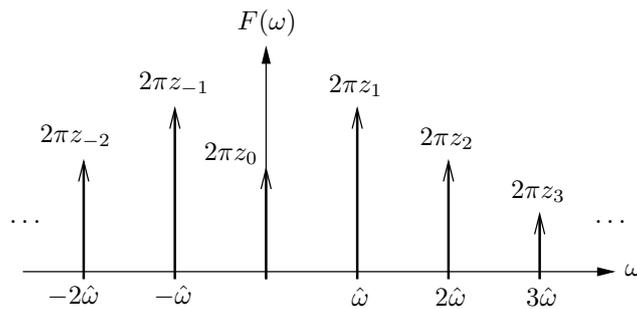
Ist $f(t)$ eine $T = 2\pi/\hat{\omega}$ -periodische Funktion mit Fourier Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\hat{\omega}t}$$

dann gilt

$$f(t) \circ \bullet 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \delta(\omega - k\hat{\omega})$$

Die Fourier Transformierte einer periodischen Funktion mit Grundfrequenz $\hat{\omega}$ besteht somit aus Dirac Impulsen der Intensität $2\pi z_k$ an den Stellen $k\hat{\omega}$.



6.5 Dualitätsprinzip der Fourier Transformation

Es ist eine reine Konvention, die Funktionsvariable im Zeit- bzw. Frequenzbereich mit t bzw. ω zu bezeichnen. Dies ist zwar oft nützlich, kann aber auch fälschlicherweise den Eindruck erwecken, dass manche Eigenschaften von Funktionen nur gelten, wenn die Funktionsvariable als Zeit bzw. als Frequenz interpretiert wird. Wir verwenden deshalb jetzt die "neutrale" Variable x statt t oder ω .

- Die Fourier Transformierte der Funktion f ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Wird die Integrationsvariable t in u umbenannt, erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du.$$

Dies ist eine Funktion von ω . Soll die Funktionsvariable der Fourier Transformierten x heißen, muss man ω durch x ersetzen und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-jxu} du.$$

- Bisher wurden Funktionen im Bildbereich mit Großbuchstaben bezeichnet. Auch das ist reine Notation, auf die wir nun verzichten. Die inverse Fourier Transformierte einer Funktion f (bisher F) ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Die Integrationsvariable ω wird wieder in u umbenannt und man erhält

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{jut} du.$$

Dies ist eine Funktion von t . Soll die Funktionsvariable der inversen Fourier Transformierten nun wieder x heißen, muss man t in x umbenennen und erhält

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{jxu} du.$$

Insgesamt erhält man damit

$$f(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-jxu} du}_{F(x)}$$

$$f(x) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{jxu} du}_{F(-x)}.$$

Wenn also

$$f(x) \circ \bullet F(x)$$

dann ist

$$f(x) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} F(-x).$$

or in einer Zeile

$$\frac{1}{2\pi} F(-x) \circ \bullet f(x) \circ \bullet F(x).$$

Die Fourier Transformierte und die inverse Fourier Transformierte einer Funktion f sind also identisch bis auf einen Faktor 2π und Spiegelung. Deshalb gelten alle Eigenschaften der Fourier Transformation mit kleinen Änderungen auch für die inverse Fourier Transformation. Diese Beobachtung heißt Dualitätsprinzip.

Definiert man $F^-(x) = F(-x)$, kann man die Funktionsvariable x ganz weglassen und erhält

$$\frac{1}{2\pi} F^- \circ \bullet f \circ \bullet F.$$

Tatsächlich ist das die korrekte Schreibweise, da die Fourier Transformation ja eine Operation auf Funktionen f bzw. F ist und nicht auf Funktionswerten $f(x)$ bzw. $F(x)$. Man kann dieses Ergebnis auch so lesen, dass wenn man eine Funktion zwei Mal Fourier transformiert, die Funktion lediglich mit 2π multipliziert und gespiegelt wird.

Benennt man jetzt die Funktionsvariable wieder mit t bzw. ω um zu verdeutlichen, dass Zeit bzw. Frequenz gemeint ist, erhält man folgendes Theorem.

Theorem 6.25 (Dualitätsprinzip)

Wenn

$$f(t) \circ \bullet F(\omega)$$

dann

$$f(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} F(-t).$$

In der unteren Formel wurde f für die Funktion im Frequenzbereich und F im Zeitbereich verwendet, was gegen die Konvention verstößt, aber natürlich reine Notation ist.

Das Dualitätsprinzip kann nun angewandt werden, um weitere Fourier Transformierte von Standardfunktionen zu berechnen.

Theorem 6.26

$$\frac{1}{t} \circ \bullet -j\pi \text{sign}(\omega)$$

Beweis.

In Theorem 6.20 auf Seite 129 wurde

$$\text{sign}(t) \circ \bullet \frac{2}{j\omega}$$

hergeleitet. Mit dem Dualitätsprinzip folgt

$$\text{sign}(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} \frac{2}{-jt} = -\frac{1}{j\pi t}$$

Multipliziert man beide Seiten mit dem konstanten Faktor $-j\pi$, erhält man

$$\frac{1}{t} \circ \bullet -j\pi \text{sign}(\omega).$$

6.6 Abtastung, Aliasing und Signalrekonstruktion

Dieses Kapitel gibt einen Ausblick auf eine wichtige, praktische Anwendung der Fourier Transformation in der digitalen Signalverarbeitung.

Abtastung. Um eine zeitkontinuierliche Funktion $f(t)$ in einem digitalen Rechner verarbeiten zu können, muss sie zunächst abgetastet werden. Man betrachtet also nur noch Funktionswerte zu Zeitpunkten nT_s wobei T_s das Abtastintervall ist. Der Index s steht hierbei für “sampling”, das Englische Wort für Abtastung. Um die mühsam erarbeitete Theorie dieses Kapitels ausnutzen zu können, bewerkstelligen wir die Abtastung, indem wir $f(t)$ mit einem Impulszug

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

multiplizieren. Der Impulszug ist eine T_s -periodische Funktion und wurde in Kapitel 5.6 auf Seite 112 als Fourier Reihe beschrieben. Die Fourier Koeffizienten von $p(t)$ sind alle gleich $1/T_s$ und man erhält

$$p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}.$$

Multipliziert man das zeitkontinuierliche Signal $f(t)$ nun mit dem Impulszug, erhält man ein neues (immer noch kontinuierliches) Signal $f_p(t)$, das ebenfalls aus einer Folge von Impulsen besteht.

$$\begin{aligned} f_p(t) &= f(t)p(t) \\ &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

Wie erwartet spielen also nur noch die die Funktionswerte von f zu den Abtastzeitpunkten $t = nT_s$ eine Rolle. Diese Abtastwerte können nun in Form einer Folge

$$f_n = f(nT_s)$$

verarbeitet werden.

Aliasing. Wie spiegelt sich die Abtastung von $f(t)$ im Frequenzbereich wider? Verwendet man die Fourier Reihe des Impulszugs, erhält man

$$\begin{aligned} f_p(t) &= f(t)p(t) \\ &= f(t) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jk\omega_s t} \end{aligned}$$

Die Fourier Transformierte $F_p(\omega)$ von $f_p(t)$ erhält man mit dem Frequenzverschiebungstheorem 6.7 auf Seite 119:

$$f(t)e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega - \hat{\omega}).$$

Mit $\hat{\omega} = k\omega_s$ und der Linearität der Fourier Transformation erhält man

$$f_p(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s) = F_p(\omega).$$

Wie lässt sich dieses Ergebnis interpretieren? Nun,

$$F(\omega - k\omega_s)$$

ist die Fourier Transformierte $F(\omega)$ der ursprünglichen Funktion $f(t)$ um $k\omega_s$ verschoben. Die Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s)$$

bedeutet, dass unendlich viele Kopien von $F(\omega)$ jeweils um ω_s verschoben nebeneinander gesetzt werden. Wenn sich die Kopien überlappen, wird im Überlappungsbereich aufsummiert. Man kann dann $F(\omega)$ nicht mehr einfach durch Ausschneiden entnehmen. Dieses Phänomen heißt Aliasing. Je größer die Abtastfrequenz ω_s ist, d.h. je mehr Abtastwerte pro Sekunde man betrachtet, umso weiter liegen die Kopien von $F(\omega)$ auseinander und umso unwahrscheinlicher tritt Überlappung ein. Halten wir also fest:

$$\text{Abtastung mit } T_s \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{Periodische Fortsetzung mit } \omega_s$$

Es gibt übrigens noch eine zweite Möglichkeit, die Fourier Transformierte $F_p(\omega)$ von $f_p(t)$ zu berechnen. Ausgehend von

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

kann man das Zeitverschiebungstheorem 6.6 auf Seite 119 anwenden und erhält

$$\delta(t - nT_s) \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-j\omega nT_s}.$$

Mit der Linearität der Fourier Transformation gilt dann

$$f_p(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)e^{-j\omega nT_s} = F_p(\omega).$$

Man kann also $F_p(\omega)$ entweder direkt aus den Abtastwerten $f(nT_s)$ berechnen oder aus $F(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_p(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \end{aligned}$$

Aus beiden Darstellungen sieht man sofort, dass $F_p(\omega)$ periodisch mit Periodendauer ω_s ist, d.h.

$$F_p(\omega + \omega_s) = F_p(\omega) \quad \text{für alle } \omega.$$

Bandbegrenzte Signale Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bandbegrenzt mit Grenzfrequenz $\hat{\omega}$ wenn

$$F(\omega) = 0 \quad \text{für alle } \omega \text{ mit } |\omega| \geq \hat{\omega}.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass $f(t)$ keine Schwingungskomponenten enthält, deren Frequenz oberhalb von $\hat{\omega}$ ist.

Aliasing, d.h. eine Überlappung der Kopien von $F(\omega)$ im Frequenzbereich nach Abtastung wird also vermieden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Signal $f(t)$ ist bandbegrenzt mit einer Grenzfrequenz $\hat{\omega}$.
- Für die Abtastfrequenz ω_s gilt

$$\omega_s > 2\hat{\omega}.$$

Diese Aussage wird auch als Abtasttheorem bezeichnet.

Signalrekonstruktion Nachdem die Abtastwerte im Rechner digital verarbeitet wurden, soll nun aus den Abtastwerten eine zeitkontinuierliche Funktion rekonstruiert werden. Diesen Schritt nennt man auch digital-analog Wandlung. Wie oben gezeigt besteht die Fourier Transformierte von $f_p(t)$ aus einer unendlichen Wiederholung von Kopien von $F(\omega)$. Wenn Aliasing vermieden wurde, genügt es eine dieser Kopien auszuschneiden und mit der inversen Fourier Transformation in den Zeitbereich zurück zu transformieren. Hierzu verwendet man einen sog. idealen Tiefpass, der im Frequenzbereich folgende Darstellung hat:

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & \text{falls } |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Frequenzbereich ergibt die Multiplikation von $H(\omega)$ und $F_p(\omega)$ die Fourier Transformierte $F(\omega)$ der ursprünglichen Zeitfunktion $f(\omega)$:

$$\begin{aligned} H(\omega)F_p(\omega) &= H(\omega) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s) \\ &= F(\omega). \end{aligned}$$

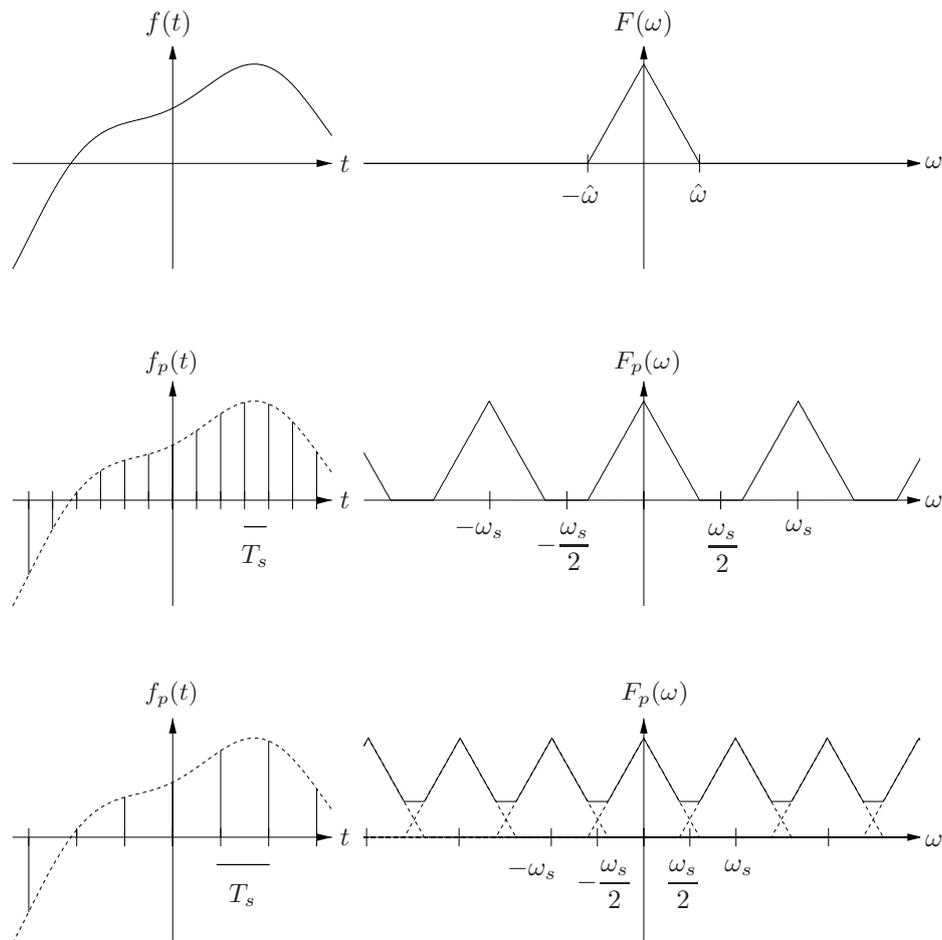


Abbildung 6.1: Oben: Bandbegrenztes Signal $f(t)$ mit Grenzfrequenz $\hat{\omega}$ und Fourier Transformierte $F(\omega)$. Mitte: Abgetastetes Signal $f_p(t) = f(t)p(t)$. Die Abtastfrequenz $\omega_s = 2\pi/T_s$ ist größer als $2\hat{\omega}$, daher kein Aliasing. Die Kopien von $F(\omega)$ überlappen sich nicht. Unten: Abtastfrequenz ω_s ist kleiner als $2\hat{\omega}$, daher tritt Aliasing ein. Die Kopien von $F(\omega)$ überlappen sich.

Beim letzten Schritt war essentiell, dass $F(\omega)$ bandbegrenzt mit Grenzfrequenz $\omega_s/2$ ist. Da im Rechner lediglich die Folge der Abtastwerte bzw. die Funktion $f_p(t)$ vorliegt, muss die Multiplikation mit $H(\omega)$ im Zeitbereich ausgeführt werden. Mit dem Faltungstheorem 6.13 auf Seite 123 gilt

$$(f_p * h)(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega)H(\omega).$$

Die inverse Fourier Transformierte $h(t)$ von $H(\omega)$ berechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi j t} [e^{j\omega t}]_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \\ &= \frac{T_s}{\pi t} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_s t/2} + e^{-j\omega_s t/2}) \\ &= \frac{T_s}{\pi t} \operatorname{im} (e^{j\omega_s t/2}) \\ &= \frac{T_s}{\pi t} \sin \left(\frac{\pi t}{T_s} \right) \quad \text{da } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \\ &= \operatorname{si} \left(\frac{\pi t}{T_s} \right) \end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Damit kann man aus den Abtastwerten $f(nT_s)$ die zeitkontinuierliche Funktion $f(t)$ wie folgt rekonstruieren:

$$\begin{aligned} f(t) &= (f_p * h)(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) (h(t) * \delta(t - nT_s)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) h(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \operatorname{si} \left(\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s} \right). \end{aligned}$$

Um also die analoge Funktion f an einer Stelle t aus den Abtastwerten $f(nT_s)$ zu rekonstruieren, müsste man *alle* Abtastwerte gewichtet mit der *si*-Funktion aufsummieren. Dies ist praktisch natürlich nicht möglich. Da die *si*-Funktion jedoch für betragsgroße Argumente sehr klein wird, kann man die Summe auf die Werte von n einschränken, für die nT_s in der Nähe von t liegt.

6.7 Fourier Transformierte der Gaußschen Glockenkurve

Abschließend noch ein Beispiel für die Berechnung einer interessanten Fourier Transformierten. Die Gaußsche Glockenkurve spielt eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie ist definiert durch

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2/\sigma^2}.$$

Hierbei sind μ und σ^2 Parameter. Eine wichtige Eigenschaft dieser Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1,$$

d.h. die Fläche unter $f(t)$ ist immer gleich 1.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $\mu = 0$ und erhalten

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}t^2/\sigma^2}.$$

Die Berechnung der Fourier Transformierten von $f(t)$ ist durch direktes Lösen des Fourier Integrals nicht möglich. Stattdessen geht man wie folgt vor:

- Zunächst wird $f(t)$ abgeleitet.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -t/\sigma^2 e^{-\frac{1}{2}t^2/\sigma^2} \\ &= -t/\sigma^2 f(t). \end{aligned}$$

- Fourier Transformation auf beiden Seiten. Mit der Differentiation im Zeitbereich (Theorem 6.11 Seite 121) erhält man

$$f'(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad j\omega F(\omega).$$

Mit der Differentiation im Frequenzbereich (Theorem 6.12 Seite 122) gilt

$$-jt f(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad F'(\omega).$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch $j\sigma^2$ erhält man

$$-t/\sigma^2 f(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad \frac{1}{j\sigma^2} F'(\omega).$$

Damit erhält man im Bildbereich die Gleichung

$$j\omega F(\omega) = \frac{1}{j\sigma^2} F'(\omega)$$

bzw.

$$F'(\omega) = -\sigma^2 \omega F(\omega).$$

- Dies ist eine separierbare DGL mit unbekannter Funktion $F(\omega)$. Mit dem in Kapitel 2.5 vorgestellten Verfahren erhält man

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\omega} &= -\sigma^2\omega F \\ \frac{1}{F}dF &= -\sigma^2\omega d\omega \\ \ln|F| &= -\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + C \\ |F| &= Ke^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\ F(\omega) &= Ke^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}, \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j0t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ &= 1\end{aligned}$$

folgt $K = 1$ und damit

$$F(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}.$$

Die somit hergeleitete Korrespondenz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}t^2/\sigma^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

lässt sich so interpretieren, dass einer “engen” Glockenkurve (σ^2 klein) eine “weite” Glockenkurve im Bildbereich entspricht und umgekehrt. Mit der Verschiebung im Zeitbereich (Theorem 6.6 Seite 119) erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2/\sigma^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-j\omega\mu}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}.$$

7 Laplace Transformation

Ein Problem der Fourier Transformation besteht darin, dass viele Funktionen keine Fourier Transformierte haben, da das uneigentliche Integral nicht konvergiert. Tatsächlich können nur Funktionen $f(t)$ transformiert werden, die für $t \rightarrow \pm\infty$ "schnell genug" gegen Null gehen.

Bei der Laplace Transformation wird dies dadurch behoben, dass man die Funktionen vor der Transformation mit einem Faktor $e^{-\alpha t}$ künstlich dämpft. Für positive α geht $e^{-\alpha t}$ exponentiell schnell gegen Null für $t \rightarrow \infty$.

Andererseits wächst dieser Faktor für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell, weshalb bei der Laplace Transformation meistens nur Funktionen $f(t)$ betrachtet werden, für die

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

vorausgesetzt wird. Dies kann durch eine Multiplikation mit $\sigma(t)$ immer erreicht werden.

7.1 Von der Fourier- zur Laplace Transformation

Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Fourier Transformierte der gedämpften Funktion $f(t)e^{-\alpha t}$ ist

$$\begin{aligned} f(t)e^{-\alpha t} &\circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= F_L(s) \end{aligned}$$

wobei $s = \alpha + j\omega$. Die Funktion F_L heißt Laplace Transformierte von $f(t)$.

In dem wichtigen Spezialfall, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist, gilt

$$F_L(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Damit dieses uneigentliche Integral existiert, muss $f(t)e^{-\alpha t}$ für $t \rightarrow \infty$ hinreichend schnell gegen Null gehen. Dies ist der Fall wenn $f(t)$ höchstens exponentiell wächst und α hinreichend groß ist. Da in den Ingenieurwissenschaften praktisch keine Funktionen auftreten, die schneller als exponentiell wachsen, ist diese Voraussetzung unkritisch.

Im Spezialfall $\alpha = 0$ ist $f(t)e^{-\alpha t} = f(t)$ und $s = j\omega$. Damit gilt

$$f(t) \circ\text{---}\bullet F(\omega) = F_L(j\omega),$$

d.h. die Fourier Transformierte von $f(t)$ an der Stelle ω ist gleich der Laplace Transformierten von $f(t)$ an der Stelle $j\omega$.⁴

Die inverse Fourier Transformation von $F_L(s) = F_L(\alpha + j\omega)$ liefert

$$f(t)e^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_L(\alpha + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Multiplikation mit $e^{\alpha t}$ auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} F_L(\alpha + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_L(\alpha + j\omega) e^{(\alpha + j\omega)t} d\omega. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$s = \alpha + j\omega, \quad \frac{ds}{d\omega} = j, \quad d\omega = \frac{1}{j} ds$$

erhält man

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F_L(s) ds.$$

Im Folgenden wird die Laplace Transformierte von $f(t)$ mit $F(s)$ und nicht wie in der Herleitung mit $F_L(s)$ bezeichnet. Das ist zunächst etwas verwirrend, da F ja auch für die Fourier Transformierte verwendet wird. Auch das von der Fourier Transformation bekannte Symbol $\circ \text{---} \bullet$ wird nun für die Laplace Transformation benutzt. Es sollte dabei immer aus dem Kontext hervorgehen, ob die Fourier oder die Laplace Transformation gemeint ist.

Definition 7.1 (Laplace Transformation)

Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Die Funktion

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

heißt Laplace Transformierte von $f(t)$. Umgekehrt heißt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

inverse Laplace Transformierte von $F(s)$.

Im Folgenden werden wir immer voraussetzen, dass

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

⁴Die Fourier Transformierte wird häufig nicht mit $F(\omega)$ sondern mit $F(j\omega)$ bezeichnet. Damit kann die Fourier Transformation als Spezialfall der Laplace Transformation für $\alpha = 0$ betrachtet werden.

In diesem Fall ist

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Bevor wir uns ein paar Beispiele anschauen, sollten wir überlegen, für welche Werte von s die Laplace Transformierte $F(s)$ überhaupt definiert ist. Es geht also um die Fragen, ob das Integral

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

oder genauer gesagt, der Grenzwert

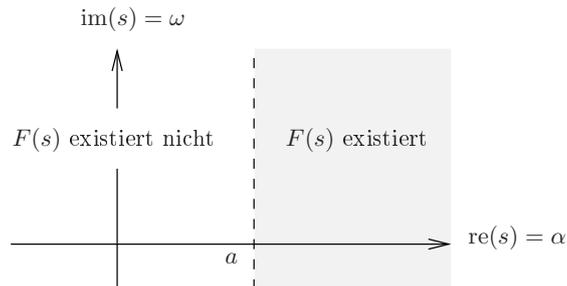
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

existiert. Es gibt hier drei Fälle:

- $F(s)$ ist für kein $s \in \mathbb{C}$ definiert. Dies ist z.B. dann der Fall wenn $f(t)$ schneller als exponentiell wächst und der Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha t}$ folglich nichts hilft. Ein Beispiel ist die Funktion $f(t) = e^{(t^2)}$. In der Praxis kommen solche Funktionen kaum vor.
- $F(s)$ ist für jedes $s \in \mathbb{C}$ definiert. Dies ist z.B. dann der Fall wenn $f(t)$ einen endlichen Träger hat, d.h. wenn es ein Intervall $[a, b]$ gibt, so dass $f(t) = 0$ für alle $t \notin [a, b]$.
- Es gibt eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so dass $F(s)$ genau dann definiert ist, wenn

$$\operatorname{re}(s) > a.$$

Die Funktion $F(s)$ ist damit für alle $s \in \mathbb{C}$ in einer Halbebene der komplexen Zahlenebene definiert, die durch eine zur imaginären Achse parallele Gerade begrenzt ist.



7.2 Laplace Transformation spezieller Funktionen

Theorem 7.2 (Einheitssprungfunktion)

$$\sigma(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sigma(t) \circ\text{---}\bullet & \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{s} (1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT}) \\ &= \frac{1}{s} (1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}). \end{aligned}$$

Falls $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\alpha T} = 0.$$

Damit gilt

$$\sigma(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s} \quad \text{falls } \operatorname{re}(s) > 0.$$

Theorem 7.3 (Rechteckimpuls)

Die Rechteckfunktion der Dauer T ist

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$r(t) \circ \bullet \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} r(t) \circ \bullet & \int_0^{\infty} r(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^T e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^T \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \end{aligned}$$

Es ist ganz nett zu sehen, dass man hieraus auch die Laplace Transformierte von $\sigma(t)$ herleiten kann. Für $T \rightarrow \infty$ gilt

$$r(t) \rightarrow \sigma(t).$$

Führt man den Grenzübergang im Bildbereich durch, erhält man

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} \rightarrow \frac{1}{s}, \quad \text{falls } \operatorname{re}(s) > 0.$$

Daraus folgt

$$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{s}.$$

Theorem 7.4 (Dirac Impuls)

$$\delta(t) \circ \bullet 1.$$

Beweis. Die Ausblendeigenschaft liefert

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-s \cdot 0} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Für den Dirac Impuls sind somit Fourier- und Laplace Transformierte gleich. Dies ist auch nicht überraschend, da

$$\delta(t)e^{-\alpha t} = \delta(t).$$

Theorem 7.5

$$\sigma(t)e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sigma(t)e^{at} \circ \bullet & \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} \left[e^{(a-s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{falls } \operatorname{re}(s) > \operatorname{re}(a) \end{aligned}$$

Zwei Spezialfälle dieser Korrespondenz sind ganz interessant:

- Für den Spezialfall $a = 0$ erhält man

$$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{s}.$$

- Für den Spezialfall $a = j\omega$ erhält man

$$\sigma(t)e^{j\omega t} \circ \bullet \frac{1}{s - j\omega}.$$

Damit lassen sich wie folgt die Laplace Transformierten der trigonometrischen Funktionen bestimmen.

Theorem 7.6 (Trigonometrische Funktionen)

$$\begin{aligned}\sigma(t) \sin(\omega t) &\circ\text{---}\bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \sigma(t) \cos(\omega t) &\circ\text{---}\bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sigma(t) \sin(\omega t) &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2j(s^2 + \omega^2)} (s + j\omega - s + j\omega) \\ &= \frac{2j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \sigma(t) \cos(\omega t) &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2(s^2 + \omega^2)} (s + j\omega + s - j\omega) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Theorem 7.7

$$\sigma(t) t \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s^2}$$

Beweis. Mit partieller Integration erhalt man

$$\begin{aligned}\sigma(t) t &\circ\text{---}\bullet \int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} \quad \text{falls } \operatorname{re}(s) > 0\end{aligned}$$

Theorem 7.8Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sigma(t) t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sigma(t) t^n &\circ \bullet \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s} t^n e^{-st} \right]_0^\infty}_{=0 \text{ falls } \operatorname{re}(s) > 0} + \frac{n}{s} \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt}_{=\mathcal{L}\{\sigma(t) t^{n-1}\}} \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{\sigma(t) t^{n-1}\} \quad \text{falls } \operatorname{re}(s) > 0 \end{aligned}$$

Für $n = 0$ gilt

$$\sigma(t) t^0 = 1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

Damit lassen sich nach o.g. Formel die folgenden Laplace Transformaten iterativ für $n = 1, 2, \dots$ berechnen:

$$\begin{aligned} \sigma(t) t^1 &\circ \bullet \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\sigma(t) t^0\} = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \\ \sigma(t) t^2 &\circ \bullet \frac{2}{s} \mathcal{L}\{\sigma(t) t^1\} = \frac{2}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} \\ \sigma(t) t^3 &\circ \bullet \frac{3}{s} \mathcal{L}\{\sigma(t) t^2\} = \frac{3}{s} \frac{2}{s^3} = \frac{6}{s^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw. allgemein

$$\sigma(t) t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}, \operatorname{re}(s) > 0.$$

Aufgrund der Linearität der Laplace Transformation, kann man damit eine Formel für die Laplace Transformaten von Polynomen angeben:

$$\sigma(t) \sum_{i=0}^n a_i t^i \circ \bullet \sum_{i=0}^n a_i \frac{i!}{s^{i+1}} \quad \operatorname{re}(s) > 0.$$

7.3 Eigenschaften der Laplace Transformation

Theorem 7.9 (Linearität)

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\circ\!\!\!\bullet F(s) + G(s) \\ uf(t) &\circ\!\!\!\bullet uF(s). \end{aligned}$$

Beweis. Aus der Linearität der Integration folgt

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + g(t))e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= F(s) + G(s) \\ uf(t) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} uf(t)e^{-st} dt \\ &= u \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= uF(s). \end{aligned}$$

Theorem 7.10 (Ähnlichkeitssatz)

Für jedes $a > 0$ gilt

$$f(at) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Beweis. Mit der Substitution $\tau = at$ und $dt = d\tau/a$ erhält man

$$\begin{aligned} f(at) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau/a} \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

Theorem 7.11 (Verschiebungssatz)Für jedes \hat{t} gilt

$$f(t - \hat{t}) \circ \bullet e^{-s\hat{t}}F(s).$$

Beweis. Mit der Substitution $\tau = t - \hat{t}$ und $d\tau = dt$ gilt

$$\begin{aligned} f(t - \hat{t}) \circ \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \hat{t})e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+\hat{t})} d\tau \\ &= e^{-s\hat{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-s\hat{t}}F(s) \end{aligned}$$

Bei der Anwendung des Verschiebungssatzes entstehen leicht Fehler, die daher kommen, dass man i.a. implizit voraussetzt, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$, den hierfür erforderlichen Faktor $\sigma(t)$ aber oft weglässt:

Beispiel 7.12 Sei $f(t) = t$. Mit dem Verschiebungssatz für $\hat{t} = 1$ erhält man

$$t - 1 \circ \bullet e^{-s} \frac{1}{s^2}.$$

Anwendung der Linearität würde aber ergeben

$$t - 1 \circ \bullet \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}.$$

Der Widerspruch entsteht dadurch, dass

$$t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$$

genau genommen falsch ist. Richtig ist

$$\sigma(t)t \circ \bullet \frac{1}{s^2}.$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt dann

$$\sigma(t-1)(t-1) \circ \bullet e^{-s} \frac{1}{s^2}.$$

Mit Linearität erhält man hingegen

$$\sigma(t)(t-1) \circ \bullet \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}.$$

Dies ist nun kein Widerspruch mehr, da ja

$$\sigma(t-1)(t-1) \neq \sigma(t)(t-1).$$

Schreibt man den Faktor $\sigma(t)$ explizit dazu, liest sich der Verschiebungssatz wie folgt:

Theorem 7.13 (Verschiebungssatz)

Sei

$$\sigma(t)f(t) \circ\!\!\!\bullet F(s).$$

Dann gilt für jedes \hat{t}

$$\sigma(t - \hat{t})f(t - \hat{t}) \circ\!\!\!\bullet e^{-s\hat{t}}F(s).$$

Am Beweis ändert sich dadurch nichts.

Theorem 7.14 (Dämpfungssatz)

$$e^{-at}f(t) \circ\!\!\!\bullet F(s + a)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} e^{-at}f(t) \circ\!\!\!\bullet & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt \\ &= F(s + a). \end{aligned}$$

Verschiebungssatz und Dämpfungssatz sind dual zueinander: Der Verschiebungssatz sagt, dass eine Verschiebung um \hat{t} im Zeitbereich einer Multiplikation mit $e^{-s\hat{t}}$ im Bildbereich entspricht, der Dämpfungssatz sagt, dass eine Verschiebung um a im Bildbereich einer Multiplikation mit e^{-at} im Zeitbereich entspricht.

Theorem 7.15 (Differentiation im Zeitbereich)*Sei*

$$f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(s).$$

Dann gilt

$$f'(t) \circ\!\!\!\rightarrow sF(s).$$

Beweis. Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} f'(t) \circ\!\!\!\rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde vorausgesetzt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)e^{-st} = 0.$$

Dies muss gelten, da sonst bereits

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

nicht existieren würde.

Die meisten Funktionen, deren Laplace Transformierte wir berechnet haben, haben die Form $\sigma(t)f(t)$, z.B.

$$\sigma(t)t, \sigma(t)e^{at}, \sigma(t)\cos(t), \dots$$

Für diese Funktionen gibt es eine entsprechende Variante des o.g. Theorems.

Theorem 7.16 (Differentiation im Zeitbereich)

Sei

$$\sigma(t)f(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s)$$

und $f(t)$ stetig bei $t = 0$. Dann gilt

$$\sigma(t)f'(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet sF(s) - f(0).$$

Beweis. Sei $f(t)$ eine beliebige Funktion und

$$\sigma(t)f(t) = F(s).$$

Mit obigem Theorem gilt

$$(\sigma(t)f(t))' \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet sF(s).$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (\sigma(t)f(t))' &= \delta(t)f(t) + \sigma(t)f'(t) \\ &= \delta(t)f(0) + \sigma(t)f'(t). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde vorausgesetzt, dass $f(t)$ stetig bei $t = 0$ ist. Damit ist

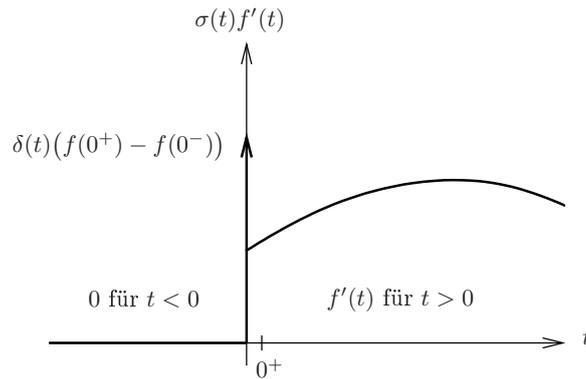
$$\begin{aligned} \sigma(t)f'(t) &= (\sigma(t)f(t))' - \delta(t)f(0) \\ &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Anwendung findet dieses Theorem v.a. bei der Lösung von DGL. Die hierbei auftretenden Funktionen $f(t)$ erfüllen die Voraussetzung $f(t) = 0$ für $t < 0$ aber i.a. nicht und haben daher oft gar keine Laplace Transformierte. Der Ausweg besteht dann darin, dass man die gesamte DGL zuerst mit $\sigma(t)$ multipliziert und somit auf Terme $\sigma(t)f(t)$, $\sigma(t)f'(t)$ usw. kommt.

Vor allem bei der Untersuchung von Einschaltvorgängen kann es vorkommen, dass $f(t)$ einen Sprung bei $t = 0$ von $f(0^-)$ auf $f(0^+)$ macht. Dies führt in der Ableitung $f'(t)$ zu einem Impuls der Stärke $f(0^+) - f(0^-)$ bei $t = 0$, d.h. einem Summanden

$$\delta(t)(f(0^+) - f(0^-)).$$

Die Funktion $\sigma(t)f'(t)$ sieht dann schematisch wie folgt aus:



Der Differentiationssatz kann nun auf diese Situationen verallgemeinert werden.

Theorem 7.17 (Differentiation im Zeitbereich)

Sei

$$\sigma(t)f(t) \circ \bullet F(s).$$

Dann gilt

$$\sigma(t)f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0^-).$$

Beweis. Da $f'(t)$ einen Impuls bei $t = 0$ hat, gilt

$$\begin{aligned} \sigma(t)f'(t) &\circ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)f'(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(f(0^+) - f(0^-))e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= f(0^+) - f(0^-) + \underbrace{[f(t)e^{-st}]_{0^+}^{\infty}}_{-f(0^+)} - \int_{0^+}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= f(0^+) - f(0^-) - f(0^+) + s \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(0^-) + s \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0^-). \end{aligned}$$

Wenn $f(t)$ keinen Sprung bei $t = 0$ hat, ist

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0)$$

und man erhält wie in Theorem 7.16

$$\sigma(t)f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0).$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &\circ \bullet F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\circ \bullet sF(s) - f(0^-) \\ \sigma(t)f''(t) &\circ \bullet s^2F(s) - sf(0) - f'(0^-) \\ &\vdots \\ \sigma(t)f^{(n)}(t) &\circ \bullet s^nF(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^{(i)}(0^-) \end{aligned}$$

Beispiel 7.18 Sei

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } t \leq 0 \\ ce^{at} & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(0^-) &= 1 \\ f(0^+) &= c, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion macht an der Stelle $t = 0$ einen Sprung der Höhe $c - 1$.
Folglich ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= (c-1)\delta(t) + \begin{cases} -\sin(t) & \text{falls } t < 0 \\ cae^{at} & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ \sigma(t)f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t = 0 \\ ce^{at} & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ \circ \bullet \frac{c}{s-a} &= F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &= (c-1)\delta(t) + \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ cae^{at} & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ \circ \bullet \frac{ca}{s-a} + c-1 & \\ &= \frac{ca}{s-a} + \frac{(c-1)(s-a)}{s-a} \\ &= \frac{ca + cs - s - ca + a}{s-a} \\ &= \frac{cs - s + a}{s-1} \\ &= \frac{cs}{s-a} - \frac{s-a}{s-a} \\ &= sF(s) - 1 \\ &= sF(s) - f(0^-). \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.19 Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \\ F(s) &= \frac{1}{s} \\ f'(t) &= \delta(t) \\ &\circ\text{---}\bullet 1 \\ &= sF(s). \end{aligned}$$

Da $f(0^-) = 0$, gilt

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0^-).$$

Da jedoch $f(t)$ bei $t = 0$ einen Sprung hat, kann die einfache Formel

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0)$$

nicht angewandt werden und wäre hier falsch, da $f(0) = 1$. \square

Beispiel 7.20 Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \sin(t) \\ F(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ f'(t) &= \delta(t) \sin(t) + \sigma(t) \cos(t) \\ &= \sigma(t) \cos(t) \\ &\circ\text{---}\bullet \frac{s}{s^2 + 1} \\ &= sF(s). \square \end{aligned}$$

Da $f(0^-) = 0$, gilt

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0^-).$$

Da $f(t)$ bei $t = 0$ keinen Sprung hat, ist $f(0^-) = f(0)$ und

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0)$$

ist hier ebenfalls korrekt. \square

Beispiel 7.21 Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \cos(t) \\ F(s) &= \frac{s}{s^2 + 1} \\ f'(t) &= \delta(t) \cos(t) - \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t) - \sigma(t) \sin(t) \\ &\circ\text{---}\bullet 1 - \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= \frac{s^2}{s^2 + 1} \\ &= sF(s). \square \end{aligned}$$

Da $f(0^-) = 0$, gilt

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0^-).$$

Da jedoch $f(t)$ bei $t = 0$ einen Sprung hat, kann die einfache Formel

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0)$$

nicht angewandt werden und wäre hier falsch, da $f(0) = 1$. \square

Beispiel 7.22 Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{at} \\ F(s) &= \frac{1}{s-a} \\ f'(t) &= \delta(t)e^{at} + \sigma(t)e^{at} \\ &= \delta(t) + \sigma(t)e^{at} \\ &\circ\text{---}\bullet 1 + \frac{1}{s-a} \\ &= \frac{s-1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{s}{s-1} \\ &= sF(s). \square \end{aligned}$$

Da $f(0^-) = 0$, gilt

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0^-).$$

Da jedoch $f(t)$ bei $t = 0$ einen Sprung hat, kann die einfache Formel

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet sF(s) - f(0)$$

nicht angewandt werden und wäre hier falsch, da $f(0) = 1$. \square

Beispiel 7.23 Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)(t^2 + t) \\ F(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} \\ f'(t) &= \delta(t)(t^2 + t) + \sigma(t)(2t + 1) \\ &= \sigma(t)(2t + 1) \\ &\circ\text{---}\bullet \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \\ &= sF(s). \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.24 Sei

$$f(t) = \cos(t)$$

Da $f(t)$ keinen Sprung bei $t = 0$ hat, ist $f(0^-) = f(0)$.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f(t) & \circ\text{---}\bullet \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \sigma(t)f'(t) & = -\sigma(t)\sin(t) \\
 & \circ\text{---}\bullet -\frac{1}{s^2 + 1} \\
 & = \frac{s^2 - (s^2 + 1)}{s^2 + 1} \\
 & = \frac{s^2}{s^2 + 1} - \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1} \\
 & = s\frac{s}{s^2 + 1} - 1 \\
 & = sF(s) - f(0). \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.25 Sei $f(t) = 1$. Auch hier ist $f(0^-) = f(0)$.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f(t) & = \sigma(t) \\
 & \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s} = F(s) \\
 f'(t) & = 0 \\
 \sigma(t)f'(t) & = 0 \\
 & \circ\text{---}\bullet 0 \\
 & = s\frac{1}{s} - 1 \\
 & = sF(s) - f(0). \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.26 Sei $f(t) = e^{at}$. Auch hier ist $f(0^-) = f(0)$.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f(t) & \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s - a} = F(s) \\
 f'(t) & = ae^{at} \\
 \sigma(t)f'(t) & = \sigma(t)ae^{at} \\
 & \circ\text{---}\bullet \frac{a}{s - a} \\
 & = \frac{s}{s - a} - \frac{s - a}{s - a} \\
 & = sF(s) - f(0). \square
 \end{aligned}$$

Theorem 7.27 (Differentiation im Bildbereich)

Sei

$$f(t) \circ \bullet F(s).$$

Dann gilt

$$tf(t) \circ \bullet -F'(s).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}F(s) &= -\frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} (f(t)e^{-st}) dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} (-t)f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-st} dt \\ &\bullet \circ tf(t). \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 7.28 (Integration im Zeitbereich)

$$\int_0^t f(u) du \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{F(s)}{s}$$

Beweis. Sei

$$g(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Dann ist $g'(t) = f(t)$. Mit der Differentiation im Zeitbereich gilt somit

$$\begin{aligned} f(t) &= g'(t) \\ \circ \longrightarrow \bullet & \quad sG(s) \\ &= F(s) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$sG(s) = F(s) \text{ bzw. } G(s) = \frac{F(s)}{s}. \quad \square$$

Der Beweis wäre genauso gültig gewesen, wenn man statt der Untergrenze Null eine beliebige andere Untergrenze c genommen hätte, d.h. es gilt auch

$$\int_c^t f(u) du \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{F(s)}{s}$$

Dies ist scheinbar ein Widerspruch, da die Zeitfunktionen sich um eine Konstante unterscheiden, die Bildfunktionen jedoch gleich sind. Die Lösung besteht darin, dass implizit vorausgesetzt wurde, dass die Laplace Transformierte überhaupt existiert, was nicht notwendigerweise der Fall ist:

Beispiel 7.29 Sei

$$f(t) = \sigma(t), \quad F(s) = \frac{1}{s}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^t f(u) du &= \int_0^t \sigma(u) du = \sigma(t) \int_0^t 1 du = \sigma(t)t \\ \circ \longrightarrow \bullet & \quad \frac{1}{s^2} = \frac{F(s)}{s}. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man z.B. mit Untergrenze $c = 1$

$$\int_1^t f(u) du = \int_1^t \sigma(u) du = \int_0^t \sigma(u) du - \int_0^1 \sigma(u) du = \sigma(t)t - 1$$

und diese Funktion hat keine Laplace Transformierte.

Theorem 7.30 (Faltungssatz)

$$(f * g)(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(s)G(s).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \\
 \circ \longrightarrow \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} dt d\tau \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-st} dt}_{F(s)e^{-s\tau}} d\tau \\
 &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)F(s)e^{-s\tau} d\tau \\
 &= F(s) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\
 &= F(s)G(s)
 \end{aligned}$$

Der Faltungssatz hat eine große Bedeutung für LTI Systeme. Laut Theorem 4.2 auf Seite 83 kann jedes LTI System S durch seine Impulsantwort beschrieben werden. Ist $g = S(\delta)$ die Impulsantwort von S , dann ist

$$S(f) = f * g$$

für alle f . Durch den Faltungssatz lässt sich $S(f)$ im Bildbereich viel einfacher berechnen durch Multiplikation mit $G(s)$.

Wie im Fall der Fourier Transformation wird auch die Laplace Transformierte der Impulsantwort eines LTI Systems als dessen Übertragungsfunktion bezeichnet.

Definition 7.31 (Übertragungsfunktion)

Sei S ein LTI System mit Impulsantwort $g(t)$. Die Laplace Transformierte $G(s)$ von $g(t)$ heißt Übertragungsfunktion von S .

7.4 Lösen von DGL mit Laplace Transformation

Durch die Laplace Transformation wird aus einer Ableitung im Zeitbereich eine Multiplikation mit s im Bildbereich. Führt man auf beiden Seiten einer DGL eine Laplace Transformierte durch, entsteht eine "normale" Gleichung, d.h. eine Gleichung ohne Ableitungen. Diese ist viel einfacher lösbar als die ursprüngliche DGL. Problematisch ist lediglich die Rücktransformation der Lösung vom Bildbereich in den Zeitbereich. Hier helfen oft Tabellen oder die im vorigen Abschnitt behandelten Eigenschaften der Laplace Transformation.

Beispiel 7.32 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$f'(t) + f(t) = 0, \quad f(0) = 5.$$

Es ist bekannt, dass die Lösungsfunktionen die Form $Ce^{\lambda t}$ haben. Diese Funktionen haben jedoch keine Laplace Transformierte. Wir haben uns immer auf Funktionen $f(t)$ beschränkt mit $f(t) = 0$ für $t < 0$. Folglich multipliziert man zuerst beide Seiten der DGL mit $\sigma(t)$ und erhält

$$\sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) = 0.$$

Sei nun

$$\sigma(t)f(t) \circ\!\!\!\bullet F(s).$$

Mit der Ableitung im Zeitbereich erhält man

$$\sigma(t)f'(t) \circ\!\!\!\bullet sF(s) - f(0^-).$$

Laplace Transformation der DGL auf beiden Seiten liefert somit⁵

$$sF(s) - f(0^-) + F(s) = 0.$$

Auflösen nach $F(s)$ liefert die Lösung im Bildbereich

$$F(s) = f(0^-) \frac{1}{s+1}.$$

Die Rücktransformation von $F(s)$ liefert $\sigma(t)f(t)$.

$$\sigma(t)f(t) = \sigma(t)f(0^-)e^{-t}.$$

Im Bereich $t \geq 0$ ist die gesuchte Lösungsfunktion damit

$$f(t) = f(0^-)e^{-t}.$$

Mit dem Startwert $f(0) = 5$ kann man die Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Setzt man $t = 0$ in die allgemeine Lösung ein, erhält man

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0^-)e^{-0} \\ &= f(0^-). \end{aligned}$$

Aus der Startbedingung $f(0) = 5$ folgt damit $f(0^-) = 5$ so dass

$$f(t) = 5e^{-t} \text{ für } t \geq 0. \quad \square$$

⁵Da bekannt ist, dass die Lösungsfunktion $f(t)$ eine e -Funktion und daher keinen Sprung bei $t = 0$ hat, hätte man auch $f(0)$ statt $f(0^-)$ nehmen können.

Beispiel 7.33 In der Regel macht man größere Schritte bei der Lösung. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$f''(t) + f(t) = t, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = -2.$$

Dies ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und folglich muss $f(t)$ und $f'(t)$ stetig sein. Daher ist $f(0^-) = f(0)$ und $f'(0^-) = f'(0)$.

Laplace Transformation. Durch Differentiation im Zeitbereich erhält man folgende Transformierte:

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet sF(s) - 1 \\ \sigma(t)f''(t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - s + 2 \\ \sigma(t)t &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Damit wird aus der DGL im Zeitbereich die algebraische Gleichung im Bildbereich

$$s^2F(s) - s + 2 + F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Lösen im Bildbereich. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} F(s)(s^2 + 1) &= \frac{1}{s^2} + s - 2 \\ F(s) &= \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Den ersten Summanden kann man mit Partialbruchzerlegung umformen in

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

Damit gilt

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich. Mit Theorem 7.6 auf Seite 150 gilt

$$\begin{aligned} \sigma(t) \sin(\omega t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \sigma(t) \cos(\omega t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Mit $\omega = 1$ erhält man damit

$$\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1} \bullet\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \sigma(t)(t + \cos(t) - 3 \sin(t)).$$

Die Lösung der DGL für $t \geq 0$ ist folglich

$$f(t) = t + \cos(t) - 3 \sin(t). \quad \square$$

Beispiel 7.34 Wir kehren zurück zum Beispiel aus Kapitel 4.3 Seite 101. Dort wurde die DGL

$$mh''(t) + Dh(t) = Df(t)$$

mit den Annahmen $f(t) = h(t) = 0$ für $t \leq 0$. Ziel war $h(t)$ in Abhängigkeit von $f(t)$ zu berechnen. Laplace Transformation liefert

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\text{---}\bullet F(s) \\ h(t) &\circ\text{---}\bullet H(s) \\ h'(t) &\circ\text{---}\bullet sH(s) \\ h''(t) &\circ\text{---}\bullet s^2H(s) \end{aligned}$$

Damit wird aus der DGL die algebraische Gleichung im Bildbereich

$$\begin{aligned} ms^2H(s) + DH(s) &= DF(s) \\ H(s)(ms^2 + D) &= DF(s) \\ H(s) &= \frac{D}{ms^2 + D}F(s) \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion des Systems ist somit

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{D}{ms^2 + D} \\ &= \frac{D/m}{s^2 + D/m} \\ &= \omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega = \sqrt{D/m}. \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert die Impulsantwort

$$g(t) = \omega \sigma(t) \sin(\omega t).$$

Mit dem Faltungssatz gilt somit

$$\begin{aligned} h(t) &= (g * f)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \sigma(t) \omega \int_0^t \sin(\omega \tau) f(t - \tau) d\tau. \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.35 Abschließend noch ein warnendes Beispiel, bei dem $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Sprung hat und folglich $f(0^-) \neq f(0)$. In diesem Fall muss man genauer rechnen! Sei

$$f'(t) + f(t) = \delta(t), \quad f(0) = 5.$$

Da wiederum nur die Lösung für $t \geq 0$ interessiert, dürfen beide Seiten mit $\sigma(t)$ multipliziert werden und man erhält die DGL

$$\sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) = \delta(t).$$

Beachten Sie, dass $\sigma(t)\delta(t) = \delta(t)$, siehe Beispiel 3.19 auf Seite 70. Mit

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

erhält man durch Laplace Transformation auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0^-) + F(s) &= 1 \\ F(s) &= (1 + f(0^-)) \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert

$$\sigma(t)f(t) = \sigma(t)(1 + f(0^-))e^{-t}.$$

Damit gilt für die Lösungsfunktion

$$f(t) = (1 + f(0^-))e^{-t} \text{ für } t \geq 0.$$

Für $t = 0$ erhält man

$$f(0) = 1 + f(0^-).$$

Aus dem Startwert $f(0) = 5$ folgt somit

$$f(0^-) = 4.$$

Die Lösungsfunktion ist damit

$$f(t) = 5e^{-t} \text{ für } t \geq 0.$$

Da $f(0^-) \neq f(0)$ muss die Funktion $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Sprung von 4 auf 5 machen. Tatsächlich hat die DGL eine Lösung auf ganz \mathbb{R} , nämlich

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = (4 + \sigma(t))e^{-t}.$$

Dies wird wie folgt verifiziert. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t)e^{-t} - (4 + \sigma(t))e^{-t} \\ &= \delta(t) - (4 + \sigma(t))e^{-t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\underbrace{\delta(t) - (4 + \sigma(t))e^{-t}}_{f'(t)} + \underbrace{(4 + \sigma(t))e^{-t}}_{f(t)} = \delta(t). \quad \square$$

A Anhang

A.1 Rechengesetze für Faltung und Dirac Impuls

- **Kommutativgesetz**

$$f * g = g * f$$

- **Assoziativgesetz**

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

- **Linearität (inkl. Distributivgesetz)**

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) * g &= f_1 * g + f_2 * g \\ (af) * g &= a(f * g) \end{aligned}$$

- **Zeitinvarianz**

$$f_{\hat{t}} * g = (f * g)_{\hat{t}} = f * g_{\hat{t}}$$

- **Vertauschbarkeit von Faltung und Ableitung**

$$f' * g = (f * g)' = f * g'$$

- **Integration durch Faltung mit Sprungfunktion**

$$(f * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

- **Neutrales Element**

$$\begin{aligned} f * \delta &= f \\ f * \delta_{\hat{t}} &= f_{\hat{t}} \end{aligned}$$

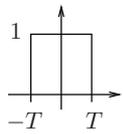
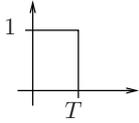
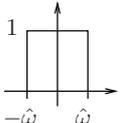
- **Verallgemeinerte Ableitung**

$$\sigma'(t) = \delta(t)$$

- **Ausblendeigenschaft (falls f stetig bei $t = a$)**

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t-a) &= f(a)\delta(t-a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) &= f(a) \end{aligned}$$

A.2 Die wichtigsten Fourier Transformationspaare

$\delta(t)$	○—●	1
1	○—●	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\hat{\omega}t}$	○—●	$2\pi\delta(\omega - \hat{\omega})$
$\sigma(t)e^{at}$	○—●	$\frac{1}{j\omega - a}$ falls $a < 0$
$\cos(\hat{\omega}t)$	○—●	$\pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) + \delta(\omega + \hat{\omega}))$
$\sin(\hat{\omega}t)$	○—●	$-j\pi(\delta(\omega - \hat{\omega}) - \delta(\omega + \hat{\omega}))$
$\text{sign}(t)$	○—●	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{t}$	○—●	$-j\pi\text{sign}(\omega)$
$\sigma(t)$	○—●	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\frac{j}{\pi t} + \delta(t)$	○—●	$2\sigma(\omega)$
$e^{- t }$	○—●	$\frac{2}{\omega^2 + 1}$
$\frac{1}{t^2 + 1}$	○—●	$\pi e^{- \omega }$
$\frac{t}{t^2 + 1}$	○—●	$-j\pi\text{sign}(\omega)e^{- \omega }$
	○—●	$2T\text{si}(\omega T)$
	○—●	$\begin{cases} \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega T}) & \text{falls } \omega \neq 0 \\ T & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$
$\frac{\hat{\omega}}{\pi}\text{si}(\hat{\omega}t)$	○—●	
$T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$	○—●	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

A.3 Rechengesetze für die Fourier Transformation

Symmetrie

$$\begin{aligned} f(t) \text{ reell} &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F(-\omega) = \overline{F(\omega)} \\ f(t) \text{ reell, gerade} &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) \text{ reell, gerade} \\ f(t) \text{ reell, ungerade} &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) \text{ imaginär, ungerade} \end{aligned}$$

Linearität

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) + G(\omega) \\ af(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad aF(\omega) \end{aligned}$$

Zeitverschiebung

$$f(t - \hat{t}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}} F(\omega)$$

Frequenzverschiebung

$$f(t)e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega - \hat{\omega})$$

Modulation

$$f(t) \cos(\hat{\omega}t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega - \hat{\omega}) + F(\omega + \hat{\omega}))$$

Zeitumkehr

$$f(-t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(-\omega)$$

Zeitdehnung

$$f(at) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$\begin{aligned} f'(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad (j\omega)F(\omega) \\ f''(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad (j\omega)^2 F(\omega) \end{aligned}$$

Integration im Zeitbereich

$$\int_{-\infty}^t f(u) du \quad \circ \text{---} \bullet \quad \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) F(\omega)$$

Ableitung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} (-jt)f(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F'(\omega) \\ (-jt)^2 f(t) &\quad \circ \text{---} \bullet \quad F''(\omega) \end{aligned}$$

Faltung im Zeitbereich

$$(f * g)(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega)G(\omega)$$

Faltung im Frequenzbereich

$$f(t)g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$$

Abtastung

$$\underbrace{f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)}_{\text{Abtastung}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(t - nT_s) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{T_s} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s)}_{\text{periodische Fortsetzung}}$$

Theorem von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

A.4 Die wichtigsten Laplace Transformationspaare

$$\begin{array}{ll}
 \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} \\
 \delta(t) & \circ \text{---} \bullet \quad 1 \\
 t \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^2} \\
 t^n \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \\
 e^{at} \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s-a} \\
 t^n e^{at} \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \\
 \sin(\omega t) \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
 \cos(\omega t) \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \\ \text{---} \\ \downarrow \\ T \end{array} & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1 - e^{-sT}}{s} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \\ \text{---} \\ \downarrow \\ -T \quad T \end{array} & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{e^{sT} - e^{-sT}}{s} \\
 \delta(t - \hat{t}) & \circ \text{---} \bullet \quad e^{-s\hat{t}} \\
 [t] \sigma(t) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s(e^s - 1)} \\
 p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{1 - e^{-sT}}
 \end{array}$$

A.5 Rechengesetze für die Laplace Transformation

- Falls

$$f(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s)$$

Linearität

$$f(t) + g(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s) + G(s)$$

$$af(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet aF(s)$$

Verschiebung

$$f(t - \hat{t}) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet e^{-s\hat{t}}F(s)$$

Ähnlichkeit

$$f(at) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Dämpfung

$$e^{-at}f(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s + a)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$f'(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet sF(s)$$

Ableitung im Frequenzbereich

$$tf(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet -F'(s)$$

Integration im Zeitbereich

$$\int_{-\infty}^t f(u)du \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$$

Faltung

$$(f * g)(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s)G(s)$$

- Falls

$$\sigma(t)f(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(s)$$

Verschiebung

$$\sigma(t - \hat{t})f(t - \hat{t}) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet e^{-s\hat{t}}F(s)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$\sigma(t)f'(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet sF(s) - f(0^-)$$

$$\sigma(t)f''(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

Index

- $\delta(t)$, 69
- Abtasttheorem, 139
- Abtastung, 137
- Aliasing, 138
- allgemeine Lösung, 15
- Ausblendeigenschaft, 79
- bandbegrenzttes Signal, 139
- Dämpfungssatz, 154
- Differentiation im Bildbereich, 162
- Differentiation im Frequenzbereich, 122
- Differentiation im Zeitbereich, 121, 155
- Dirac Impuls, 69, 72
- diskrete Faltung, 46
- distributionelle Ableitung, 73
- distributionelle Gleichheit, 68
- Dualitätsprinzip, 134, 135
- erzwungene Schwingung, 42
- Eulerscher Polygonzug, 32
- explizite Form, 15
- Faltung, 55
- Faltung im Frequenzbereich, 124
- Faltung im Zeitbereich, 123
- Faltungssatz, 164
- Fourier Koeffizienten, 106
- Fourier Transformation, 115
- Frequenzverschiebung, 119
- gedämpfte Schwingung, 41
- gewöhnliche DGL, 15
- Glättung, 62
- harmonische Schwingung, 104
- Impulszug, 112, 137
- Integration im Zeitbereich, 163
- kausale Funktion, 56
- konstante Koeffizienten, 35
- Laplace Transformation, 145
- linear time invariant, 83
- Lineare DGL n -ter Ordnung, 35
- Lineare DGL erster Ordnung, 28
- lineares System, 44
- lineares zeitinvariantes System, 82
- LTI, 83
- Modulation, 120
- Oberschwingung, 106
- Parsevalsche Gleichung, 125
- partikuläre Lösung, 15
- Resonanz, 40
- Satz von Plancherel, 125
- separierbare DGL, 18
- Signalrekonstruktion, 139
- Sprungfunktion, 61
- Trennung der Variablen, 19
- Übertragungsfunktion, 103, 164
- Variation der Konstanten, 28
- verallgemeinerte Ableitung, 73
- Verschiebungssatz, 119, 153, 154
- Zeitdehnung, 120
- zeitinvariantes System, 44
- Zeitumkehr, 120
- Zeitverschiebung, 153, 154
- Zeitverschiebung, 119

Literatur

- [1] BRIGOLA: *Fourier-Analysis und Distributionen*. editon swk, 2012
- [2] BURG ; HAF ; WILLE: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 3*. Teubner, 1993
- [3] GIROD ; RABENSTEIN ; STENGER: *Einführung in die Systemtheorie*. Teubner, 2007
- [4] GLATZ ; GRIEB ; HOHLOCH ; KÜMMERER ; MOHR: *Brücken zur Mathematik Band 6, Komplexe Arithmetik und Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Cornelsen, 1994
- [5] GLATZ ; GRIEB ; HOHLOCH ; KÜMMERER ; MOHR: *Brücken zur Mathematik Band 7, Fourier Analysis*. Cornelsen, 1996
- [6] RICHARDS ; YOUN: *Theory of Distributions*. Cambridge University Press, 1990