Mathematik 2

— Zusammenfassung —

Skript zur Vorlesung an der Hochschule Heilbronn
(Stand: 28. September 2020)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume

Linearkombination. Eine gewichtete Summe $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ heißt Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Vektorraum. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Vektorraum wenn sie abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation, d.h. für alle $\vec{u}, \vec{v} \in M$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &\in M \\ c\vec{u} &\in M. \end{aligned}$$

Beispiele:

- Ursprungsgerade, Ursprungsebene oder auch der ganze $\mathbb{R}^m$.
- Die Lösungsmenge eines homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$.
- Für beliebige $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ist die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

  $$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \;=\; \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \;=\; \{A\vec{x} \,|\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

  ein Vektorraum. Diese Menge heißt lineare Hülle von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Lineare Unabhängigkeit. $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ heißen linear unabhängig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- Kein $\vec{a}_\ell$ ist Linearkombination der anderen.
- $\vec{0}$ kann nur auf triviale Weise als LK von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden, d.h. $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Jeder Vektor $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ kann auf genau eine Weise als LK von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden, d.h. das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.
- Die Funktion $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist injektiv.

Basis, Dimension. Ein Tupel $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ heißt Basis eines Vektorraums $M \subseteq \mathbb{R}^m$ wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind und $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = M$. Jede Basis von M hat gleich viele Vektoren. Diese Anzahl heißt Dimension von M.

Die Dimension von $\mathbb{R}^n$ ist n. Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

n linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ im $\mathbb{R}^n$ erzeugen immer den ganzen $\mathbb{R}^n$, d.h. $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^n$. Mehr als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind folglich immer linear abhängig.

Affiner Raum. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt affiner Raum wenn es einen Vektorraum $M' \subseteq \mathbb{R}^m$ und einen Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$ gibt so dasss

$$M = \{\vec{p} + \vec{v} \mid \vec{v} \in M'\}.$$

Ein affiner Raum ist somit ein "verschobener" Vektorraum. Beispiele: affine Gerade, affine Ebene, Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.

2 Matrizen

Matrix-Vektor Multiplikation $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

- Komponentenweise (Zeile mal Spalte Regel)

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

- Linearkombination der Spalten von A

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Jede Linearkombination ist als Matrix-Vektor Produkt darstellbar.

Matrix-Matrix Multiplikation $AB = C$.

- Komponentenweise (Zeile mal Spalte Regel)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

- Spaltenweise durch Matrix-Vektor Multiplikationen

$$C = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_n).$$

Transponierte Matrix. $(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$. Zeilen und Spalten werden vertauscht.

Jeder Vektor kann als Matrix mit einer Spalte interpretiert werden. Darstellung des Skalarprodukts als Matrixprodukt: $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{y}$.

Inverse Matrix. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt regulär wenn ihre Spalten linear unabhängig sind. In diesem Fall hat die Gleichung $AX = E$ genau eine Lösung X, wobei $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ die Einheitsmatrix ist. Diese Lösung X heißt inverse Matrix A^{-1} von A.

Rechengesetze.

$$\begin{aligned}
(A+B)\vec{x} &= A\vec{x} + B\vec{x} \\
A(\vec{x}+\vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\
(AB)\vec{x} &= A(B\vec{x}) \\
(AB)C &= A(BC) \\
u(AB) &= (uA)B = A(uB) \\
(AB)^{\mathrm{T}} &= B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \\
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}
\end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus zum Lösen von LGS und Invertieren von Matrizen.

3 Lineare Funkionen

Eine Funktion $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt linear wenn

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) &= f(\vec{x})+f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$

Zwischen linearen Funktionen und Matrizen besteht ein 1:1 Zusammenhang. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear gdw. es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Die Spalten von A sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren von f, d.h.

$$A = \left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\right).$$

Zwischen Operationen auf linearen Funktionen und Matrixoperationen besteht folgender Zusammenhang:

Lineare Funktion	Matrixdarstellung
f, g	A, B
$f(\vec{x})$	$A\vec{x}$
$f+g$	$A+B$
uf	uA
$f \circ g$	AB
f bijektiv	A regulär
f^{-1}	A^{-1}

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gleichungen mit einer unbekannten Funktion $y(x)$ bzw. y.

Lösen durch Integration.

$$y^{(n)} = g(x).$$

Lösung durch n mal integrieren.

Separierbare DGL erster Ordnung, Trennung der Variablen.

$$y' = u(y)v(x).$$

Trennung der Variablen.

$$\frac{1}{u(y)}dy = v(x)dx.$$

Linke Seite nach y integrieren, rechte nach x. Danach auflösen nach y.

Lineare DGL erster Ordnung, Variation der Konstanten.

$$y' + g(x)y = r(x).$$

Zugehörige homogene DGL

$$y' + g(x)y = 0$$

ist separierbar und hat Lösung

$$y_H = Ke^{-G(x)}.$$

Variation der Konstanten liefert Ansatz für inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{-G(x)} \\ y' &= k'(x)e^{-G(x)} - k(x)g(x)e^{-G(x)}. \end{aligned}$$

Beim Einsetzen in inhomogene DGL fallen Terme mit $k(x)$ weg. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-G(x)} &= r(x) \\ k'(x) &= r(x)e^{G(x)} \end{aligned}$$

Berechne $k(x)$ durch Integration, dann in den Ansatz einsetzen.

Allgemeine DGL erster Ordnung, Euler Verfahren.

$$y' = f(x, y).$$

Diskretisierung $x_n = n\Delta x$. Approximation der Tangente durch die Sekante.

$$\begin{aligned} y'(x_n) &\approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{\Delta x} \\ y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + y'(x_n)\Delta x \\ &= y(x_n) + f(x_n, y(x_n))\Delta x. \end{aligned}$$

Ausgehend von einem gegebenen Startwert $y(x_0)$ kann so iterativ $y(x_{n+1})$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ näherungsweise berechnet werden.

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \quad = \quad r(x).$$

Schritt 1. Berechne allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \quad = \quad 0.$$

Lösungsmenge ist ein Vektorraum von Funktionen mit n Basislösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zum charakteristischen Polynom

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \quad = \quad 0.$$

Drei Fälle.

- λ einfache reelle Nullstelle. Basislösung $e^{\lambda x}$.
- λ s-fache Nullstelle. Basislösungen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{s-1} e^{\lambda x}$.
- $\lambda, \overline{\lambda}$ konjugiert komplexes Nullstellenpaar. Basislösungen $\mathrm{re}(e^{\lambda x}), \mathrm{im}(e^{\lambda x})$.

Allgemeine homogene Lösung:

$$y_H \quad = \quad C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Schritt 2. Berechne partikuläre Lösung y_P der inhomogenen DGL.

Vereinfachen: Linearität nutzen falls $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ oder $r(x) = us(x)$. Integrieren falls $a_0 = 0$.

Ansätze für spezielle rechte Seiten:

- $r(x)$ ist Polynom. Ansatz Polynom gleichen Grades, berechne Koeffizienten durch Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich.
- $r(x) = e^{\mu x}$. Ansatz $ce^{\mu x}$, Einsetzen liefert c. Resonanz falls μ s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Ansatz ist dann $cx^s e^{\mu x}$.
- $r(x) = \cos(\omega x)$ oder $r(x) = \sin(\omega x)$. Entweder Reduktion auf $e^{j\omega x}$ oder reeller Ansatz $a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. Resonanz falls $j\omega$ s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Ansatz ist dann $x^s(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x))$.

Allgemeine inhomogene Lösung ist $y_H + y_P$.

Zusammenhang zwischen linearen DGL und LGS: Auch die Lösungsmenge eines LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lässt sich darstellen als Summe aller Lösungen des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ und einer partikulären Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. In beiden Fällen ist die Lösungsmenge ein affiner Raum.

5 Dirac Impuls

Sprungfunktion.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Dirac Impuls.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschaulich kann man sich eine δ-Impuls als Rechteckimpuls der Dauer ε und der Höhe $1/\varepsilon$ vorstellen wobei ε eine sehr kleine positive Zahl ist.

Verallgemeinerte Ableitung.

$$\delta(t) = \sigma'(t)$$

Rechengesetze.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1 \\ \delta(-t) &= \delta(t). \end{aligned}$$

Ausblendeigenschaft. Falls $f(t)$ stetig ist an der Stelle a gilt

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t-a) &= f(a)\delta(t-a) \qquad \text{für alle } t. \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt &= f(a) \end{aligned}$$

6 Faltung

Die Faltung ist eine zweistellige Funktion von Funktionen. Sind f, g Funktionen, dann ist die Funktion $f * g$ definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Für viele Funktionen f, g existiert $f * g$ nicht, da das uneigentliche Integral nicht konvergiert.

Rechengesetze.

- Linearität.

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2) * g &= f_1 * g + f_2 * g \\ (af) * g &= a(f * g)\end{aligned}$$

- Kommutativgesetz.

$$f * g = g * f$$

- Assoziativgesetz.

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

- Neutrales Element.

$$f * \delta = f$$

- Ableitung.

$$f' * g = (f * g)'$$

- Zeitinvarianz.

$$f_{\hat{t}} * g = (f * g)_{\hat{t}} \quad \text{wobei} \quad f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

- Wenn $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

7 Lineare zeitinvariante Systeme

Ein System S ist eine Funktion von Funktionen.

S heißt linear wenn

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= aS(f). \end{aligned}$$

S heißt zeitinvariant wenn

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}.$$

Zusammenhang zwischen LTI Systemen und Faltung.

- Für jedes lineare zeitinvariante (LTI) System S gibt es eine Funktion g so dass

  $$S(f) = f * g.$$

  Die Funktion $g = S(\delta)$ ist hierbei die Impulsantwort des Systems.

- Andererseits ist für jede Funktion g das System S mit

  $$S(f) = f * g$$

  linear und zeitinvariant.

Damit kann jedes LTI System S eindeutig durch seine Impulsantwort

$$g = S(\delta)$$

dargestellt werden. Die Eigenschaften der Faltung übertragen sich somit auf LTI Systeme.

Zum Vergleich: Jede lineare Funktion f kann eindeutig durch eine Matrix

$$A = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n))$$

dargestellt werden.

Zusammenhang zwischen LTI Systemen und DGL. Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten führen immer zu LTI Systemen, d.h. das System $S(f) = h$, wobei h Lösung der DGL

$$\begin{gathered} a_n h^{(n)}(x) + \ldots + a_1 h'(x) + a_0 h(x) = f(x), \\ h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0 \end{gathered}$$

ist, ist linear und zeitinvariant.

8 Fourier Reihen

Sei f eine T-periodische Funktion und $\omega = 2\pi/T$.

Darstellung als Fourier Reihe.

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}. \end{aligned}$$

In der Frequenzzerlegung von $f(t)$ treten nur Schwingungen auf, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ω ist (Oberschwingungen).

Komplexe Fourier Koeffizienten.

$$\begin{aligned} z_0 &= A_0 \\ z_k &= \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \\ z_{-k} &= \overline{z_k} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_k &= 2|z_k| \\ \varphi_k &= \sphericalangle(z_k), \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Berechnung der Fourier Koeffizienten.

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Statt von 0 bis T kann man auch von a bis $a + T$ integrieren für beliebiges a.

Eigenschaften. Ist $f(t)$ gerade, dann sind alle z_k reell, ist $f(t)$ ungerade, dann sind alle z_k rein imaginär.

9 Fourier Transformation

Die Fourier Transformierte ist auch für nicht-periodische Funktionen $f(t)$ definiert. Sie geht aus der Fourier Reihe hervor, indem man eine nicht-periodische Funktion als Grenzwert einer T-periodischen Funktion betrachtet mit $T \to \infty$.

Fourier Transformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Inverse Fourier Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Notation

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)$$

Viele Funktionen haben keine Fourier Transformierte, da das uneigentliche Integral nicht konvergiert.

Eigenschaften. Für reelle Funktionen $f(t)$ gilt $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$. Ist $f(t)$ gerade, dann ist $F(\omega)$ reell, ist $f(t)$ ungerade, dann ist $F(\omega)$ rein imaginär.

Korrespondenzen. Die Fourier Transformierte wird i.a. nicht durch Lösen des o.g. Integrals berechnet sondern mit Hife der Korrespondenzen im Anhang. Wichtig ist vor allem die Linearität

$$\begin{aligned} f_1(t) + f_2(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(\omega) + F_2(\omega) \\ af(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad aF(\omega) \end{aligned}$$

und der Faltungssatz

$$(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega).$$

Zusammenhang mit LTI Systemen. Ein LTI System S antwortet auf eine komplexe Schwingung $e^{j\omega t}$ immer mit einer Schwingung gleicher Frequenz. Lediglich Amplitude und Phase ändern sich. Ist g die Impulsantwort von S, dann gilt

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega t}) &= g * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} \\ &= G(\omega) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

wobei $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ ist. Sie besagt, wie die Schwingungskomponenten des Eingangssignals in Abhängigkeit ihrer Frequenz verstärkt bzw. phasenverschoben werden und heißt daher Übertragungsfunktion des Systems.

10 Laplace Transformation

Da das uneigentliche Integral bei der Fourier Transformation oft nicht existiert, wird die zu transformierende Funktion $f(t)$ durch einen Faktor $e^{-\alpha t}$ gedämpft. Aus der Fourier Transformierten wird somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\alpha+j\omega)t}dt.$$

Kürzt man nun noch $s = \alpha + j\omega$ ab, erhält man die Laplace Transformation.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Für den Spezialfall $s = j\omega$ (d.h. $\alpha = 0$, also keine Dämpfung) geht die Laplace Transformierte in die Fourier Transformierte über.

Häufig betrachtet man Funktionen $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$. In diesem Fall ist

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Die Rechengesetze für die Fourier Transformation gelten analog auch für die Laplace Transformation, insbesondere Linearität und Faltungssatz.

Für das Lösen von DGL ist die Ableitung im Zeitbereich wichtig. Hier gibt es zwei Varianten:

- Wenn

  $$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

  dann

  $$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s).$$

- Wenn

  $$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

  dann

  $$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Wenn $f(t)$ keinen Sprung bei $t = 0$ hat, ist $f(0^-) = f(0)$.

Aus der DGL

$$a_n h^{(n)}(t) + \ldots + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = f(t)$$

wird mit Laplace Transformation $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(s)$ und $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ somit

$$\begin{aligned} a_n s^n H(s) + \ldots + a_1 sH(s) + a_0 H(s) &= F(s) \\ H(s) &= F(s)\frac{1}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}. \end{aligned}$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten führen im Bildbereich zu der Form

$$H(s) = F(s)G(s)$$

wobei $G(s)$ eine rationale Funktion in s ist. Rücktransformation ist mit Partialbruchzerlegung möglich.

Die Funktion $G(s)$ heißt Übertragungsfunktion des Systems. Mit dem Faltungssatz gilt

$$h = f * g,$$

d.h. die Impulsantwort $g(t)$ des Systems ist die inverse Laplace Transformierte der Übertragungsfunktion $G(s)$.

A Anhang

A.1 Rechengesetze für Faltung und Dirac Impuls

- **Kommutativgesetz**

$$f * g = g * f$$

- **Assoziativgesetz**

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

- **Linearität (inkl. Distributivgesetz)**

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) * g &= f_1 * g + f_2 * g \\ (af) * g &= a(f * g) \end{aligned}$$

- **Zeitinvarianz**

$$f_{\hat{t}} * g = (f * g)_{\hat{t}} = f * g_{\hat{t}}$$

- **Vertauschbarkeit von Faltung und Ableitung**

$$f' * g = (f * g)' = f * g'$$

- **Integration durch Faltung mit Sprungfunktion**

$$(f * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau.$$

- **Neutrales Element**

$$\begin{aligned} f * \delta &= f \\ f * \delta_{\hat{t}} &= f_{\hat{t}} \end{aligned}$$

- **Verallgemeinerte Ableitung**

$$\sigma'(t) = \delta(t)$$

- **Ausblendeigenschaft**

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t-a) &= f(a)\delta(t-a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) &= f(a) \end{aligned}$$

A.2 Die wichtigsten Fourier Transformationspaare

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi\delta(\omega-\hat{\omega})$$

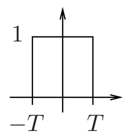
$$\sigma(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega - a} \qquad \text{falls } a<0$$

$$\cos(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega-\hat{\omega}) + \delta(\omega+\hat{\omega}))$$

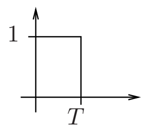
$$\sin(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -j\pi(\delta(\omega-\hat{\omega}) - \delta(\omega+\hat{\omega}))$$

$$\operatorname{sign}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \begin{cases} \frac{2}{j\omega} & \text{falls } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

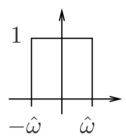


$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2T\mathrm{si}(\omega T)$$



$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \begin{cases} \frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega T}) & \text{falls } \omega \neq 0 \\ T & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\hat{\omega}}{\pi}\mathrm{si}(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet$$



$$T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

A.3 Rechengesetze für die Fourier Transformation

Symmetrie

$$\begin{aligned} f(t) \text{ reell, gerade} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) \text{ reell, gerade} \\ f(t) \text{ reell, ungerade} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) \text{ imaginär, ungerade} \end{aligned}$$

Linearität

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) + G(\omega) \\ af(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad aF(\omega) \end{aligned}$$

Zeitverschiebung

$$f(t - \hat{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}} F(\omega)$$

Frequenzverschiebung

$$f(t)e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - \hat{\omega})$$

Modulation

$$f(t)\cos(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega - \hat{\omega}) + F(\omega + \hat{\omega}))$$

Zeitumkehr

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$$

Zeitdehnung

$$f(at) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$\begin{aligned} f'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (j\omega)F(\omega) \\ f''(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (j\omega)^2 F(\omega) \end{aligned}$$

Integration im Zeitbereich

$$\int_{-\infty}^{t} f(u)du \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

Ableitung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} (-jt)f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F'(\omega) \\ (-jt)^2 f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F''(\omega) \end{aligned}$$

Faltung im Zeitbereich

$$(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega)$$

Faltung im Frequenzbereich

$$f(t)g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$$

Abtastung

$$\underbrace{f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)}_{\text{Abtastung}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\delta(t-nT_s) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{T_s}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega-k\omega_s)}_{\text{periodische Fortsetzung}}$$

A.4 Die wichtigsten Laplace Transformationspaare

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}$$

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad 1$$

$$t\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2}$$

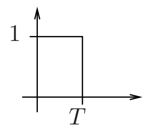
$$t^n\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$e^{at}\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-a}$$

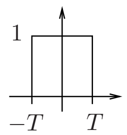
$$t^n e^{at} \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\sin(\omega t)\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t)\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$$



$$\circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1-e^{-sT}}{s}$$



$$\circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{e^{sT}-e^{-sT}}{s}$$

$$\delta(t-\hat{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad e^{-s\hat{t}}$$

$$\lfloor t \rfloor\ \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1}{s(e^s-1)}$$

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \circ\!\!-\!\!\!\bullet \quad \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

A.5 Rechengesetze für die Laplace Transformation

- Falls

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

Linearität

$$f(t) + g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) + G(s)$$
$$af(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad aF(s)$$

Verschiebung

$$f(t - \hat{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s\hat{t}}F(s)$$

Ähnlichkeit

$$f(at) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Dämpfung

$$e^{-at}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s + a)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s)$$

Ableitung im Frequenzbereich

$$tf(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -F'(s)$$

Integration im Zeitbereich

$$\int_0^t f(u)du \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s)$$

Faltung

$$(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)G(s)$$

- Falls

$$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

Verschiebung

$$\sigma(t - \hat{t})f(t - \hat{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s\hat{t}}F(s)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-)$$
$$\sigma(t)f''(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$