Mathematik 2
Zusatzaufgaben

(Stand: 15. Juli 2018)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Matrizen

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Matrix Multiplikation distributiv über der Matrix Addition ist, d.h.

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Sie dürfen hierbei verwenden, dass

$$A(\vec{b}+\vec{c}) = A\vec{b} + A\vec{c}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie die Matrizen B und C in ihre Spalten und führen Sie die Matrix Multiplikationen spaltenweise durch. Beginnen Sie also mit

$$B + C \quad = \quad (\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n)$$

und

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n) \\ &= \big(A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \dots \quad A(\vec{b}_n + \vec{c}_n)\big) \\ &\vdots \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n) \\ &= \big(A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \dots \quad A(\vec{b}_n + \vec{c}_n)\big) \\ &= \big(A\vec{b}_1 + A\vec{c}_1 \quad A\vec{b}_2 + A\vec{c}_2 \quad \dots \quad A\vec{b}_n + A\vec{c}_n) \\ &= (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \dots \quad A\vec{b}_n) + (A\vec{c}_1 \quad A\vec{c}_2 \quad \dots \quad A\vec{c}_n) \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

1.2 Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Lösung von Aufgabe 2. Man zeigt, dass der Nullvektor nur auf triviale Weise als Linearkombination der Vektoren dargestellt werden kann, d.h. das Gleichungssystem

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ hat.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}) \quad = \quad L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}).$$

Lösung von Aufgabe 3. Es sind zwei Teilmengenbeweise zu führen.

- Zu zeigen

  $$L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}) \quad \subseteq \quad L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}).$$

  Sei

  $$\vec{c} \in L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}).$$

  Zu zeigen:

  $$\vec{c} \in L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}).$$

  Aus der Annahme folgt, dass es x_1, x_2 gibt so dass

  $$\begin{aligned} \vec{c} &= x_1\vec{a} + x_2(\vec{a}+\vec{b}) \\ &= (x_1+x_2)\vec{a} + x_2\vec{b} \\ &= x_2\vec{b} + (x_1+x_2)(\vec{a}-\vec{b}) + (x_1+x_2)\vec{b} \\ &= (x_1+2x_2)\vec{b} + (x_1+x_2)(\vec{a}-\vec{b}). \end{aligned}$$

  Damit ist $\vec{c}$ Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ und somit

  $$\vec{c} \in L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}).$$

- Zu zeigen

  $$L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) \quad \subseteq \quad L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}).$$

  Sei

  $$\vec{c} \in L(\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}).$$

  Zu zeigen:

  $$\vec{c} \in L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}).$$

  Aus der Annahme folgt, dass es x_1, x_2 gibt so dass

  $$\begin{aligned} \vec{c} &= x_1\vec{b} + x_2(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= x_2\vec{a} + (x_1-x_2)\vec{b} \\ &= x_2\vec{a} + (x_1-x_2)(\vec{a}+\vec{b}) - (x_1-x_2)\vec{a} \\ &= (-x_1+2x_2)\vec{a} + (x_1-x_2)(\vec{a}+\vec{b}). \end{aligned}$$

  Damit ist $\vec{c}$ Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ und somit

  $$\vec{c} \in L(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}).$$

Aufgabe 4. Sei M ein Spannraum und $\vec{u}, \vec{v} \in M$. Zeigen Sie, dass dann auch $\vec{u} + \vec{v} \in M$ ist.

Lösung von Aufgabe 4. Da M ein Spannraum ist, existieren

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

so dass

$$M = \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Da $\vec{u}, \vec{v} \in M$ sind, müssen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sein, d.h. es gibt Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ so dass

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \\ \vec{v} &= y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass $\vec{u} + \vec{v} \in M$. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \ + \ y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n \\ &= (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{a}_n. \end{aligned}$$

Folglich ist $\vec{u}+\vec{v}$ eine Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ und damit Element des Spannraums M.

1.3 Lineare Funktionen

Aufgabe 5. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix Darstellung von f.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix Darstellung von f ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Eine lineare Funktion f hat die Matrix Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für f.

Lösung von Aufgabe 6. $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2x + 4z \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie einen Funktionsterm für die lineare Funktion $f(\vec{x})$, für die gilt

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 7. Da $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Funktion ist, muss es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ geben mit

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Aus den gegebenen Funktionswerten folgt damit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Für jede Komponente ergibt sich somit ein LGS:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} &= 0 \\ 2a_{11} + a_{12} &= 1 \\ \\ a_{21} + a_{22} &= 1 \\ 2a_{21} + a_{22} &= 1 \\ \\ a_{31} + a_{32} &= 3 \\ 2a_{31} + a_{32} &= 5 \end{aligned}$$

Schneller geht's aber, wenn man die Spalten $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ von A zusammen lässt. Aus den gegebenen Funktionswerten folgt

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, erhält man

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \\ &= x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Seien $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Funktionen und $h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}).$$

Zeigen Sie, dass auch h linear ist.

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{array}{rcll}
h(\vec{x}+\vec{y}) & = & f(\vec{x}+\vec{y}) + g(\vec{x}+\vec{y}) & \\
& = & f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) & \text{da } f, g \text{ linear} \\
& = & f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{y}) & \\
& = & h(\vec{x}) + h(\vec{y}) & \\
h(u\vec{x}) & = & f(u\vec{x}) + g(u\vec{x}) & \\
& = & uf(\vec{x}) + ug(\vec{x}) & \text{da } f, g \text{ linear} \\
& = & u(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) & \\
& = & uh(\vec{x}). &
\end{array}$$

2 Differentialgleichungen

2.1 Separierbare DGL

Aufgabe 9. In dieser Aufgabe soll die Geschwindigkeit $v(t)$ eines fallenden Gegenstands mit Masse m berechnet werden. Auf den Gegenstand wirkt die Gravitationskraft mg sowie die Luftreibungskraft $rv(t)^2$, wobei r eine Konstante ist. Beachten Sie, dass die Reibungskraft proportional zum *Quadrat* der Geschwindigkeit ist.

- Stellen Sie eine Differentialgleichung zur Berechnung von $v(t)$ auf.
- Sei $v(0) = 0$. Weshalb kann die Geschwindigkeit $v(t)$ nie größer als

  $$\alpha = \sqrt{\frac{mg}{r}}$$

  werden?
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL. Hinweis: Sie benötigen Partialbruchzerlegung. Die Terme werden einfacher, wenn Sie außer α auch die Konstante

  $$\beta = \sqrt{\frac{rg}{m}} = \frac{r}{m}\alpha = \frac{g}{\alpha}$$

  verwenden.
- Berechnen Sie die partikuläre Lösung mit $v(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 9.

- Mit

  $$\begin{aligned} F_g &= mg \\ F_r &= -mv(t)^2 \end{aligned}$$

  gilt nach dem Trägheitsgesetz und $a(t) = v'(t)$

  $$\begin{aligned} F_r + F_g &= ma(t) \\ -rv(t)^2 + mg &= ma(t) \\ mv'(t) + rv(t)^2 &= mg \\ v'(t) + \frac{r}{m}v(t)^2 &= g \\ v'(t) &= g - \frac{r}{m}v(t)^2. \end{aligned}$$

- Beginnend aus der Ruhelage nimmt die Geschwindigkeit zu. Wenn
  Beginnend aus der Ruhelage nimmt die Geschwindigkeit zu. Wenn

  $$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{r}}$$

ist, dann folgt aus der DGL

$$\begin{aligned}
v'(t) &= g - \frac{r}{m} v(t)^2 \\
&= g - \frac{r}{m} \sqrt{\frac{mg}{r}}^2 \\
&= g - g \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit bleibt dann konstant und nimmt nicht weiter zu.

- Die DGL ist separierbar. Mit der üblichen Notation $y(x)$ für die gesuchte Funktion erhält man

$$\begin{aligned}
y' &= g - \frac{r}{m} y^2 \\
\frac{1}{g - \frac{r}{m} y^2} dy &= dx \\
-\frac{m}{r} \frac{1}{y^2 - \frac{mg}{r}} dy &= dx \\
\frac{1}{y^2 - \alpha^2} dy &= -\frac{r}{m} dx
\end{aligned}$$

Faktorisierung des Nennerpolynoms.

$$y^2 - \alpha^2 = (y - \alpha)(y + \alpha).$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2 - \alpha^2} &= \frac{c_1}{y - \alpha} + \frac{c_2}{y + \alpha} \\
1 &= c_1(y + \alpha) + c_2(y - \alpha)
\end{aligned}$$

Spezialfälle $y = \alpha$ und $y = -\alpha$.

$$\begin{aligned}
1 &= 2c_1\alpha \\
c_1 &= \frac{1}{2\alpha} \\
1 &= -2c_2\alpha \\
c_2 &= -\frac{1}{2\alpha}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2 - \alpha^2} &= \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{y - \alpha} - \frac{1}{y + \alpha} \right) \\
\int \frac{1}{y^2 - \alpha^2} dy &= \frac{1}{2\alpha} \left(\ln|y - \alpha| - \ln|y + \alpha| \right).
\end{aligned}$$

Da $0 \leq y < \alpha$ ist

$$\begin{aligned}
|y - \alpha| &= \alpha - y \\
|y + \alpha| &= \alpha + y
\end{aligned}$$

Rechte Seite nach x integrieren ergibt

$$\int -\frac{r}{m}dx \quad = \quad -\frac{rx}{m}.$$

Gleichheit der Stammfunktionen bis auf eine Konstante C ist somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha}\left(\ln(\alpha-y)-\ln(\alpha+y)\right) &= -\frac{rx}{m}+C \\
\frac{1}{2\alpha}\left(\ln(\alpha+y)-\ln(\alpha-y)\right) &= \frac{rx}{m}+C \\
\ln(\alpha+y)-\ln(\alpha-y) &= \frac{2\alpha rx}{m}+C \\
&= 2\beta x+C \\
\ln\left(\frac{\alpha+y}{\alpha-y}\right) &= 2\beta x+C \\
\frac{\alpha+y}{\alpha-y} &= e^{2\beta x+C} \\
\alpha+y &= (\alpha-y)e^{2\beta x+C} \\
y(e^{2\beta x+C}+1) &= \alpha(e^{2\beta x+C}-1) \\
y &= \alpha\frac{e^{2\beta x+C}-1}{e^{2\beta x+C}+1} \\
&= \alpha\tanh(2\beta x+C).
\end{aligned}$$

- Für $x=0$ erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha\frac{e^C-1}{e^C+1} \\
e^C &= 1 \\
C &= 0
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
y &= \alpha\frac{e^{2\beta x}-1}{e^{2\beta x}+1} \\
&= \alpha\tanh\left(\beta x\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Ein Kondensator mit Kapazität C entlädt sich über einen zeitabhängigen Widerstand mit

$$R(t) = 1 + t \text{ Ohm}.$$

Der Widerstand wird also mit der Zeit immer größer, folglich muss sich der Kondensator langsamer entladen als mit der bekannten e-Funktion für konstanten Widerstand. Entlädt sich der Kondensator dann überhaupt noch vollständig? Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung am Kondensator u_0. Berechen Sie die Spannung des Kondensators $u_C(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$.

Lösung von Aufgabe 10. Sei $q(t)$ die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t. Der Entladestrom ist dann

$$i(t) = q'(t).$$

Mit der Maschenregel gilt

$$\begin{aligned} u_C(t) + u_R(t) &= q(t)/C + R(t)i(t) \\ &= q(t)/C + R(t)q'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält damit die DGL in expliziter Form

$$q'(t) = -q(t)\frac{1}{R(t)C}.$$

Diese DGL ist separierbar. Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}dq &= -\frac{1}{R(t)C}dt \\ &= -\frac{1}{C(1+t)}dt \end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten ergibt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \ln(|q|) &= -\frac{1}{C}\ln(1+t) + A \\ |q| &= e^{-\ln(1+t)/C}e^A \\ &= \left(e^{\ln(1+t)}\right)^{-1/C} K \\ &= (1+t)^{-1/C}K, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\ q &= \pm(1+t)^{-1/C}K \\ q &= K(1+t)^{-1/C}, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u_C(t) &= q(t)/C \\ &= \frac{K}{C}(1+t)^{-1/C}. \end{aligned}$$

Aus $u_c(0) = u_0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{K}{C} 1^{-1/C} &= u_0 \\ K &= u_0 C. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Lösung, die der Anfangsbedingung genügt

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_0 (1+t)^{-1/C} \\ &= \frac{u_0}{\sqrt[C]{1+t}}. \end{aligned}$$

Obwohl der Widerstand also mit der Zeit gegen unendlich geht, geht die Kondensatorspannung gegen Null, allerdings sehr langsam.

Aufgabe 11.

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$$y' = \frac{y^2 - 4y + 3}{2x(y-2)}.$$
- Hat die DGL konstante Lösungsfunktionen?
- Hat die DGL eine Lösungsfunktion y mit $y(0) = 0$?

Lösung von Aufgabe 11. Umformen und Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{2y-4}{y^2-4y+3} y' &= \frac{1}{x} \\ \frac{2y-4}{y^2-4y+3} dy &= \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Zum Integrieren nach y auf der linken Seite wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt. Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \\ &= 2 \pm 1 \\ y^2 - 4y + 3 &= (y-1)(y-3). \end{aligned}$$

Ansatz Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{2y-4}{(y-1)(y-3)} &= \frac{c_1}{y-1} + \frac{c_2}{y-3} \\ 2y - 4 &= c_1(y-3) + c_2(y-1). \end{aligned}$$

Spezialfall $y = 1$

$$\begin{aligned} -2 &= c_1(-2) \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Spezialfall $y = 3$

$$\begin{aligned} 2 &= 2c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{2y-4}{y^2-4y+3} &= \frac{1}{y-3} + \frac{1}{y-1} \\ \int \frac{2y-4}{y^2-4y+3} dy &= \ln|y-3| + \ln|y-1|. \end{aligned}$$

Integrieren nach x auf der rechten Seite:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|.$$

Damit erhält man die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\ln|y-3| + \ln|y-1| &= \ln|x| + C \\
e^{\ln|y-3|+\ln|y-1|} &= e^{\ln|x|+C} \\
|y-3|\,|y-1| &= |x|\,K \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\
|(y-3)(y-1)| &= K|x| \\
(y-3)(y-1) &= \pm Kx \\
(y-3)(y-1) &= Kx \qquad K \in \mathbb{R} \\
y^2 - 4y + 3 &= Kx \\
y^2 - 4y + (3 - Kx) &= 0 \\
y_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 - Kx)}}{2} \\
&= 2 \pm \sqrt{1 + Kx}
\end{aligned}
$$

Für $K = 0$ erhält man zwei konstante Lösungsfunktionen $y = 3$ und $y = 1$. Da $y(0) = 2 \pm 1$ hat die DGL keine Lösungsfunktion mit $y(0) = 0$.

2.2 Lineare DGL

Aufgabe 12. Ein Kondensator mit Kapazität $C(t)$ wird über einen Widerstand $R(t)$ von einer Spannungsquelle $U(t)$ geladen. Beachten Sie, dass alle Komponenten zeitvariabel sind. Stellen Sie eine DGL für die Ladung $q(t)$ des Kondensators auf.

- Ist die DGL linear, separierbar oder keines von beidem?
- Sei nun konkret

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-t} \\ R(t) &= te^{t} \\ U(t) &= \sin(t). \end{aligned}$$

  Berechnen Sie die allgemeine Lösung für $q(t)$ für $t > 0$.
- Die Lösungsfunktion ist recht kompliziert. Prüfen Sie Ihr Ergebnis daher durch Einsetzen nach!
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Widerstand Null und auch die Spannungsquelle Null. Wäre der Kondensator zu diesem Zeitpunkt also nicht entladen, gäbe es einen Kurzschluss. Berechnen Sie die partikuläre Lösung mit der Anfangsbedingung $q(0) = 0$. Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Funktion der allgemeinen Lösung $q(t)$ einen Grenzwert bei $t = 0$ hat.

Lösung von Aufgabe 12. Sei $q(t)$ die Ladung des Kondensators zur Zeit t. Die Spannung am Kondensator ist damit

$$u_C(t) = \frac{1}{C(t)}q(t).$$

Der Strom, der durch Widerstand und Kondensator fließt, ist $q'(t)$. Damit ist die Spannung am Widerstand

$$u_R(t) = R(t)q'(t).$$

Aufgrund der Maschenregel gilt

$$\begin{aligned} U(t) &= u_R(t) + u_C(t) \\ &= R(t)q'(t) + \frac{1}{C(t)}q(t). \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$q'(t) + \frac{1}{R(t)C(t)}q(t) = \frac{U(t)}{R(t)}.$$

Es handelt sich um eine lineare DGL, die mit Variation der Konstanten gelöst werden kann. Mit den gegebenen Werten ist dieDGL

$$q'(t) + \frac{1}{t}q(t) = \frac{\sin(t)}{te^{t}}.$$

Die homogene DGL ist

$$q'(t) + \frac{1}{t}q(t) \quad = \quad 0.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}dq &= -\frac{1}{t}dt \\
\ln|q| &= -\ln|t| + C \\
|q| &= Ke^{-\ln|t|}, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\
&= K\frac{1}{e^{\ln|t|}} \\
&= K\frac{1}{|t|} \\
q &= \pm K\frac{1}{|t|} \\
&= K\frac{1}{|t|}, \qquad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Da nur der Fall $t > 0$ interessiert, erhält man

$$q \quad = \quad \frac{K}{t}.$$

Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
q(t) &= k(t)\,\frac{1}{t} \\
q'(t) &= k'(t)\frac{1}{t} + k(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}
\underbrace{k'(t)\frac{1}{t} + k(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}_{q'} + \frac{1}{t}\underbrace{\frac{K}{t}}_{q} &= \frac{\sin(t)}{te^t} \\
\frac{k'(t)}{t} &= \frac{\sin(t)}{te^t} \\
k'(t) &= \sin(t)e^{-t} \\
&= \mathrm{im}(e^{jt})e^{-t} \\
&= \mathrm{im}(e^{t(j-1)}).
\end{aligned}$$

Integrieren ergibt

$$\begin{aligned}
k(t) &= \mathrm{im}\left(\frac{1}{j-1}e^{t(j-1)}\right) \\
&= \mathrm{im}\left(\frac{-1-j}{2}e^{jt}e^{-t}\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{im}\left((1+j)(\cos(t) + j\sin(t))\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin(t) + \cos(t))
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$\begin{aligned} q &= (k(t)+C)\frac{1}{t} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin(t)+\cos(t))\,\frac{1}{t}+\frac{C}{t} \\ &= -\frac{\sin(t)+\cos(t)}{2te^t}+\frac{C}{t} \\ &= -\frac{\sin(t)+\cos(t)+2Ce^t}{2te^t}. \end{aligned}$$

Für $t \to 0$ geht der Nenner dieser Funktion gegen Null. Damit sie an der Stelle $t = 0$ einen Grenzwert hat, muss somit auch der Zähler gegen Null gehen, d.h.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \sin(t)+\cos(t)+2Ce^t &= 1+2C \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist damit

$$q(t) = \begin{cases} \frac{e^t-\sin(t)-\cos(t)}{2te^t} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 13. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$e^{x\sin(x)}\big(y' + y(\sin(x) + x\cos(x))\big) = x.$$

Lösung von Aufgabe 13. Umformen ergibt

$$y' + y(\sin(x) + x\cos(x)) = \frac{x}{e^{x\sin(x)}}.$$

Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL.

- Lösen der homogenen DGL.

$$\begin{aligned} y' + y(\sin(x) + x\cos(x)) &= 0 \\ y' &= -y(\sin(x) + x\cos(x)) \\ \frac{1}{y}dy &= -(\sin(x) + x\cos(x))dx \end{aligned}$$

  Stammfunktion auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) \\ \int (\sin(x) + x\cos(x))dx &= -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) \\ &= x\sin(x). \end{aligned}$$

  Integration auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -x\sin(x) + C \\ |y| &= e^{-x\sin(x)+C} \\ &= Ke^{-x\sin(x)}, \qquad K > 0 \\ y &= Ke^{-x\sin(x)} \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Variation der Konstanten. Ansatz

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{-x\sin(x)} \\ y' &= k'(x)e^{-x\sin(x)} + k(x)(-\sin(x) - x\cos(x))e^{-x\sin(x)}. \end{aligned}$$

  Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-x\sin(x)} + k(x)(-\sin(x) - x\cos(x))e^{-x\sin(x)} &+ \\ k(x)e^{-x\sin(x)}(\sin(x) + x\cos(x)) &= \frac{x}{e^{x\sin(x)}} \\ k'(x)e^{-x\sin(x)} &= \frac{x}{e^{x\sin(x)}} \\ k'(x) &= x \\ k(x) &= \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

  Lösung

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x\sin(x)}.$$

2.3 Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 14. Die DGL

$$y'' + y \quad = \quad \tan(x)$$

hat keine geschlossen darstellbare Lösung. Berechnen Sie eine Funktion $y(x)$, die die DGL zumindest näherungsweise in der Umgebung von $\hat{x} = 0$ erfüllt. Nutzen Sie Ihr Wissen um eine möglichst genaue Lösung mit ca. 15 Minuten Aufwand zu finden.

Lösung von Aufgabe 14. Die DGL ist schwierig, da es keinen Ansatz für die Störfunktion $\tan(x)$ gibt. Da nur eine Näherung in der Umgebung von $\hat{x} = 0$ gesucht ist, kann man die tan-Funktion durch ein Taylorpolynom zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ approximieren.

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ \tan''(x) &= 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) \\ \tan'''(x) &= 6\tan^4(x) + 8\tan^2(x) + 2. \end{aligned}$$

Auswerten im Arbeitspunkt ergibt

$$\begin{aligned} \tan(0) &= 0 \\ \tan'(0) &= 1 \\ \tan''(0) &= 0 \\ \tan'''(x) &= 2. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom der Ordnung $n = 3$ ist somit

$$x + \frac{2}{3!}x^3 \quad = \quad x + \frac{1}{3}x^3.$$

Mit dieser Näherung der rechten Seite erhält man

$$y'' + y \quad = \quad x + \frac{1}{3}x^3.$$

Ansatz.

$$\begin{aligned} y_P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ y_P'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \\ y_P''(x) &= 2a_2 + 6a_3x. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3x + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= x + \frac{1}{3}x^3 \\ a_0 + 2a_2 + (a_1 + 6a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 &= x + \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_2 &= 0 \\ a_1 + 6a_3 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 1/3. \end{aligned}$$

Lösung.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 1/3. \end{aligned}$$

Damit ist eine partikuläre Lösung der DGL

$$y_P = -x + \frac{1}{3}x^3.$$

Aufgabe 15. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos(x)$$

Lösung von Aufgabe 15. Lösung der homogenen DGL

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + j, \quad \lambda_2 = -2 - j.$$

Komplexe Lösungsfunktion

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{(-2+j)x} \\ &= e^{-2x}(\cos(x) + j\sin(x)). \end{aligned}$$

Relle Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-2x}\cos(x) \\ y_2(x) &= e^{-2x}\sin(x). \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung

$$y_H = e^{-2x}(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)).$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Für die rechte Seite gilt

$$\begin{aligned} e^{-2x}\cos(x) &= e^{-2x}\frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-2x}e^{jx} + e^{-2x}e^{-jx}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(-2+j)x} + e^{(-2-j)x}\right). \end{aligned}$$

- Partikuläre Lösung für

  $$y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+j)x}.$$

  Da $-2 + j$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor. Ansatz

  $$\begin{aligned} y &= cxe^{(-2+j)x} \\ y' &= ce^{(-2+j)x}(1 - 2x + jx)) \\ y'' &= ce^{(-2+j)x}(-4 + 2j + 3x - 4jx) \end{aligned}$$

  Einsetzen und Kürzen mit $e^{(-2+j)x}$

  $$\begin{aligned} c(-4 + 2j + 3x - 4jx) + 4c(1 - 2x + jx) + 5cx &= 1 \\ 2cj &= 1 \\ c &= -\frac{j}{2} \end{aligned}$$

  Lösung

  $$y_1 = -\frac{j}{2}xe^{(-2+j)x}.$$

- Partikuläre Lösung für

$$y'' + 4y' + 5y = e^{(-2-j)x}.$$

Da $-2-j$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor. Ansatz

$$\begin{aligned} y &= cxe^{(-2-j)x} \\ y' &= ce^{(-2-j)x}(1-2x-jx)) \\ y'' &= ce^{(-2-j)x}(-4-2j+3x+4jx) \end{aligned}$$

Einsetzen und Kürzen mit $e^{(-2-j)x}$

$$\begin{aligned} c(-4-2j+3x+4jx)+4c(1-2x-jx)+5cx &= 1 \\ -2cj &= 1 \\ c &= \frac{j}{2} \end{aligned}$$

Lösung

$$y_2 = \frac{j}{2}xe^{(-2-j)x} = \overline{y_1}$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $e^{-2x}\cos(x)$

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + \overline{y_1}) \\ &= \mathrm{re}(y_1) \\ &= \mathrm{re}\left(-\frac{j}{2}xe^{(-2+j)x}\right) \\ &= xe^{-2x}\mathrm{re}\left(-\frac{j}{2}xe^{jx}\right) \\ &= xe^{-2x}\left(\frac{1}{2}\sin(x)\right) \\ &= \frac{xe^{-2x}\sin(x)}{2}. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$\begin{aligned} y &= \frac{xe^{-2x}\sin(x)}{2} + e^{-2x}(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) \\ &= e^{-2x}\left(\frac{x\sin(x)}{2} + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right) \end{aligned}$$

3 Lineare Systeme

3.1 Dirac Impuls

Aufgabe 16. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2)\delta(t-3)dt.$$

Lösung von Aufgabe 16. Mit der Ausblendeigenschaft gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2)\delta(t-3)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(9)\delta(t-3)dt \\
&= \cos(9)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)dt \\
&= \cos(9).
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(t) = \sigma(t^2-1)\sin(t).$$

Beachten Sie, dass Ausdrücke wie $\delta(t^2)$ oder $\delta(t^2-1)$ nicht definiert sind.

Lösung von Aufgabe 17. Die Funktion $\sigma(t^2-1)$ springt an der Stelle $t=-1$ von 1 auf 0 und an der Stelle $t=1$ von 0 auf 1. Da der Funktionswert an den Stellen $t=\pm 1$ unwichtig ist, kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\sigma(t^2-1) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } -1<t<1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= 1-(\sigma(t+1)-\sigma(t-1)) \\
&= 1-\sigma(t+1)+\sigma(t-1).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
f(t) &= (1-\sigma(t+1)+\sigma(t-1))\sin(t) \\
f'(t) &= (-\delta(t+1)+\delta(t-1))\sin(t)+(1-\sigma(t+1)+\sigma(t-1))\cos(t) \\
&= -\delta(t+1)\sin(t)+\delta(t-1)\sin(t)+\sigma(t^2-1)\cos(t) \\
&= -\delta(t+1)\sin(-1)+\delta(t-1)\sin(1)+\sigma(t^2-1)\cos(t) \\
&= \delta(t+1)\sin(1)+\delta(t-1)\sin(1)+\sigma(t^2-1)\cos(t) \\
&= (\delta(t+1)+\delta(t-1))\sin(1)+\sigma(t^2-1)\cos(t).
\end{aligned}$$

3.2 Faltung

Aufgabe 18. Sei

$$f(t) = \sigma(t-1)\frac{1}{t}.$$

Berechnen Sie $f * f$. Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned}(f*f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau-1)\frac{1}{\tau}\sigma(t-1-\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau \\ &= \int_{1}^{\infty} \sigma(t-1-\tau)\frac{1}{\tau(t-\tau)}d\tau\end{aligned}$$

Im Integral läuft τ zwischen 1 und ∞. Daher ist

$$\sigma(t-1-\tau) = 0$$

falls $\tau > t-1$ oder falls $t < 2$. Man kann den Integrationsbereich damit auf 1 bis $t-1$ einschränken. Durch einen Faktor $\sigma(t-2)$ stellt man sicher, dass die Funktion 0 ist für $t < 2$. Damit gilt

$$(f*f)(t) = \sigma(t-2)\int_{1}^{t-1} \frac{1}{\tau(t-\tau)}d\tau.$$

Partialruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau(t-\tau)} &= \frac{c_1}{\tau} + \frac{c_2}{t-\tau} \\ 1 &= c_1(t-\tau) + c_2\tau\end{aligned}$$

Spezialfall $\tau = 0$.

$$\begin{aligned}1 &= c_1 t \\ c_1 &= \frac{1}{t}\end{aligned}$$

Spezialfall $\tau = t$.

$$\begin{aligned}1 &= c_2 t \\ c_2 &= \frac{1}{t}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
&\sigma(t-2)\int_1^{t-1}\frac{1}{\tau(t-\tau)}d\tau \\
&= \sigma(t-2)\int_1^{t-1}\left(\frac{1}{\tau}\frac{1}{t}+\frac{1}{t-\tau}\frac{1}{t}\right)d\tau \\
&= \sigma(t-2)\frac{1}{t}\int_1^{t-1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t-\tau}\right)d\tau \\
&= \sigma(t-2)\frac{1}{t}\left[\ln|\tau|-\ln|t-\tau|\right]_1^{t-1} \\
&= \sigma(t-2)\frac{1}{t}\left(\ln|t-1|-\ln(1)-\ln|t-(t-1)|+\ln|t-1|\right) \\
&= \sigma(t-2)\frac{\ln(t-1)+\ln(t-1)}{t} \\
&= 2\sigma(t-2)\frac{\ln(t-1)}{t}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Die Heizung eines Hauses produziert zum Zeitpunkt t die Leistung $f(t)$. Aufgrund von Leitungen braucht die von der Heizung erzeugte Energie mindestens eine Sekunde um ins Haus zu gelangen. Der Anteil der Heizenergie, der in weniger als t Sekunden ins Haus transportiert wird, sei $(t-1)/t$ für $t \geq 1$. Für sehr große Werte von t ist somit die gesamte Heizenergie im Haus angekommen, d.h. es geht nichts verloren.

- Berechenen Sie die Leistung, die dem Haus zum Zeitpunkt t zugeführt wird in Abhängigkeit von $f(t)$.
- Sei nun speziell $f(t) = \sigma(t)$, d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Heizung von 0 auf 1 eingeschaltet. Berechnen Sie für diesen Fall die dem Haus zugeführte Leistung zum Zeitpunkt t.

Das Haus gibt seinerseits auch wieder Energie an die Umwelt ab. Die Energie braucht mindestens 2 Sekunden um das Haus zu verlassen. Der Anteil Energie, der weniger als t Sekunden im Haus bleibt, sei $(t-2)/t$ für $t \geq 2$.

- Berechnen Sie die Leistung, die das Haus zum Zeitpunkt t abstrahlt in Abhängigkeit von $f(t)$.
- Berechnen Sie die Nettoleistung, die dem Haus zugeführt wird in Abhängigkeit von $f(t)$.
- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass die dem Haus netto zugeführte Leistung gleich $(f * g)(t)$ ist. Hierzu müssen Sie ein Faltungsintegral lösen, was wiederum Partialbruchzerlegung erfordert. Sie werden also eine Weile beschäftigt sein.

Lösung von Aufgabe 19. Zusammenhang mit der Faltung.

Sei $G(\tau)$ der Anteil der erzeugten Energie, der weniger als τ Sekunden von der Heizung ins Haus unterwegs ist. Dann ist

$$G(\tau + \Delta\tau) - G(\tau)$$

der Anteil Energie, der zwischen τ und $\tau + \Delta\tau$ Sekunden braucht. Nun wir die Zeitachse in Punkte

$$\tau_i \quad = \quad i\Delta\tau$$

diskretisiert. Für kleine Werte von $\Delta\tau$ ist die Leistung, die zum Zeitpunkt t im Haus ankommt, somit

$$h(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} f(t-\tau_i)(G(\tau_i + \Delta\tau) - G(\tau_i)).$$

Von der Leistung, die zur Zeit $t - \tau_i$ erzeugt wurde, nimmt man den Anteil, der zwischen τ_i und $\tau_i + \Delta\tau$ Sekunden unterwegs ist und summiert dies über alle positiven Laufzeiten τ_i. Beim Grenzübergang $\Delta\tau \to 0$ geht die

Summe in ein Integral und $\Delta\tau$ in ein Differential $d\tau$ über:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(t-\tau_i)\frac{G(\tau_i+\Delta\tau)-G(\tau_i)}{\Delta\tau}\Delta\tau \\
&\approx \sum_{i=0}^{\infty} f(t-\tau_i)g(\tau_i)\Delta\tau \\
&\approx \int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= (f*g)(\tau).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $G(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ und folglich $g(\tau) = 0$ für $\tau < 0$.

- Der Anteil Energie, der weniger als t Sekunden von der Heizung zum Haus braucht, ist

  $$G_1(t) = \sigma(t-1)\frac{t-1}{t}.$$

  Damit ist

  $$\begin{aligned}
  g_1(t) &= G_1'(t) \\
  &= \underbrace{\delta(t-1)\frac{t-1}{t}}_{=0} + \sigma(t-1)\frac{t-(t-1)}{t^2} \\
  &= \sigma(t-1)\frac{1}{t^2}.
  \end{aligned}$$

  Die Leistung, die zur Zeit t dem Haus zugeführt wird, ist damit

  $$h_1(t) = (f*g_1)(t).$$

- Sei $f(t) = \sigma(t)$. Dann ist

  $$\begin{aligned}
  h_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-1-\tau)\frac{1}{(t-\tau)^2}d\tau \\
  &= \int_0^{\infty} \sigma(t-1-\tau)\frac{1}{(t-\tau)^2}d\tau.
  \end{aligned}$$

  Falls $\tau > t-1$ ist, ist $\sigma(t-1-\tau) = 0$, d.h. die Obergrenze des Integrals kann auf $t-1$ gesetzt werden. Weiterhin ist im Integral

$\tau \geq 0$ und somit der Integrand Null falls $t < 1$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sigma(t-1-\tau)\frac{1}{(t-\tau)^2}d\tau &= \sigma(t-1)\int_0^{t-1}(\tau-t)^{-2}d\tau \\
&= \sigma(t-1)\left[-(\tau-t)^{-1}\right]_0^{t-1} \\
&= \sigma(t-1)\left[\frac{1}{t-\tau}\right]_0^{t-1} \\
&= \sigma(t-1)\left(\frac{1}{t-(t-1)}-\frac{1}{t}\right) \\
&= \sigma(t-1)\left(1-\frac{1}{t}\right) \\
&= \sigma(t-1)\frac{t-1}{t}.
\end{aligned}$$

- Mit

  $$G_2(t) = \sigma(t-2)\frac{t-2}{t}$$

  gilt

  $$\begin{aligned}
  g_2(t) &= G_2'(t) \\
  &= \underbrace{\delta(t-2)\frac{t-2}{t}}_{=0} + \sigma(t-2)\frac{t-(t-2)}{t^2} \\
  &= \sigma(t-2)\frac{2}{t^2}.
  \end{aligned}$$

  Die Leistung, die zur Zeit t das Haus verlässt, ist somit

  $$h_2(t) = (f * g_1 * g_2)(t).$$

- Die dem Haus netto zugeführte Leistung ist

  $$\begin{aligned}
  h_1 - h_2 &= f * g_1 - f * g_1 * g_2 \\
  &= f * g_1 * (\delta - g_2).
  \end{aligned}$$

- Für

  $$\begin{aligned}
  g &= g_1 * (\delta - g_2) \\
  &= g_1 - g_1 * g_2
  \end{aligned}$$

  ist $f*g$ die dem Haus netto zugeführte Leistung. Zunächst wird g_1*g_2 berechnet.

  $$\begin{aligned}
  (g_1 * g_2)(t) &= \int_{-\infty}^\infty g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \\
  &= \int_{-\infty}^\infty \sigma(\tau-1)\frac{1}{\tau^2}\sigma(t-2-\tau)\frac{2}{(t-\tau)^2}d\tau \\
  &= 2\int_1^\infty \sigma(t-2-\tau)\frac{1}{\tau^2(t-\tau)^2}d\tau.
  \end{aligned}$$

Da $\sigma(t-2-\tau)=0$ für $\tau > t-2$ kann die Obergrenze des Integrals auf $t-2$ gesetzt werden. Da im Integral $\tau \geq 1$ ist, ist $\sigma(t-2-\tau)=0$ falls $t<3$. Damit lässt sich das Integral vereinfachen zu

$$2\sigma(t-3)\int_1^{t-2}\frac{1}{\tau^2(t-\tau)^2}d\tau.$$

Partialbruchzerlegung des Integranden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau^2(t-\tau)^2} &= \frac{c_1}{\tau}+\frac{c_2}{\tau^2}+\frac{c_3}{t-\tau}+\frac{c_4}{(t-\tau)^2}\\ 1 &= c_1\tau(t-\tau)^2+c_2(t-\tau)^2+c_3\tau^2(t-\tau)+c_4\tau^2.\end{aligned}$$

Spezialfall $\tau = 0$

$$1 = c_2t^2, \quad c_2 = \frac{1}{t^2}$$

Spezialfall $\tau = t$

$$1 = c_4t^2, \quad c_4 = \frac{1}{t^2}$$

Damit lassen sich zwei Summanden berechnen:

$$\begin{aligned}c_2(t-\tau)^2+c_4\tau^2 &= \frac{t^2-2t\tau+\tau^2+\tau^2}{t^2}\\ &= 1+2\frac{\tau^2-t\tau}{t^2}.\end{aligned}$$

Bringt man dies in obiger Gleichung auf die linke Seite, erhält man

$$\begin{aligned}-2\frac{\tau^2-t\tau}{t^2} &= c_1\tau(t-\tau)^2+c_3\tau^2(t-\tau)\\ -2(\tau-t) &= c_1t^2(t-\tau)^2+c_3t^2\tau(t-\tau)\\ 2 &= c_1t^2(t-\tau)+c_3t^2\tau\end{aligned}$$

Spezialfall $\tau = 0$

$$2 = c_1t^3, \quad c_1 = \frac{2}{t^3}$$

Spezialfall $\tau = t$

$$2 = c_3t^3, \quad c_3 = \frac{2}{t^3}$$

Der Integrand wird damit

$$\begin{aligned}&\frac{2}{t^3}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t^2}\frac{1}{\tau^2}-\frac{2}{t^3}\frac{1}{t-\tau}+\frac{1}{t^2}\frac{1}{(t-\tau)^2}\\ &= \frac{2}{t^3}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t-\tau}\right)+\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{(t-\tau)^2}\right)\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{2}{t^3}\left(\ln|\tau|-\ln|t-\tau|\right)+\frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t-\tau}\right)$$

Einsetzen der Grenzen von 1 bis $t-2$ ergibt

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{t^3}\left(\ln|t-2| - \ln|t-(t-2)| - \ln(1) + \ln|t-1|\right) + \\
& \frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t-(t-2)} + 1 - \frac{1}{t-1}\right) \\
= \;& \frac{2}{t^3}\left(\ln|t-2| - \ln(2) + \ln|t-1|\right) + \\
& \frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{t-2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{t-1}\right) \\
= \;& \frac{2}{t^3}\ln\left(\frac{(t-2)(t-1)}{2}\right) + \frac{3t^2-13t+12}{2t^2(t-2)(t-1)}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& (g_1 * g_2)(t) \\
= \;& 2\sigma(t-3)\left(\frac{2}{t^3}\ln\left(\frac{(t-2)(t-1)}{2}\right) + \frac{3t^2-13t+12}{2t^2(t-2)(t-1)}\right) \\
= \;& \sigma(t-3)\left(\frac{4}{t^3}\ln\left(\frac{(t-2)(t-1)}{2}\right) + \frac{3t^2-13t+12}{t^2(t-2)(t-1)}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& g(t) \\
= \;& g_1(t) - (g_1 * g_2)(t) \\
= \;& \sigma(t-1)\frac{1}{t^2} - \\
& \sigma(t-3)\left(\frac{4}{t^3}\ln\left(\frac{(t-2)(t-1)}{2}\right) + \frac{3t^2-13t+12}{t^2(t-2)(t-1)}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 20.

- Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{at} \\ g(t) &= \sigma(t)e^{bt}. \end{aligned}$$

  Berechnen Sie

$$(f * g)(t)$$

  und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $a = b$.

- Berechnen Sie hiermit die Faltung von

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)\sin(t) \text{ und} \\ g(t) &= \sigma(t)\cos(t). \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 20.

- Faltung von $f(t) = \sigma(t)e^{at}$ und $g(t) = \sigma(t)e^{bt}$.

$$\begin{aligned} &(f * g)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)e^{a\tau}\sigma(t-\tau)e^{b(t-\tau)}d\tau \\ &= \sigma(t)\int_0^t e^{a\tau}e^{b(t-\tau)}d\tau \\ &= \sigma(t)e^{bt}\int_0^t e^{a\tau}e^{-b\tau)}d\tau \\ &= \sigma(t)e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)\tau}d\tau \\ &= \sigma(t)e^{bt}\frac{1}{a-b}[e^{(a-b)\tau}]_0^t, \qquad \text{falls } a \neq b \\ &= \sigma(t)e^{bt}\frac{1}{a-b}(e^{(a-b)t}-1) \\ &= \sigma(t)\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right) \end{aligned}$$

  Falls $a \neq b$ erhält man

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \sigma(t)e^{at}\int_0^t e^{(a-a)\tau}d\tau \\ &= \sigma(t)e^{at}\int_0^t 1 d\tau \\ &= \sigma(t)te^{at}. \end{aligned}$$

- Faltung von $f(t) = \sigma(t)\sin(t)$ und $g(t) = \sigma(t)\cos(t)$.

$$
\begin{aligned}
&(f * g)(t) \\
&= \sigma(t)\frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) * \sigma(t)\frac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) \\
&= \sigma(t)\frac{1}{4j}\left(e^{jt} * e^{jt} - e^{-jt} * e^{-jt} + \underbrace{e^{jt} * e^{-jt} - e^{-jt} * e^{jt}}_{=0}\right) \\
&= \sigma(t)\frac{1}{4j}\left(e^{jt} * e^{jt} - e^{-jt} * e^{-jt}\right) \\
&= \sigma(t)\frac{1}{4j}\left(te^{jt} - te^{-jt}\right) \\
&= \sigma(t)\frac{1}{2}t\sin(t).
\end{aligned}
$$

3.3 Lineare zeitinvariant Systeme

Aufgabe 21. Ausgehend von der linearen DGL erster Ordnung

$$y' + g(x)y = r(x)$$

erhält man duch Umbenennung der Funktionssymbole

$$f'(t) + g(t)f(t) = h(t).$$

Sei nun S das System mit

$$[S(f)](t) = f'(t) + g(t)f(t)$$

wobei $g(t)$ eine beliebige Funktion ist.

- Ist S linear und zeitinvariant?
- Gibt es zu jeder rechten Seite h genau eine Funktion f so dass $S(f) = h$?

Lösung von Aufgabe 21. S ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)'(t) + g(t)(f_1 + f_2)(t) \\
&= f_1'(t) + f_2'(t) + g(t)(f_1(t) + f_2(t)) \\
&= f_1'(t) + g(t)f_1(t) + f_2'(t) + g(t)f_2(t) \\
&= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\
[S(uf)](t) &= (uf)'(t) + g(t)(uf)(t) \\
&= uf'(t) + g(t)uf(t) \\
&= u(f'(t) + g(t)f(t)) \\
&= u[S(f)](t)
\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
[S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}'(t) + g(t)f_{\hat{t}}(t) \\
&= f'(t - \hat{t}) + g(t)f(t - \hat{t}) \\
[S(f)_{\hat{t}}](t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\
&= f'(t - \hat{t}) + g(t - \hat{t})f(t - \hat{t}).
\end{aligned}$$

Die DGL kann mit Variation der Konstanten gelöst werden. Im allgemeinen gibt es unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Funktionen f mit $S(f) = h$. Das System S ist also nicht injektiv.

Aufgabe 22. Sei

$$[S(f)](t) \quad = \quad f(t)f'(t).$$

Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 22. S ist nicht linear. So gilt

$$\begin{aligned} S(uf) &= (uf)(uf)' \\ &= u^2 f f' \\ &= u^2 S(f) \\ &\neq uS(f) \\ S(f+g) &= (f+g)(f+g)' \\ &= (f+g)(f'+g') \\ &= ff' + gg' + fg' + gf' \\ &= S(f) + S(g) + fg' + gf' \\ &\neq S(f) + S(g). \end{aligned}$$

S ist zeitinvariant.

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(t) f'_{\hat{t}}(t) \\ &= f(t-\hat{t}) f'(t-\hat{t}) \\ &= [S(f)](t-\hat{t}) \\ &= [S(f)_{\hat{t}})](t) \end{aligned}$$

Aufgabe 23. Sei S definiert durch

$$[S(f)](t) = \int_{t-1}^{t+1} f(\tau)d\tau.$$

Ist S linear und zeitinvariant?

Lösung von Aufgabe 23. S ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f_1+f_2)](t) &= \int_{t-1}^{t+1} (f_1+f_2)(\tau)d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t+1} (f_1(\tau)+f_2(\tau))d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t+1} f_1(\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t+1} f_2(\tau)d\tau \\
&= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\
[S(uf)](t) &= \int_{t-1}^{t+1} (uf)(\tau)d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t+1} uf(\tau)d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t+1} f(\tau)d\tau \\
&= u\,[S(f)](t) \\
&= [uS(f)](t)
\end{aligned}$$

S ist zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
[S(f_{\hat{t}})](t) &= \int_{t-1}^{t+1} f_{\hat{t}}(\tau)d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t+1} f(\tau-\hat{t})d\tau.
\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}
u &= \tau - \hat{t} \\
du &= d\tau
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{t-1}^{t+1} f(\tau-\hat{t})d\tau &= \int_{(t-1)-\hat{t}}^{(t+1)-\hat{t}} f(u)du \\
&= \int_{(t-\hat{t})-1}^{(t-\hat{t})+1} f(u)du \\
&= \int_{(t-\hat{t})-1}^{(t-\hat{t})+1} f(\tau)d\tau \\
&= [S(f)](t-\hat{t}) \\
&= [S(f)_{\hat{t}}](t)
\end{aligned}$$

4 Fourier Reihen

Aufgabe 24. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, deren Fourier Koeffizienten z_k gegeben sind. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten z'_k der Funktion

$$g(t) \quad = \quad f(1-t).$$

Lösung von Aufgabe 24.

$$z'_k \quad = \quad \frac{1}{T}\int_0^T f(1-t)e^{-jk\omega t}dt.$$

Substitution

$$\begin{aligned} u &= 1-t \\ dt &= -du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z'_k &= \frac{1}{T}\int_1^{1-T} f(u)e^{-jk\omega(1-u)}(-du) \\ &= -\frac{1}{T}\int_1^{1-T} f(u)e^{-jk\omega}e^{jk\omega u}du \\ &= e^{-jk\omega}\frac{1}{T}\int_{1-T}^{1} f(u)e^{jk\omega u}du \\ &= e^{-jk\omega}\overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-jk\omega u}du} \\ &= e^{-jk\omega}\overline{z_k}. \end{aligned}$$

Aufgabe 25. Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion mit gegebenen Fourier Koeffizienten z_k.

- Zeigen Sie, dass dann $f(t)\cos(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi/T$ ebenfalls T-periodisch ist.
- Zeigen Sie, dass für die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ von $f(t)\cos(\omega t)$ gilt

$$\tilde{z}_k = \frac{1}{2}(z_{k-1} + z_{k+1}).$$

- Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten von $f(t)\cos(n\omega t)$ für ganzzahliges n.

Lösung von Aufgabe 25.

- Eine Funktion $g(t)$ heißt T-periodisch, wenn

$$g(t+T) = g(t)$$

für alle t. Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion und

$$g(t) = f(t)\cos(\omega t)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g(t+T) &= f(t+T)\cos(\omega(t+T)) \\ &= f(t)\cos(\omega t + \omega T) \\ &= f(t)\cos(\omega t + 2\pi) \\ &= f(t)\cos(\omega t) \\ &= g(t). \end{aligned}$$

- Seien z_k die Fourier Koeffizienten von $f(t)$, d.h.

$$z_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt.$$

Die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ von $f(t)\cos(\omega t)$ berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega t)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2T}\left(\int_0^T f(t)e^{j\omega t}e^{-jk\omega t}dt + \int_0^T f(t)e^{-j\omega t}e^{-jk\omega t}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j(k-1)\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j(k+1)\omega t}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}(z_{k-1} + z_{k+1}). \end{aligned}$$

Die Fourier Koeffizienten von $f(t)\cos(n\omega t)$ berechnen sich analog.

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{1}{2}(e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t})e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2T}\left(\int_0^T f(t)e^{jn\omega t}e^{-jk\omega t}dt + \int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}e^{-jk\omega t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j(k-n)\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_0^T e^{-j(k+n)\omega t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}(z_{k-n}+z_{k+n}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 26. Seien f und g zwei T-periodische Funktionen mit Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ und $z_k^{(g)}$. Sei weiterhin

$$h(t) \quad = \quad \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

- Zeigen Sie, dass h eine T-periodische Funktion ist.
- Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T e^{j(k-\ell)\omega t}dt \quad = \quad \begin{cases} T & \text{falls } k=\ell \\ 0 & \text{falls } k\neq\ell \end{cases}$$

  wobei $\omega = 2\pi/T$.
- Zeigen Sie, dass für die Fourier Koeffizienten $z_k^{(h)}$ gilt

$$z_k^{(h)} \quad = \quad z_k^{(f)} z_k^{(g)}.$$

Hinweis: Ersetzen Sie in der Definition von h die Funktionen f und g durch ihre Fourier Reihen. Verwenden Sie für die Fourier Reihe von f den Summationsindex k und für die Fourier Reihe von g den Summationsindex ℓ. Für das Produkt von Summen gilt

$$\left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_\ell b_\ell\right) \quad = \quad \sum_k\sum_\ell a_k b_\ell.$$

Vertauschen Sie dann die Reihenfolge der Summen und des Integrals indem Sie die Summenregel nutzen. Bringen Sie das Ergebnis in die Form einer Fourier Reihe. Die Fourier Koeffizienten können Sie dann einfach ablesen.

Lösung von Aufgabe 26.

- Zu zeigen ist, dass $h(t+T) = h(t)$.

$$\begin{aligned} h(t+T) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)g(t+T-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= h(t). \end{aligned}$$

- Für $k=\ell$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{j(k-\ell)\omega t}dt &= \int_0^T 1dt \\ &= T. \end{aligned}$$

Für $k \neq \ell$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{j(k-\ell)\omega t} dt &= \frac{1}{j(k-\ell)\omega} \left[e^{j(k-\ell)\omega t} \right]_0^T \\
&= \frac{1}{j(k-\ell)\omega} \left(e^{j(k-\ell)\omega T} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{j(k-\ell)\omega} \left(\underbrace{e^{2\pi j(k-\ell)}}_{=1} - 1 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Fourier Koeffizienten von h.

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_k z_k^{(f)} e^{jk\omega\tau} \right) \left(\sum_\ell z_\ell^{(g)} e^{j\ell\omega(t-\tau)} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k \sum_\ell z_k^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{jk\omega\tau} e^{j\ell\omega(t-\tau)} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \sum_k \sum_\ell z_k^{(f)} z_\ell^{(g)} \int_0^T e^{j\ell\omega t} e^{j(k-\ell)\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{T} \sum_k \sum_\ell z_k^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{j\ell\omega t} \int_0^T e^{j(k-\ell)\omega\tau} d\tau .
\end{aligned}$$

Da

$$\int_0^T e^{j(k-\ell)\omega\tau} d\tau = \begin{cases} T & \text{falls } k = \ell \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell \end{cases}$$

sind alle Summanden in der ℓ-Summe gleich Null außer dem Summanden für $\ell = k$. Damit ist

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{T} \sum_k z_k^{(f)} z_k^{(g)} e^{jk\omega t} T \\
&= \sum_k z_k^{(f)} z_k^{(g)} e^{jk\omega t} \\
&= \sum_k z_k^{(h)} e^{jk\omega t} .
\end{aligned}$$

Dies ist die Fourier Reihe von h mit Fourier Koeffizienten

$$z_k^{(h)} = z_k^{(f)} z_k^{(g)} .$$

Aufgabe 27. Sei $f(t)$ eine unbekannte T-periodische Funktion und

$$g(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Die Fourierkoeffizienten z_k von $f(t)$ seien gegeben, wobei $z_0 = 0$.

- Zeigen Sie, dass $g(t)$ eine T-periodische Funktion ist.
- Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ von $g(t)$. Achten Sie insbesondere auf den Spezialfall $k = 0$. Hinweis: Beginnen Sie mit

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t f(u)du \\ &= \int_0^t \underbrace{\sum_k z_k e^{jk\omega u}}_{f(u)} du \end{aligned}$$

  und bringen Sie diesen Term auf die Form

$$\sum_k \dots e^{jk\omega t}.$$

Lösung von Aufgabe 27. $g(t)$ ist T-periodisch:

$$\begin{aligned} g(t+T) &= \int_0^{t+T} f(u)du \\ &= \int_0^t f(u)du + \int_t^{t+T} f(u)du \\ &= g(t) + \int_0^T f(u)du \qquad f(t) \text{ ist } T\text{-periodisch} \\ &= g(t) + z_0 T \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Fourier Koeffizienten von $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t f(u)du \\ &= \int_0^t \sum_k z_k e^{jk\omega u} du \\ &= \sum_{k\neq 0} z_k \int_0^t e^{jk\omega u} du \qquad \text{da } z_0 = 0 \\ &= \sum_{k\neq 0} \frac{z_k}{jk\omega} \left[e^{jk\omega u}\right]_0^t \\ &= \sum_{k\neq 0} \frac{z_k}{jk\omega} (e^{jk\omega t} - 1) \\ &= \sum_{k\neq 0} \frac{z_k}{jk\omega} e^{jk\omega t} - \sum_{k\neq 0} \frac{z_k}{jk\omega}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\tilde{z}_k &= \frac{z_k}{jk\omega}, \qquad k \neq 0 \\ \tilde{z}_0 &= \sum_{k\neq 0} \frac{z_k}{jk\omega}\end{aligned}$$

gilt somit

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{k\neq 0} \tilde{z}_k e^{jk\omega t} - \tilde{z}_0 \underbrace{e^{j0\omega t}}_{=1} \\ &= \sum_{k} \tilde{z}_k e^{jk\omega t}.\end{aligned}$$

5 Fourier Transformation

Aufgabe 28. Sei S ein LTI System, das alle Schwingungskomponenten eines Signals $f(t)$, deren Frequenz kleiner als $\hat{\omega}$ ist, um $\hat{t}$ verschiebt und die anderen Schwingungskomponenten unverändert überträgt. Eine Verschiebung um $\hat{t}$ im Zeitbereich bedeutet eine Multiplikation mit $e^{-j\omega\hat{t}}$ im Frequenzbereich. Damit gilt im Frequenzbereich

$$[S(f)](t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega)$$

wobei

$$G(\omega) \quad = \quad \begin{cases} e^{-j\omega\hat{t}} & \text{falls } |\omega| < \hat{\omega} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion $G(\omega)$ ist somit die Übertragungsfunktion von S.

- S soll im Zeitbereich durch eine Faltung realisiert werden. Berechnen Sie hierzu die Impulsantwort von S. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse mit der si-Funktion.
- Berechnen Sie die Impulsantwort des inversen Systems S^{-1}.

Lösung von Aufgabe 28. Um die Berechnung zu vereinfachen sei

$$\begin{aligned} H(\omega) &= G(\omega) - 1 \\ &= \begin{cases} e^{-j\omega\hat{t}} - 1 & \text{falls } |\omega| < \hat{\omega} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Rücktransformation von $H(\omega)$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} (e^{-j\omega\hat{t}} - 1)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} e^{j\omega(t-\hat{t})}d\omega - \int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} e^{j\omega t}d\omega\right). \end{aligned}$$

Nebenrechnung.

$$\begin{aligned} \int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} e^{j\omega(t-\hat{t})}d\omega &= \frac{1}{j(t-\hat{t})}\left[e^{j\omega(t-\hat{t})}\right]_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} \\ &= \frac{1}{j(t-\hat{t})}\left(e^{j\hat{\omega}(t-\hat{t})} - e^{-j\hat{\omega}(t-\hat{t})}\right) \\ &= \frac{2}{t-\hat{t}}\sin(\hat{\omega}(t-\hat{t})) \\ &= 2\hat{\omega}\mathrm{si}(\hat{\omega}(t-\hat{t})) \end{aligned}$$

Dies gilt auch im Spezialfall $\hat{\omega} = 0$. Für den Spezialfall $\hat{t} = 0$ erhält man damit

$$\int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} e^{j\omega t}d\omega \quad = \quad 2\hat{\omega}\mathrm{si}(\hat{\omega}t).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}(2\hat{\omega}\mathrm{si}(\hat{\omega}(t-\hat{t})) - 2\hat{\omega}\mathrm{si}(\hat{\omega}t)) \\ &= \frac{\hat{\omega}}{\pi}(\mathrm{si}(\hat{\omega}(t-\hat{t})) - \mathrm{si}(\hat{\omega}t)) \end{aligned}$$

Die Impulsantwort von S erhält man durch inverse Fourier Transformation von $G(\omega)$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= H(\omega) + 1 \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \ \frac{\hat{\omega}}{\pi}(\mathrm{si}(\hat{\omega}(t-\hat{t})) - \mathrm{si}(\hat{\omega}t)) + \delta(t) \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Die Impulsantwort des inversen Systems kann man durch inverse Fourier Transformation von $G(\omega)^{-1}$ berechnen. Leichter geht es jedoch, wenn man sich überlegt, dass das inverse System die Verschiebung rückgängig macht, d.h. um $-\hat{t}$ verschiebt. Folglich muss man in der Impulsantwort $g(t)$ lediglich $\hat{t}$ durch $-\hat{t}$ ersetzen und erhält für die Impulsantwort des inversen Systems

$$\frac{\hat{\omega}}{\pi}(\mathrm{si}(\hat{\omega}(t+\hat{t})) - \mathrm{si}(\hat{\omega}t)) + \delta(t).$$

Aufgabe 29. Sei

$$F_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -a < \omega < a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die inverse Fourier Transformierte $f_a(t)$ von $F_a(\omega)$.
- Berechnen Sie hiermit die Faltung

  $$\mathrm{si}(at) * \mathrm{si}(bt)$$

  wobei $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig sind und

  $$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 29. Inverse Fourier Transformierte von $F_a(\omega)$.

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}\left[e^{j\omega t}\right]_{-a}^{a} \qquad \text{falls } t \neq 0 \\ &= \frac{1}{2\pi jt}(e^{jat} - e^{-jat}) \\ &= \frac{1}{\pi t}\frac{1}{2j}(e^{jat} - e^{-jat}) \\ &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{im}(e^{jat}) \\ &= \frac{1}{\pi t}\sin(at) \\ &= \frac{a}{\pi}\frac{\sin(at)}{at} \\ &= \frac{a}{\pi}\mathrm{si}(at). \end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} f_a(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega)e^{0}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}2a \\ &= \frac{a}{\pi} \\ &= \frac{a}{\pi}\mathrm{si}(a0). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f_a(t) = \frac{a}{\pi}\mathrm{si}(at).$$

Berechnung der Faltung. Mit

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi}\mathrm{si}(at) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_a(\omega) \\ \mathrm{si}(at) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\pi}{a}F_a(\omega) \end{aligned}$$

und dem Faltungssatz folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{si}(at) * \mathrm{si}(bt) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\pi}{a}F_a(\omega)\frac{\pi}{b}F_b(\omega) \\ &= \quad \frac{\pi^2}{ab}F_a(\omega)F_b(\omega). \end{aligned}$$

Da $F_a(\omega)$ und $F_b(\omega)$ Rechteckimpulse sind, ist das Produkt

$$F_a(\omega)F_b(\omega) \quad = \quad F_c(\omega)$$

wieder ein Rechteckimpuls mit $c = \min(a, b)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathrm{si}(at) * \mathrm{si}(bt) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\pi^2}{ab}F_c(\omega) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{\pi^2}{ab}\frac{c}{\pi}\mathrm{si}(ct) \\ &= \quad \frac{\pi c}{ab}\mathrm{si}(ct). \end{aligned}$$

Aufgabe 30. Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion

$$\cos(2t)\sin(3t)$$

auf folgende 3 Arten:

- Unter Verwendung von komplexen e-Funktionen für die Cosinus- und Sinusfunktion.
- Unter Verwendung des Modulationssatzes
$$f(t)\cos(\hat{\omega})t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(F(\omega-\hat{\omega})+F(\omega+\hat{\omega})\right).$$
- Unter Verwendung des Faltungssatzes im Frequenzbereich
$$f(t)g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega).$$

Lösung von Aufgabe 30.

Verwendung von komplexen e-Funktionen.

$$\begin{aligned}
\cos(2t)\sin(3t) &= \frac{1}{2}\left(e^{2jt}+e^{-2jt}\right)+\frac{1}{2j}\left(e^{3jt}-e^{-3jt}\right)\\
&= \frac{1}{4j}\left(e^{5jt}-e^{-jt}+e^{jt}-e^{-5jt}\right)\\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2\pi}{4j}\Big(\delta(\omega-5)-\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)-\delta(\omega+5)\Big)\\
&= \frac{j\pi}{2}\Big(\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)+\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\Big)
\end{aligned}$$

Verwendung des Modulationssatzes. Aus der Tabelle entnimmt man

$$\sin(3t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -j\pi(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)).$$

Mit dem Modulationssatz folgt dann

$$\begin{aligned}
\cos(2t)\sin(3t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{j\pi}{2}\left(\delta(\omega-2-3)-\delta(\omega-2+3)+\delta(\omega+2-3)-\delta(\omega+2+3)\right)\\
&= \frac{j\pi}{2}\left(\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)+\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right)
\end{aligned}$$

Verwendung des Faltungssatzes im Frequenzbereich. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos(2t)\\
g(t) &= \sin(3t).
\end{aligned}$$

Aus der Tabelle entnimmt man

$$\begin{aligned}
\cos(2t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2))\\
\sin(3t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -j\pi(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
&f(t)g(t)\\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)\\
&= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega-u)du\\
&= \quad \frac{1}{2\pi}(-j\pi^2)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\delta(u-2)+\delta(u+2)\Big)\Big(\delta(\omega-u-3)-\delta(\omega-u+3)\Big)du\\
&= \quad -\frac{j\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\delta(u-2)\delta(\omega-u-3)-\delta(u-2)\delta(\omega-u+3)\\
&\qquad +\delta(u+2)\delta(\omega-u-3)-\delta(u+2)\delta(\omega-u+3)\Big)du
\end{aligned}
$$

Für die Teilintegrale erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-2)\delta(\omega-u-3)du &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-2)\delta(\omega-5)du\\
&= \delta(\omega-5)\\
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-2)\delta(\omega-u+3)du &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-2)\delta(\omega+1)du\\
&= \delta(\omega+1)\\
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u+2)\delta(\omega-u-3)du &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u+2)\delta(\omega-1)du\\
&= \delta(\omega-1)\\
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u+2)\delta(\omega-u+3)du &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u+2)\delta(\omega+5)\\
&= \delta(\omega+5)
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
f(t)g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet &\quad -\frac{j}{2\pi}\Big(\delta(\omega-5)-\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)-\delta(\omega+5)\Big)\\
= &\quad \frac{j}{2\pi}\Big(\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)+\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\Big).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 31. Für die Fourier Transformierten $F(\omega)$ und $G(\omega)$ zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ gilt der Zusammenhang

$$(2+j\omega)F(\omega-3) \quad = \quad G(2\omega)e^{j(\omega+4)}.$$

Leiten Sie daraus einen entsprechenden Zusammenhang im Zeitbereich her.

Lösung von Aufgabe 31. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) \\ g(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ G(\omega). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
F(\omega-3) &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t)e^{3jt} \\
j\omega F(\omega-3) &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (f(t)e^{3jt})' \\
&\quad = \quad f'(t)e^{3jt} + 3jf(t)e^{3jt} \\
(2+j\omega)F(\omega-3) &\quad = \quad 2F(\omega-3) + j\omega F(\omega-3) \\
&\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2f(t)e^{3jt} + f'(t)e^{3jt} + 3jf(t)e^{3jt} \\
&\quad = \quad (2+3j)e^{3jt}f(t) + e^{3jt}f'(t) \\
2G(2\omega) &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g(t/2) \\
G(2\omega) &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{2}g(t/2) \\
G(2\omega)e^{j(\omega+4)} &\quad = \quad e^{4j}e^{j\omega}G(2\omega) \\
&\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{e^{4j}}{2}g((t+1)/2).
\end{aligned}$$

Damit erhält man im Zeitbereich die Gleichung

$$(2+3j)e^{3jt}f(t) + e^{3jt}f'(t) \quad = \quad \frac{e^{4j}}{2}g((t+1)/2).$$

6 Laplace Transformation

Aufgabe 32. Sei

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 3 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f(t)$.
- Berechnen Sie $(\sigma(t)f(t))'$ und $\sigma(t)f'(t)$ sowie die Laplace Transformierte von beiden Funktionen. Hinweis: Zeichnen Sie zuerst die Funktionen $f'(t)$, $\sigma(t)f'(t)$ und $\sigma(t)f(t)$.
- Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass wenn

$$\sigma(t)f(t) \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

gilt

$$\sigma(t)f'(t) \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Lösung von Aufgabe 32.

$$\begin{aligned}
\sigma(t)f(t) &= \sigma(t)t + \sigma(t) \\
&○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\
\sigma(t)f(t) &= \begin{cases} t+1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
(\sigma(t)f(t))' &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ \delta(t) & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
&○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} + 1 \\
\sigma(t)f'(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ -2\delta(t) & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
&○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} - 2
\end{aligned}$$

Mit

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

und

$$f(0^-) = 3$$

ist

$$\begin{aligned}
sF(s) - f(0^-) &= \frac{1}{s} + 1 - 3 \\
&= \frac{1}{s} - 2 \\
&\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!○ \quad \sigma(t)f'(t).
\end{aligned}$$

Aufgabe 33. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Hierzu gibt es zwei Lösungswege — Sie können Ihr Ergebnis also verifizieren:

- Entwickeln Sie $f(t)$ zunächst in eine Taylor Reihe. Transformieren Sie dann jeden Summanden separat. Da es sich um Potenzen von t handelt, ist das kein Problem. Hinweis: Für die Taylor Entwicklung von $\arctan(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad \text{falls } |x| < 1.$$

- Da

$$tf(t) = \sin(t)$$

ist mit der Differentiation im Frequenzbereich

$$tf(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -F'(s)$$

die Berechnung von $F(s)$ durch Integration möglich. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten hilft Ihnen

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-0t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Von der arctan Funktion sind folgende Gleichungen hilfreich:

$$\begin{aligned} \arctan(x)' &= \frac{1}{x^2+1} \\ \arctan(1/x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(x). \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 33. Mit

$$t^n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{t}\sin(t) \\
&= \frac{1}{t}\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\dots\right) \\
&= 1-\frac{1}{3!}t^2+\frac{1}{5!}t^4-\frac{1}{7!}t^6+\dots \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \; \frac{1}{s}-\frac{1}{3!}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{5!}\frac{4!}{s^5}-\frac{1}{7!}\frac{6!}{s^7}+\dots \text{ falls } \mathrm{re}(s)>0 \\
&= s^{-1}-\frac{s^{-3}}{3}+\frac{s^{-5}}{5}-\frac{s^{-7}}{7}+\dots \\
&= u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\dots \text{ für } u=s^{-1} \\
&= \arctan(u) \\
&= \arctan(1/s) \text{ falls } |1/s|<1 \text{ bzw. } |s|>1
\end{aligned}$$

Mit

$$tf(t)=\sin(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2+1}=-F'(s)$$

muss $F(s)$ eine Stammfunktion von

$$-\frac{1}{s^2+1}$$

sein, d.h.

$$F(s)=-\arctan(s)+C \text{ für ein } C\in\mathbb{R}.$$

Da $F(0)=\pi/2$ und $\arctan(0)=0$ folgt $C=\pi/2$ und

$$\begin{aligned}
F(s) &= \pi/2-\arctan(s) \\
&= \arctan\left(1/s\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 34. Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = t\cos(\omega t).$$

Geben Sie auch an, für welche $s \in \mathbb{C}$ die Funktion $F(s)$ definiert ist.

Lösung von Aufgabe 34.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty t\cos(\omega t)e^{-st}dt.$$

Mit

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)e^{-st} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{(-s+j\omega)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{(-s-j\omega)t}dt \end{aligned}$$

Für beliebiges a erhält man mit Produktintegration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty te^{at}dt &= \left[\frac{1}{a}te^{at}\right]_0^\infty - \frac{1}{a}\int e^{at}dt \\ &= \left[\frac{1}{a}te^{at} - \frac{1}{a^2}e^{at}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

falls $\mathrm{re}(a) < 0$.

- Für $a = -s + j\omega$ gilt damit

  $$\int_0^\infty te^{(-s+j\omega)t}dt = \frac{1}{(-s+j\omega)^2} = \frac{1}{(s-j\omega)^2}$$

  falls $\mathrm{re}(s) > 0$.
- Für $a = -s - j\omega$ gilt

  $$\int_0^\infty te^{(-s-j\omega)t}dt = \frac{1}{(-s-j\omega)^2} = \frac{1}{(s+j\omega)^2}$$

  falls $\mathrm{re}(s) > 0$.

Damit ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-j\omega)^2} + \frac{1}{(s+j\omega)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(s+j\omega)^2 + (s-j\omega)^2}{(s-j\omega)^2(s+j\omega)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2s^2 - 2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right) \\ &= \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Die Funktion $F(s)$ ist definiert falls $\mathrm{re}(s) > 0$.

Einfacher wäre es natürlich mit der Ableitung im Frequenzbereich gegangen:

$$tf(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -F'(s).$$

Da

$$\cos(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

gilt

$$\begin{aligned} t\cos(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)' \\ = \quad & -\frac{s^2+\omega^2-s(2s)}{(s^2+\omega^2)^2} \\ = \quad & \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 35. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)t \\ g(t) &= \sigma(t)e^t. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$ auf zwei Weisen:

- Ohne Verwendung der Laplace Transformation durch Lösen des Faltungsintegrals.
- Mit dem Faltungssatz der Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 35. Ohne Laplace Transformation.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)(t-\tau)\sigma(\tau)e^\tau d\tau \\ &= \sigma(t)\int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau. \end{aligned}$$

Nebenrechnung.

$$\begin{aligned} \int_0^t te^\tau d\tau &= t\int_0^t e^\tau d\tau \\ &= t\left[e^\tau\right]_0^t \\ &= t(e^t-1) \\ \int_0^t \tau e^\tau d\tau &= \left[\tau e^\tau\right]_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= te^t - \left[e^\tau\right]_0^t \\ &= te^t - e^t + 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \sigma(t)(t(e^t-1) - te^t + e^t - 1) \\ &= \sigma(t)(e^t - t - 1). \end{aligned}$$

Mit Laplace Transformation.

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2} \\ g(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-1} \\ (f * g)(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2(s-1)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s-1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s-1} \\ 1 &= c_1 s(s-1) + c_2(s-1) + c_3 s^2. \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= -c_2 \\ c_2 &= -1. \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 1$

$$c_3 = 1.$$

Spezialfall $s = 2$

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_1 + c_2 + 4c_3 \\ 1 &= 2c_1 - 1 + 4 \\ 2c_1 &= -2 \\ c_1 &= -1. \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ \; -\sigma(t) - \sigma(t)t + \sigma(t)e^t \\ &= \sigma(t)(e^t - t - 1). \end{aligned}$$