Heilbronn, den 25.9.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 3 mit Musterlösungen

Blatt 1

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t\pi^t + 5e^{2t}}{7e^{2t}}.$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}\frac{2t\pi^t + 5e^{2t}}{7e^{2t}} &= \frac{2te^{\ln(\pi^t)}}{7e^{2t}} + \frac{5}{7}\\ &= \frac{1}{7}(2te^{\ln(\pi)t}e^{-2t} + 5)\\ &= \frac{1}{7}(2te^{(\ln(\pi)-2)t} + 5).\end{aligned}$$

Da $\ln(\pi) - 2 < 0$, gilt

$$\lim_{t\to\infty} 2te^{(\ln(\pi)-2)t} = 0.$$

Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{7}(2te^{(\ln(\pi)-2)t} + 5) = \frac{5}{7}.$$

Aufgabe 2. Nennen Sie vier äquivalente Bedingungen dafür, dass die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind.

Lösung von Aufgabe 2.

- Keiner der Vektoren ist Linearkombination der anderen.
- Für alle ℓ gilt
  $$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell, \ldots, \vec{a}_n) \neq L(\vec{a}_1, \ldots, \cancel{\vec{a}_\ell}, \ldots, \vec{a}_n)$$
- Der Nullvektor kann nur auf triviale Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden.
- Jeder Vektor $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ kann auf genau eine Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Lösung von Aufgabe 3. Die Spalten von A sind $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie für beliebige Konstanten a, ω

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt.$$

Hinweis: Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Sie brauchen hierfür die Gesetze der komplexen Zahlen, insbesondere

$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= 2j\mathrm{im}(z) \\ \mathrm{im}(e^{j\varphi}) &= \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $\omega = 0$. Verwenden Sie die si-Funktion, die definiert ist durch

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Das Ergebnis ist dann $2a\mathrm{si}(\omega a)$.

Lösung von Aufgabe 4. Der Spezialfall $\omega = 0$ wird separat betrachtet, da im folgenden Rechenweg durch ω dividiert wird.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} \left[e^{j\omega t} \right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} \right). \end{aligned}$$

Da $e^{j\omega a}$ und $e^{-j\omega a}$ konjugiert komplex sind, ist

$$\begin{aligned} e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} &= 2j\mathrm{im}(e^{j\omega a}) \\ &= 2j\sin(\omega a). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} 2j\sin(\omega a) \\ &= \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) \\ &= 2a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a} \\ &= 2a\mathrm{si}(\omega a). \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \int_{-a}^{a} 1 dt \\ &= 2a \\ &= 2a\mathrm{si}(\omega a). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt \quad = \quad 2a\mathrm{si}(\omega a)$$

für alle a, ω.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x^2+x-2)}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Nullstellen des Nenners:

$$(x^2 + x - 1) = (x-1)(x+2).$$

Faktorisierung des Nenners:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 1}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x+2} \\ 2x^2 - 1 &= c_1(x-1)(x+2) + c_2(x+2) + c_3(x-1)^2 \end{aligned}$$

- Spezialfall $x = -2$.
$$7 = 9c_3, \quad c_3 = 7/9.$$
- Spezialfall $x = 1$.
$$1 = 3c_2, \quad c_2 = 1/3.$$
- Spezialfall $x = 0$.
$$\begin{aligned} -1 &= -2c_1 + 2c_2 + c_3 \\ &= -2c_1 + 2/3 + 7/9 \\ &= -2c_1 + 13/9 \\ -22/9 &= -2c_1 \\ c_1 &= 11/9. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$f(x) = \frac{11/9}{x-1} + \frac{1/3}{(x-1)^2} + \frac{7/9}{x+2}.$$

Aufgabe 6. Außer den in der Vorlesung vorgestellten Ansätzen für Störfunktionen bei linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gibt es auch einen Ansatz für rechte Seiten der Form

$$r(x) \quad = \quad p(x)e^{\mu x}$$

wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Der Ansatz ist dann

$$y(x) = q(x)e^{\mu x}$$

wobei $q(x)$ ein Polynom vom gleichen Grad ist wie $p(x)$. Ist μ eine s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann ist der Ansatz

$$y(x) = x^s q(x)e^{\mu x}.$$

Berechnen Sie hiermit die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + y = (x^2+1)e^x.$$

Lösung von Aufgabe 6. Allgemeine homogene Lösung. Ansatz

$$y' + y = 0$$

führt zum charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1. \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung ist

$$y_H(x) = Ce^{-x}.$$

Ansatz für die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} y &= (ax^2+bx+c)e^x \\ y' &= (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x + (ax^2+bx+c)e^x &= (x^2+1)e^x \\ 2ax^2 + (2a+2b)x + 2c + b &= x^2+1. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2a+2b &= 0 \\ 2c+b &= 1. \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

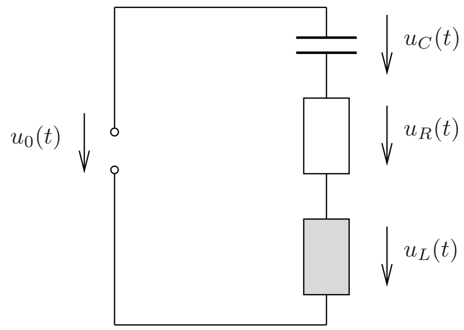
Die partikuläre Lösung ist damit

$$y_P(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Die allgemeien Lösung ist

$$y(x) = Ce^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Aufgabe 7. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$. Die Eingangsspannung sei

$$u_0(t) = \cos(\omega t).$$

Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für $q(t)$ in Abhängigkeit von ω. Warum tritt bei diesem System nie Resonanz auf?

Lösung von Aufgabe 7. Mit der Maschenregel gilt

$$q/C + Rq' + Lq'' = \cos(\omega t).$$

Reeller Ansatz

$$\begin{aligned} q &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ q' &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\ q'' &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \\ + \quad & R(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) \\ + \quad & L(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)) \\ = \quad & \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)(A/C + B\omega R - A\omega^2 L) + \sin(\omega t)(B/C - A\omega R - B\omega^2 L) &= \cos(\omega t) \\ A/C + B\omega R - A\omega^2 L &= 1 \\ B/C - A\omega R - B\omega^2 L &= 0 \end{aligned}$$

Lösen

$$\begin{aligned} A(1/C-\omega^2 L)+B\omega R &= 1 \\ B(1/C-\omega^2 L)-A\omega R &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$A = B(1/C-\omega^2 L)/(\omega R).$$

Einsetzen in erste Gleichung gibt

$$\begin{aligned} B((1/C-\omega^2 L)^2/(\omega R)+\omega R) &= 1 \\ B((1/C-\omega^2 L)^2+(\omega R)^2) &= \omega R \\ B &= \frac{\omega R}{(1/C-\omega^2 L)^2+(\omega R)^2} \\ A &= \frac{1/C-\omega^2 L}{(1/C-\omega^2 L)^2+(\omega R)^2}. \end{aligned}$$

Alternativ hätte man die Aufgabe auch mit dem komplexen Ansatz

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$$

lösen können. Für die rechte Seite

$$r_1(t) = e^{j\omega t}$$

ist der Ansatz

$$\begin{aligned} q_1 &= ae^{j\omega t} \\ q_1' &= aj\omega e^{j\omega t} \\ q_1'' &= -a\omega^2 e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} 1/Cae^{j\omega t}+Raj\omega e^{j\omega t}-La\omega^2 e^{j\omega t} &= e^{j\omega t} \\ a(1/C+j\omega R-\omega^2 L) &= 1 \\ a &= \frac{1}{1/C+j\omega R-\omega^2 L} \\ &= \frac{1/C-\omega^2 L-j\omega R}{(1/C-\omega^2 L)^2+(\omega R)^2}. \end{aligned}$$

Lösung für rechte Seite $r_1(t)$ ist somit

$$q_1 = ae^{j\omega t}.$$

Für die rechte Seite

$$r_2(t) = e^{-j\omega t}$$

erhält man analog die Lösung

$$q_2 = \overline{q_1}.$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\ &= \mathrm{re}(q_1) \\ &= \mathrm{re}\left(\frac{1/C - \omega^2 L - j\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\right) \\ &= \frac{1/C - \omega^2 L}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Damit Resonanz auftritt, muss $j\omega$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$L\lambda^2 + R\lambda + 1/C$$

sein. Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

Da $R \neq 0$ haben diese einen Realteil. Da ω reell ist, ist $j\omega$ rein imaginär und damit kann $j\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein.

Aufgabe 8. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y = \sin(x + 1).$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} \sin(x+1) &= \mathrm{im}(e^{j(x+1)}) \\ &= \mathrm{im}(e^j e^{jx}). \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung mit rechter Seite e^{jx}. Da j Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor. Ansatz daher

$$\begin{aligned} y &= cxe^{jx} \\ y' &= ce^{jx} + cxje^{jx} \\ y'' &= cje^{jx} + cje^{jx} - cxe^{jx} \\ &= c2je^{jx} - cxe^{jx}. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} c2je^{jx} - cxe^{jx} + cxe^{jx} &= e^{jx} \\ c2je^{jx} &= e^{jx} \\ c2j &= 1 \\ c &= \frac{1}{2j} \\ &= -\frac{j}{2}. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung ist damit

$$y = -\frac{j}{2}xe^{jx}.$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $e^j e^{jx}$ ist somit

$$y = -\frac{j}{2}e^j xe^{jx}.$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $\mathrm{im}(e^j e^{jx})$ ist somit

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{im}(-\frac{j}{2}e^j xe^{jx}) \\ &= -\frac{1}{2}x\mathrm{im}(je^{j(x+1)}) \\ &= -\frac{1}{2}x\mathrm{im}(j(\cos(x+1) + j\sin(x+1))) \\ &= -\frac{1}{2}x\cos(x+1). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= 3e^{5t-2} + \frac{\delta(t-1)}{t} \\ g(t) &= \pi(\delta(t+3) - 2\delta(t-1)). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 9. Mit der Ausblendeigenschaft der Faltung gilt

$$\frac{\delta(t-1)}{t} = \delta(t-1)\frac{1}{t} = \delta(t-1).$$

Mit der Linearität, Zeitinvarianz und dem neutralen Element der Faltung folgt

$$\begin{aligned} &(f * g)(t) \\ &= \big(3e^{5t-2} + \delta(t-1)\big) * \pi(\delta(t+3) - 2\delta(t-1)) \\ &= \pi\big(3e^{5t-2} * \delta(t+3) - 6e^{5t-2} * \delta(t-1) + \delta(t-1) * \delta(t+3) - 2\delta(t-1) * \delta(t-1)\big) \\ &= \pi\Big(3e^{5(t+3)-2} - 6e^{5(t-1)-2} + \delta(t+2) - 2\delta(t-2)\Big) \\ &= \pi\big(3e^{15t+13} - 6e^{5t-7} + \delta(t+2) - 2\delta(t-2)\big). \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die Faltung kommutativ ist, d.h. für alle Funktionen f und g, für die $f * g$ existiert, gilt

$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$(f * g)(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Mit der Substitution $\mu = t - \tau$ und $d\tau = -d\mu$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \int_{\mu=\infty}^{-\infty} -f(t-\mu)g(\mu)d\mu \\ &= \int_{\mu=-\infty}^{\infty} g(\mu)f(t-\mu)d\mu \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &= (g*f)(t).\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Für $a > 0$ bezeichne der Index a die Stauchung einer Funktion um Faktor a, d.h.

$$f_a(t) = f(at).$$

Zeigen Sie, dass

$$f_a * g_a = \frac{1}{a}(f*g)_a.$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}(f_a * g_a)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(\tau)g_a(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(a(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(at-a\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Substitution.

$$u = a\tau, \quad \frac{du}{d\tau} = a, \quad d\tau = \frac{1}{a}du.$$

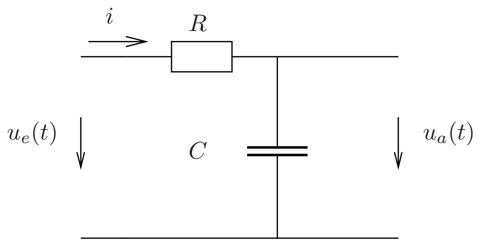
Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(at-a\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(at-u)\frac{1}{a}du \\ &= \frac{1}{a}(f*g)(at) \\ &= \frac{1}{a}(f*g)_a(t).\end{aligned}$$

Dies gilt für alle t, folglich ist

$$f_a * g_a = \frac{1}{a}(f*g)_a.$$

Aufgabe 12. Gegeben sei folgende Schaltung:



Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung $u_a(t)$ aus der Eingangsspannung $u_e(t)$ durch eine Faltung berechnet werden kann, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$u_a(t) = (u_e * g)(t).$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- Leiten Sie zunächst aus den Gesetzen der Elektrotechnik die Differentialgleichung
$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{u_e(t)}{R}.$$
für die Ladung $q(t)$ des Kondensators her. Benutzen Sie hierfür
$$i(t) = q'(t)$$
und die Maschenregel
$$Ri(t) + u_a(t) = u_e(t).$$
- Die DGL ist linear mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Da $u_e(t)$ eine beliebige Funktion sein kann, müssen Sie die DGL mit Variation der Konstanten $k(t)$ lösen.
- Zeigen Sie, dass
$$\int_{t_0}^{t} k'(\tau)d\tau$$
eine Stammfunktion von $k'(t)$ ist für beliebiges t_0. Zeigen Sie, dass hiermit für die allgemeine Lösung der DGL gilt
$$q(t) \quad = \quad \int_{t_0}^{t} \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$
- Um zu einer eindeutigen Lösung für $q(t)$ zu kommen, sei nun angenommen, dass der Kondensator zum Zeitpunkt $t = -\infty$ entladen ist. Zeigen Sie, dass damit gilt
$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t} u_e(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$
Leiten Sie hieraus die o.g. Funktion $g(t)$ ab so dass
$$u_a = u_e * g.$$

- Sei nun
$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$
Berechnen Sie $u_a(t)$ durch Faltung. Stellen Sie dabei die Cosinus Funktion als Realteil einer komplexen e-Funktion dar. Das Integral kann vereinfacht werden, wenn man ausnutzt, dass
$$\int \mathrm{re}(f(\tau))d\tau \quad = \quad \mathrm{re}\left(\int f(\tau)d\tau\right).$$
Überlegen Sie sich, wie die Funktion vereinfacht werden kann, wenn t groß ist, d.h. wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis, mit dem was Sie erhalten würden, wenn Sie das Problem mit komplexer Wechselstromrechnung gelöst hätten. Erklären Sie, weshalb die Schaltung als Tiefpass bezeichnet wird.

Lösung von Aufgabe 12.

- Aus
$$u_a(t) = \frac{q(t)}{C}$$
und den gegebenen Gleichungen folgt
$$\begin{aligned} Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) &= u_e(t) \text{ bzw.} \\ q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) &= \frac{u_e(t)}{R}. \end{aligned}$$

- Lösen der homogenen DGL
$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) \quad = \quad 0.$$
Ansatz $q(t) = e^{\lambda t}$ ergibt
$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{RC}e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda + \frac{1}{RC} &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{RC} \end{aligned}$$
und damit
$$q(t) = ke^{-t/RC}$$
für beliebiges k. Variation der Konstanten ergibt
$$\begin{aligned} q(t) &= k(t)e^{-t/RC} \\ q'(t) &= k'(t)e^{-t/RC} - \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL ergibt

$$\begin{aligned} k'(t)e^{-t/RC} - \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC} &= \frac{u_e(t)}{R} \\ k'(t)e^{-t/RC} &= \frac{u_e(t)}{R} \\ k'(t) &= \frac{u_e(t)}{R}e^{t/RC}. \end{aligned}$$

- Zu zeigen ist, dass

$$\left(\int_{t_0}^{t} k'(\tau)d\tau\right)' = k'(t)$$

für beliebiges t_0. Sei $k(t)$ eine Stammfunktion von $k'(t)$. Dann ist

$$\int_{t_0}^{t} k'(\tau)d\tau = k(t) - k(t_0).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{t} k'(\tau)d\tau\right)' &= (k(t) - k(t_0))' \\ &= k'(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{u_e(\tau)}{R}e^{\tau/RC}d\tau\ e^{-t/RC} \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{u_e(\tau)}{R}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau. \end{aligned}$$

- Da $q(-\infty) = 0$, folgt

$$\int_{t_0}^{-\infty} \frac{u_e(\tau)}{R}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau = 0$$

und damit

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{u_e(\tau)}{R}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau.$$

Da

$$u_a(t) = \frac{q(t)}{C}$$

folgt

$$u_a(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_e(\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau.$$

Damit auch die Obergrenze ∞ gesetzt werden kann, muss sichergestellt werden, dass der Integrand Null wird, sobald $\tau > t$ ist. Dies erreicht man durch einen Faktor $\sigma(t-\tau)$ und erhält

$$u_a(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau)\sigma(t-\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau.$$

Damit ist

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

wobei

$$g(t-\tau) = \frac{1}{RC}\sigma(t-\tau)e^{-(t-\tau)/RC}$$

bzw.

$$g(t) = \frac{1}{RC}\sigma(t)e^{-t/RC}.$$

- Sei

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
u_a(t) &= (u_e * g)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau)\frac{1}{RC}\sigma(t-\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\int_0^t \cos(\omega\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\mathrm{re}\left(\int_0^t e^{j\omega\tau}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{RC}\mathrm{re}\left(e^{-t/RC}\int_0^t e^{(j\omega+1/RC)\tau}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{RC}\mathrm{re}\left(e^{-t/RC}\frac{1}{j\omega+1/RC}[e^{(j\omega+1/RC)\tau}]_0^t\right) \\
&= \mathrm{re}\left(e^{-t/RC}\frac{1}{jRC\omega+1}(e^{(j\omega+1/RC)t}-1)\right) \\
&= \mathrm{re}\left(e^{-t/RC}\frac{1}{jRC\omega+1}(e^{j\omega t}e^{t/RC}-1)\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1}{jRC\omega+1}(e^{j\omega t}-e^{-t/RC})\right) \\
&= \frac{1}{(RC\omega)^2+1}\mathrm{re}\left((-jRC\omega+1)(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)-e^{-t/RC})\right) \\
&= \frac{1}{(RC\omega)^2+1}\left(\cos(\omega t)-e^{-t/RC}+RC\omega\sin(\omega t)\right)
\end{aligned}$$

Für große Werte von t ist

$$e^{-t/RC} \approx 0$$

und damit ist näherungsweise

$$u_a(t) = \frac{1}{(RC\omega)^2 + 1} \left(\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)\right).$$

Dieses Ergebnis hätte man auch mit komplexer Wechselstromrechnung erhalten, da hier das System bereits im eingeschwungenen Zustand betrachtet wird:

$$\begin{aligned}
u_e(t) &= e^{j\omega t} \\
R_C &= \frac{1}{j\omega C} \\
i(t) &= \frac{u_e(t)}{R + R_C} \\
u_a(t) &= R_C i(t) \\
&= u_e(t) \frac{R_C}{R + R_C} \\
&= \frac{e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega} \\
&= \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))(1 - jRC\omega)
\end{aligned}$$

Der Realteil hiervon ist

$$u_a(t) = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t))$$

Für tiefe Frequenzen, d.h. ω sehr klein gilt $RC\omega \approx 0$ und damit

$$\begin{aligned}
u_a(t) &= \cos(\omega t) \\
&= u_e(t).
\end{aligned}$$

Für hohe Frequenzen, d.h ω groß gilt

$$u_a(t) \approx 0.$$

Aufgabe 13. LTI Systeme verhalten sich besonders einfach, wenn das Eingangssignal eine harmonische Schwingung ist. In diesem Fall ist auch das Ausgangssignal eine harmonische Schwingung mit gleicher Kreisfrequenz. In dieser Aufgabe soll dies anhand einer einfachen, komplexen Schwingung gezeigt werden: Sei

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

und S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f) = zf$$

wobei z eine Konstante ist, d.h. nicht von t abhängt.

Die komplexe Schwingung $f(t) = e^{j\omega t}$ wird durch das System S also nur um $|z|$ verstärkt und um $\sphericalangle z$ phasenverschoben. Berechnen Sie z anhand der Impulsantwort g des Systems S.

Da z von ω abhängt, ist z eine Funktion von ω. Diese Funktion $G(\omega)$ heißt Übertragungsfunktion des LTI Systems. Später werden wir zeigen, dass $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ ist.

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned}
[S(f)](t) &= (f * g)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau \\
&= e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau.}_{z}
\end{aligned}$$

Mit

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau.$$

gilt somit

$$S(f) = zf.$$

Aufgabe 14. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f') = [S(f)]'.$$

Die Ableitung des Eingangssignals eines LTI Systems bewirkt daher immer die Ableitung des Ausgangssignals. Sie dürfen hierbei voraussetzen, dass f und $S(f)$ differenzierbar sind.

Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Weisen:

- Indem Sie die Rechengesetze der Faltung nutzen.
- Auf dem anderen Weg brauchen Sie die Definition der Ableitung:

  $$f'(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}.$$

  Mit der Abkürzung

  $$f_{\hat{t}}(t) = f(t-\hat{t})$$

  gilt somit

  $$f'(t) = \frac{f_{-dt}(t) - f(t)}{dt} \quad \text{für alle } t$$

bzw. kürzer

$$f' = \frac{f_{-dt} - f}{dt}.$$

In dieser Darstellung können Sie die Linearität und Zeitinvarianz von S anwenden.

Lösung von Aufgabe 14. Sei g die Impulsantwort von S, d.h.

$$S(f) = f * g \quad \text{für alle } f.$$

- Mit den Rechengesetzen der Faltung gilt

$$\begin{aligned} S(f') &= f' * g \\ &= (f * g)' \\ &= S(f)'. \end{aligned}$$

- Da S LTI ist, gilt

$$\begin{aligned} S(f') &= S\left(\frac{f_{-dt} - f}{dt}\right) \\ &= \frac{S(f_{-dt}) - S(f)}{dt} \\ &= \frac{S(f)_{-dt} - S(f)}{dt} \\ &= [S(f)]' \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei f eine T-periodische Funktion mit gegebenen Fourier Koeffizienten z_k. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ der Funktion $f_{\hat{t}}$.

Der Index $\hat{t}$ bedeutet Verschiebung einer Funktion um $\hat{t}$, d.h.

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}).$$

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f_{\hat{t}}(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\hat{t}) e^{-jk\omega t} dt. \end{aligned}$$

Substitution

$$u = t - \hat{t}, \quad \frac{du}{dt} = 1, \quad dt = du.$$

Damit ist das Integral

$$\frac{1}{T}\int_{-\hat{t}}^{T-\hat{t}} f(u) e^{-jk\omega(u+\hat{t})} du = e^{-jk\omega\hat{t}} \frac{1}{T}\int_{-\hat{t}}^{T-\hat{t}} f(u) e^{-jk\omega u} du.$$

Da der Integrand T-periodisch ist, ist dies gleich

$$e^{-jk\omega\hat{t}}\frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-jk\omega u}du \quad = \quad e^{-jk\omega\hat{t}}z_k.$$

Damit ist

$$\tilde{z}_k \quad = \quad e^{-jk\omega\hat{t}}z_k.$$

Aufgabe 16. Die 2-periodische Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) \quad = \quad 1 + e^t$$

falls $0 \leq t < 2$ und $f(t+2) = f(t)$ für alle t.

Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 16. Mit $T = 2$ und $\omega = \pi$ gilt

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (1+e^t)e^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-jk\pi t}dt + \frac{1}{2}\int_0^2 e^t e^{-jk\pi t}dt.
\end{aligned}$$

Berechnung der Teilintegrale. Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-jk\pi t}dt &= \frac{1}{-jk\pi}[e^{-jk\pi t}]_0^2 \\
&= \frac{1}{-jk\pi}(e^{-2\pi jk} - 1) \\
&= 0 \\
\int_0^2 e^t e^{-jk\pi t}dt &= \int_0^2 e^{(1-jk\pi)t}dt \\
&= \frac{1}{1-jk\pi}[e^{(1-jk\pi)t}]_0^2 \\
&= \frac{1}{1-jk\pi}(e^{(2-2jk\pi)} - 1) \\
&= \frac{1}{1-jk\pi}(e^2 - 1)
\end{aligned}$$

Damit ist

$$z_k \quad = \quad \frac{1}{2-2jk\pi}(e^2-1), \quad k \neq 0.$$

Für $k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (1+e^t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t+e^t\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\big(2+e^2-1\big) \\ &= \frac{1+e^2}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Die 2-periodische Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) = \delta(t-1) \qquad \text{für } 0 \le t < 2$$

und

$$f(t+2) = f(t) \qquad \text{für alle } t.$$

Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$ und berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten z_k von $f(t)$.

Lösung von Aufgabe 17. Die Funktion $f(t)$ ist ein Impulszug mit Impulsen bei ungeraden, ganzzahligen t. Mit

$$T = 2, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

gilt

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \delta(t-1)e^{-jk\pi t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \delta(t-1)e^{-jk\pi}dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-jk\pi}\int_0^2 \delta(t-1)dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-jk\pi}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Gegeben seien die komplexen Fourier Koeffizienten z_k einer unbekannten, T-periodischen Funktion $f(t)$. Berechnen Sie hieraus die komplexen Fourier Koeffizienten u_k von $f'(t)$, d.h.

$$u_k = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-jk\omega t}dt, \qquad \omega = 2\pi/T$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 18. Man kann die Aufgabe auf zwei Weisen lösen.

- Aus

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}$$

erhält man durch Ableiten

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{z_k jk\omega}_{u_k} e^{jk\omega t}.$$

Damit ist

$$u_k = z_k jk\omega.$$

- Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-jk\omega t}dt &= \frac{1}{T}\left[f(t)e^{-jk\omega t}\right]_0^T + jk\omega\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\left(f(T)e^{-jk\omega T} - f(0)e^0\right) + jk\omega z_k. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} f(T) &= f(0) \\ \omega T &= 2\pi \\ e^{-jk\omega T} &= e^{-jk\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ist

$$f(T)e^{-jk\omega T} - f(0)e^0 = 0$$

und

$$u_k = jk\omega z_k.$$