Heilbronn, den 12.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2x).$$

Lösung von Aufgabe 1. Lösung mit komplexen e-Funktionen.

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right).$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$y'' + 2y' + 5y = e^{j2x}.$$

  Ansatz

  $$\begin{aligned} y &= ce^{j2x} \\ y' &= j2ce^{j2x} \\ y'' &= -4ce^{j2x} \end{aligned}$$

  Einsetzen und Kürzen mit e^{j2x}

  $$\begin{aligned} -4c + 4jc + 5c &= 1 \\ c(1+4j) &= 1 \\ c &= \frac{1}{1+4j}. \end{aligned}$$

  Einsetzen in Ansatz:

  $$y_1 = \frac{1}{1+4j} e^{j2x}.$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$y'' + 2y' + 5y = e^{-j2x}.$$

  Lösung

  $$y_2 = \overline{y_1}.$$

- Partikuläre Lösung der DGL

  $$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(y_1 + \overline{y_1}) \\ &= \mathrm{re}(y_1) \\ &= \mathrm{re}\left(\frac{1-4j}{17}(\cos(2x) + j\sin(2x))\right) \\ &= \frac{1}{17}(\cos(2x) + 4\sin(2x)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die Übertragungsfunktion $G(z)$ eines rekursiven Filters habe einen reellen Pol bei $z = 0$, ein konjugiert komplexes Polpaar bei $z = \pm j$ und sonst keine weiteren Nullstellen oder Pole. Berechnen Sie seine Impulsantwort und die Filterkoeffizienten b_i, a_i. (Der Verstärkungsfaktor des Filters sei 1.)

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z(z-j)(z+j)} \\ &= \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-j} + \frac{c_3}{z+j} \\ 1 &= c_1(z^2+1) + c_2 z(z+j) + c_3 z(z-j) \end{aligned}$$

Spezialfall $z = 0$

$$c_1 = 1$$

Spezialfall $z = j$

$$\begin{aligned} 1 &= -2c_2 \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Spezialfall $z = -j$

$$\begin{aligned} 1 &= c_3(-j)(-2j) \\ &= -2 \\ c_3 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{z+j}\right) \\ &= z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-1}\left(\frac{z}{z-j} + \frac{z}{z+j}\right) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \delta_{k-1} - \frac{1}{2}\sigma_{k-1}(j^{k-1} + (-j)^{k-1}) \\ &= \delta_{k-1} - \frac{1}{2}\sigma_{k-1} 2\mathrm{re}(j^{k-1}) \\ &= \delta_{k-1} - \sigma_{k-1}\mathrm{re}(j^{-1} j^k) \\ &= \delta_{k-1} - \sigma_{k-1}\mathrm{im}(j^k) \\ &= \delta_{k-1} - \mathrm{im}(j^k) \\ &= \langle 0, 1, 0, 0, \ldots\rangle - \langle 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\rangle \\ &= \langle 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots\rangle \end{aligned}$$

Um die Filterkoeffizienten zu erhalten, muss man den Nenner ausmultiplizieren.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{z^3+z} \\ &= \frac{z^{-3}}{1+z^{-2}}. \end{aligned}$$

Damit sind die Filterkoeffizienten

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0,\ b_3 = 1\ a_1 = 0, a_2 = -1.$$

Aufgabe 3. Das Ausgangssignal h_k eines digitalen Filters sei der Mittelwert von zwei aufeinanderfolgenden Abtastwerten des Eingangssiganals f_k, d.h.

$$h_k = \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1}).$$

Offensichtlich wird durch diesen Filter das Signal f_k geglättet, d.h. der Filter hat Tiefpasscharakteristik. Sei nun

$$f_k = e^{j\hat{\omega}k}$$

eine komplexe Schwingung mit normierter Frequenz $0 \leq \hat{\omega} < \pi$.

- Zeigen Sie, dass h_k eine komplexe Schwingung ist mit gleicher Frequenz $\hat{\omega}$ und berechnen Sie den Faktor $K(\hat{\omega})$ so dass

  $$h_k = K(\hat{\omega}) f_k.$$

  Dieser Faktor heißt Frequenzantwort des Filters. Berechen Sie diesen Faktor sowohl im Zeitbereich als auch mit Hilfe der z-Transformation und der Übertragungsfunktion des Filters.
- Zeigen Sie, dass $|K(\hat{\omega})|^2$ monoton fallend ist für $0 \leq \hat{\omega} < \pi$. Die Tiefpasscharakteristik zeigt sich somit darin, dass hohe Frequenzen stärker gedämpft werden als niedrige.

Lösung von Aufgabe 3. Frequenzantwort im Zeitbereich.

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{j\hat{\omega}k} + e^{j\hat{\omega}(k-1)}) \\ &= \frac{1}{2}e^{j\hat{\omega}k}(1 + e^{-j\hat{\omega}}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(1 + e^{-j\hat{\omega}})}_{K(\hat{\omega})} f_k \end{aligned}$$

Impulsantwort.

$$g_k = \frac{1}{2}(\delta_k + \delta_{k-1}).$$

Übertragungsfunktion.

$$G(z) \quad = \quad \frac{1}{2}(1 + z^{-1}).$$

Frequenzantwort mit z-Transformation.

$$\begin{aligned} G(e^{j\hat{\omega}}) &= \frac{1}{2}\Big(1 + \left(e^{j\hat{\omega}}\right)^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\hat{\omega}}\right) \\ &= K(\hat{\omega}). \end{aligned}$$

Tiefpasscharakteristik.

$$\begin{aligned} |K(\hat{\omega})|^2 &= \frac{1}{4}|1 + e^{-j\hat{\omega}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|1 + \cos(\hat{\omega}) - j\sin(\hat{\omega})|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2\cos(\hat{\omega}) + \cos^2(\hat{\omega}) + \sin^2(\hat{\omega})) \\ &= \frac{1}{4}(2 + 2\cos(\hat{\omega})) \\ &= \frac{1 + \cos(\hat{\omega})}{2} \\ \frac{d}{d\hat{\omega}}|K(\hat{\omega})|^2 &= \frac{d}{d\hat{\omega}}\frac{1 + \cos(\hat{\omega})}{2} \\ &= -\frac{\sin(\hat{\omega})}{2} \\ &\leq 0 \text{ für } 0 \leq \hat{\omega} < \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Das Verhalten eines LTI Systems S ist besonders interessant, wenn das Eingangssignal f eine harmonische Schwingung ist. In diesem Fall ist das Ausgangssignal $S(f)$ ebenfalls eine harmonische Schwingung und zwar mit gleicher Frequenz wie f. Das System ändert allenfalls die Amplitude und die Phase.

Praktisch lässt sich dies am Beispiel der Raumakustik leicht sehen: Strahlt der Sender einen 900Hz Ton ab, kommt auch beim Empfänger ein 900Hz Ton an. Bei der Übertragung durch den Raum ändert sich die Tonhöhe nicht. Lediglich bei sehr hoher Amplitude kann es sein, dass ein Fenster zerbricht und klirrt – das ist dann allerdings ein nichtlinearer Effekt.

Berechnet werden soll nun die Amplituden- und Phasenänderung in Abhängigkeit von der Frequenz ω durch das System sowohl im analogen als auch im diskreten Fall.

- Sei S ein analoges LTI System mit Impulsantwort $g(t)$ und

$$f(t) \quad = \quad e^{j\omega t}.$$

Zeigen Sie, dass

$$[S(f)]\,(t) \quad = \quad z(\omega)f(t)$$

wobei $z(\omega)$ eine Konstante, d.h. von t unabhängig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $z(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems ist, d.h.

$$z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt.$$

- Sei S ein diskretes LTI Sytem mit Impulsantwort g_k und

$$f_k = e^{j\omega k}.$$

Zeigen Sie, dass

$$[S(f)]_k = z(\omega)f_k$$

wobei $z(\omega)$ eine Konstante, d.h. von k unabhängig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $z(\omega)$ die sog. zeitdiskrete Fourier Transformierte der Impulsantwort g_k des Systems ist, d.h.

$$z(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-j\omega k}.$$

Zeigen Sie, dass

$$z(\omega) = G(e^{j\omega})$$

gilt, wobei $G(z)$ die z-Transformierte der Impulsantwort g_k ist.

Lösung von Aufgabe 4.

- Sei S ein analoges LTI System mit Impulsantwort $g(t)$ und

$$f(t) = e^{j\omega t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
[S(f)](t) &= (f * g)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}g(\tau)d\tau \\
&= e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{z(\omega)} \\
&= f(t)z(\omega)
\end{aligned}$$

wobei $z(\omega)$ die Fourier Transformierte von $g(t)$ ist.

- Sei S ein diskretes LTI Sytem mit Impulsantwort g_k und

$$f_k = e^{j\omega k}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
[S(f)]_k &= (f * g)(t) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell f_{k-\ell} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell e^{j\omega(k-\ell)} \\
&= e^{j\omega k} \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell e^{-j\omega\ell}}_{z(\omega)} \\
&= f_k z(\omega)
\end{aligned}$$

wobei $z(\omega)$ die zeitdiskrete Fourier Transformierte von g_k ist.
Sei

$$G(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_k z^{-k}$$

die z-Transformierte von g_k. Ersetzt man auf beiden Seiten z durch $e^{j\omega}$ erhält man

$$\begin{aligned}
G(e^{j\omega}) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_k \left(e^{j\omega}\right)^{-k} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_k e^{-j\omega k} \\
&= z(\omega).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

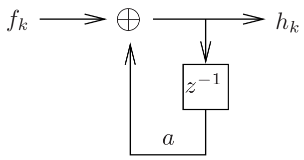
$$\binom{n-1}{k-1}\frac{n-k}{k} = \binom{n-1}{k}.$$

Lösung von Aufgabe 6.

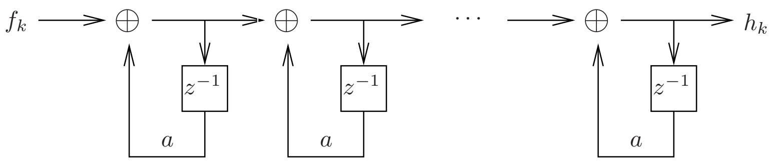
$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}\frac{n-k}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\frac{n-k}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n-k}{k} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \binom{n-1}{k}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.

- Berechnen Sie von folgendem Filter die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort.



- Der Filter wird nun zwei Mal hintereinandergeschaltet. Berechnen Sie dessen Impulsantwort, indem sie die oben berechnete Impulsantwort mit sich selbst falten.
- Der Filter wird nun n-Mal hintereinandergeschaltet:



Berechnen Sie mit Hilfe der oben berechneten Übertragungsfunktion auch von diesem Filter die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort. Nutzen Sie für die inverse z-Transformation die Korrespondenz

$$\frac{1}{(z-a)^n} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad a^{k-n}\binom{k-1}{n-1}$$

sowie den Verschiebungssatz

$$z^{-m}F(z) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_{k-m},$$

der hier für negative m angwandt werden muss.

Verfizieren Sie die so berechnete Impulsantwort für beliebiges n mit der in den vorigen Teilaufgaben berechneten Impulsantwort im Spezialfall $n = 1$ und $n = 2$.

Lösung von Aufgabe 7.

- Für den Filter gilt

$$\begin{aligned} h_k &= f_k + a h_{k-1} \\ h_k - a h_{k-1} &= f_k. \end{aligned}$$

Mit der z-Transformation gilt

$$H(z)(1 - az^{-1}) = F(z).$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{H(z)}{F(z)} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-a}. \end{aligned}$$

Die Impulsantwort ist damit

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-a} &\circ\!\!-\!\!\bullet \sigma_k a^k \\ &= g_k. \end{aligned}$$

- Faltung von g_k mit sich selbst ergibt

$$\begin{aligned} (g * g)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_\ell a^\ell \sigma_{k-\ell} a^{k-\ell} \\ &= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} a^\ell a^{k-\ell} \\ &= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} a^k \\ &= \sigma_k (k+1) a^k. \end{aligned}$$

- Die Übertragungsfunktion des zusammengesetzten Systems ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(\frac{z}{z-a} \right)^n \\ &= z^n \frac{1}{(z-a)^n}. \end{aligned}$$

Mit

$$F(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

gilt

$$f_k = a^{k-n} \binom{k-1}{n-1}.$$

Aus dem Verschiebungssatz folgt für $m = -n$

$$z^n F(z) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_{k+n}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
G(z) &= z^n F(z) \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\ f_{k+n} \\
&= a^{(k+n)-n} \binom{(k+n)-1}{n-1} \\
&= a^k \binom{k+n-1}{n-1} \\
&= g_k.
\end{aligned}$$

Für $n = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
g_k &= a^k \binom{k}{0} \\
&= \sigma_k a^k.
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ erhält man

$$\begin{aligned}
g_k &= a^k \binom{k+1}{1} \\
&= a^k \sigma_k \frac{(k+1)!}{1!k!} \\
&= \sigma_k (k+1) a^k.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Bei einem rekursiven Filter kann es vorkommen, dass sich das System aufgrund der Rückkopplung "aufschwingt". Dieses Verhalten ist natürlich nicht erwünscht.

Berechnen Sie die Impulsantworten g_k der folgenden Systeme für $k = 0, 1, \ldots, 8$:

$$\begin{aligned}
h_k &= f_k + h_{k-1} + h_{k-2} \\
h_k &= f_k + h_{k-1} - h_{k-2} \\
h_k &= f_k + h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-2}
\end{aligned}$$

Sei nun allgemein ein System mit Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

gegeben wobei der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Weiterhin sei vereinfachend angenommen, dass das Nennerpolynom nur einfache (komplexe) Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat. Damit erhält man die Partialbruchzerlegung

$$G(z) = c_1 \frac{1}{z - \alpha_1} + c_2 \frac{1}{z - \alpha_2} + \ldots + c_n \frac{1}{z - \alpha_n}.$$

Berechnen Sie hieraus die Impulsantwort g_k und zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} g_k = 0$$

genau dann wenn $|\alpha_i| < 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion müssen also innerhalb des Einheitskreises in der komplexen Ebene liegen. Systeme mit dieser Eigenschaft nennt man stabil.

Prüfen Sie dann von den 3 o.g. Systemen, ob diese stabil sind.

Lösung von Aufgabe 8.

- Für

  $$h_k = f_k + h_{k-1} + h_{k-2}$$

  erhält man die Impulsantwort

  $$g_k = \langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \rangle$$

- Für

  $$h_k = f_k + h_{k-1} - h_{k-2}$$

  erhält man die Impulsantwort

  $$g_k = \langle 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \ldots \rangle$$

- Für

  $$h_k = f_k + h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-2}$$

  erhält man die Impulsantwort

  $$g_k = \left\langle 1, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \ldots \right\rangle$$

Für

$$\begin{aligned} G(z) &= c_1 \frac{1}{z - \alpha_1} + c_2 \frac{1}{z - \alpha_2} + \ldots + c_n \frac{1}{z - \alpha_n} \\ &= z^{-1} \left(c_1 \frac{z}{z - \alpha_1} + c_2 \frac{z}{z - \alpha_2} + \ldots + c_n \frac{z}{z - \alpha_n} \right) \end{aligned}$$

ist

$$g_k = \sigma_{k-1} \big(c_1 \alpha_1^{k-1} + c_2 \alpha_2^{k-1} + \ldots + c_n \alpha_n^{k-1} \big).$$

Da

$$\lim_{k\to\infty} |\alpha^{k-1}| \to 0$$

genau dann wenn $|\alpha| < 1$ gilt, folgt

$$\lim_{k\to\infty} g_k \to 0$$

genau dann wenn für alle Nullstellen α_i, $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$|\alpha_i| < 1.$$

- Für

$$h_k = f_k + h_{k-1} + h_{k-2}$$

ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1}. \end{aligned}$$

Das Nennerpolynom hat die Nullstellen

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

mit

$$|z_1| = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} > 1.$$

Folglich ist das System instabil.

- Für

$$h_k = f_k + h_{k-1} - h_{k-2}$$

ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - z + 1}. \end{aligned}$$

Das Nennerpolynom hat die Nullstellen

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

mit

$$|z_{1,2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Auch hier geht die Impulsantwort nicht asymptotisch gegen Null.

- Für

$$h_k = f_k + h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-2}$$

ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - z + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Das Nennerpolynom hat die Nullstellen

$$z_{1,2} \quad = \quad \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2}$$

mit

$$|z_{1,2}| \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;<\; 1.$$

Das System ist stabil.

Aufgabe 9. Für $n, k \in \mathbb{Z}$ sind die Binomialkoeffizienten definiert durch

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter anderem treten diese Koeffizienten bei den Binomischen Formeln auf:

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Interessanterweise treten diese auch bei der Verallgemeinerung der Produktregel auf höhere Ableitungen auf:

$$(f(x)g(x))^{(n)} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

- Verifizieren Sie dies für $n = 1, 2, 3$.
- Berechnen Sie die 100-ste Ableitung von $x^2 \sin(x)$.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
(fg)' &= fg' + f'g \\
(fg)'' &= (fg' + f'g)' \\
&= fg'' + f'g' + f'g' + f''g \\
&= fg'' + 2f'g' + f''g \\
(fg)''' &= (fg'' + 2f'g' + f''g)' \\
&= fg''' + f'g'' + 2f'g'' + 2f''g' + f''g' + f'''g \\
&= fg''' + 3f'g'' + 3f''g' + f'''g.
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= x^2 \\
g(t) &= \sin(x).
\end{aligned}$$

Die ersten Ableitungen von $f(x)$ sind

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x^2 \\
f^{(1)}(x) &= 2x \\
f^{(2)}(x) &= 2 \\
f^{(k)}(x) &= 0 \text{ für } k > 2\ .
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen von $g(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
g^{(100)}(x) &= \sin(x) \\
g^{(99)}(x) &= -\cos(x) \\
g^{(98)}(x) &= -\sin(x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(100)} &= \sum_{k=0}^{100} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{100}{0} x^2 \sin(x) + \binom{100}{1} 2x(-\cos(x)) + \binom{100}{2} 2(-\sin(x)) \\
&= x^2 \sin(x) - 200x\cos(x) - 9900\sin(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Dies ist übrigens genau das Gesetz, nachdem das Pascal Dreieck konstruiert wird, wobei n die Zeile und k die Spalte ist.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!k}{k!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1 + \frac{k}{n-k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{n-k+1+k}{n-k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{n+1}{n-k+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

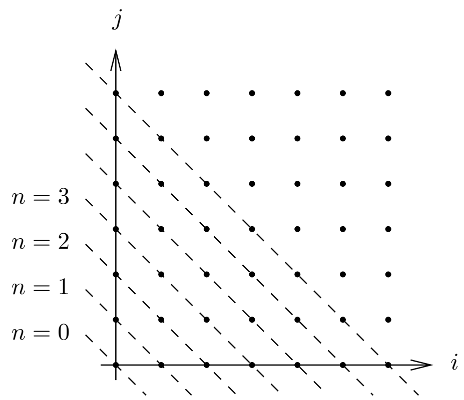
Aufgabe 11. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Mit der Taylor Reihe der e-Funktion gilt

$$e^x e^y \quad = \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Anstatt zeilenweise über alle Punkte $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ zu summieren, kann man dies auch in Diagonalen tun:



Man erhält damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=n}}^{\infty} \frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Die inneren Summe läuft über eine Diagonale, d.h. alle Punkte $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ mit

$$i + j \quad = \quad n$$

bzw.

$$j \quad = \quad n - i.$$

Beachten Sie, dass diese Diagonale nur $n+1$ Punkte enthält.

Formen Sie diesen Term unter Verwendung der allgemeinen Binomischen Formel

$$(x+y)^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

weiter um bis Sie die Taylor Reihe von e^{x+y} erhalten.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^i y^j}{i!j!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=n}}^{\infty}\frac{x^i y^j}{i!j!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i y^{n-i}}{i!(n-i)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{i!(n-i)!}x^i y^{n-i}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n\\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^{k} f_\ell = (f*\sigma)_k.$$

Lösung von Aufgabe 12. Da $\sigma_{k-\ell}=0$ für $\ell>k$ gilt

$$\begin{aligned}
(f*\sigma)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell\sigma_{k-\ell}\\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{k} f_\ell.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei $n\in\mathbb{N}_0$ beliebig. Zeigen Sie durch Induktion über k, dass für alle $k\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

Lösung von Aufgabe 13.

- Induktionsanfang. Für $k = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} &= \binom{0+n}{n} \\
&= 1 \\
&= \binom{n+1}{n+1} \\
&= \binom{k+n+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

- Induktionsannahme. Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

- Induktionsschluss. Zu zeigen: Für dieses k gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+2}{n+1}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{\ell+n}{n} &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} + \binom{k+1+n}{n} \\
&= \binom{k+n+1}{n+1} + \binom{k+n+1}{n} \\
&= \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!k!} + \frac{(k+n+1)!}{n!(k+1)!} \\
&= (k+1)\frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} + (n+1)\frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\
&= (k+n+2)\frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\
&= \frac{(k+n+2)!}{(n+1)!(k+1)!} \\
&= \binom{k+n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1\mathrm{mal}})_k = \binom{k+n}{n}.$$

Führen Sie den Beweis einmal mit z-Transformation unter Verwendung des Faltungssatzes, des Verschiebungssatzes und der Korrespondenz

$$a^{k-n}\binom{k-1}{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(z-a)^n}$$

und einmal mit Induktion. Sie dürfen hierbei die Formel

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

verwenden.

Lösung von Aufgabe 14. Beweis mit z-Transformation.

$$\begin{aligned}
(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1\mathrm{mal}})_k \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1} \\
&= \quad z^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \left(1^{k-(n+1)}\binom{k-1}{n}\right)_{.+n+1} \\
&= \quad 1^k\binom{k+n}{n} \\
&= \quad \binom{k+n}{n}.
\end{aligned}$$

Beweis mit Induktion.

- Induktionsanfang. Für $n=1$ gilt

$$\begin{aligned}
(\sigma * \sigma)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{k} \sigma_\ell \sigma_{k-\ell} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k+1\mathrm{Summanden}} = \sigma_k(k+1) \\
&= \binom{k+1}{1}.
\end{aligned}$$

- Induktionsannahme. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1\mathrm{mal}})_k = \binom{k+n}{n}.$$

- Induktionsschritt. Zu zeigen: Für dieses n gilt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+2\mathrm{mal}})_k = \binom{k+n+1}{n+1}.$$

  Unter Verwendung der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned}
(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+2\mathrm{mal}})_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{k} (\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1\mathrm{mal}})_\ell \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{k} \binom{\ell+n}{n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} \\
&= \binom{k+n+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Eine einfache Möglichkeit, ein Signal f_k zu glätten besteht durch rekursive Filterung mit

$$h_k = \alpha h_{k-1} + (1-\alpha) f_k.$$

Betrachtet man Werte für α zwischen Null und Eins, ist anschaulich klar, dass ein großer Wert von α zu einer stärkeren Glättung führt als ein kleinerer. Die Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ sind uninteressant und können ausgeschlossen werden.

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Filters.
- Für welche Werte von α ist der Filter stabil?
- Berechnen Sie die Frequenzantwort $G(e^{j\hat{\omega}})$. Hierbei ist

  $$\hat{\omega} = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

  wobei ω_s die Abtastfrequenz und ω die Signalfrequenz ist. Aufgrund des Abtasttheorems ist somit

  $$-\pi < \hat{\omega} < \pi.$$

- Berechnen Sie den quadrierten Amplitudengang

  $$u(\hat{\omega}) = |G(e^{j\hat{\omega}})|^2$$

  und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
- Der Faktor $u(\hat{\omega})$ gibt an, wie stark eine Schwingung mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ von dem Filter verstärkt wird. Der Filter hat Tiefpasscharakteristik, wenn $u(\hat{\omega})$ fällt für $0 \leq \hat{\omega} < \pi$ und Hochpasscharakteristik, wenn $u(\hat{\omega})$ steigt. Für welche Werte von α hat der Filter Tiefpass- bzw. Hochpasscharakteristik?

Lösung von Aufgabe 15.

- $$\begin{aligned} H(z) &= \alpha z^{-1} H(z) + (1-\alpha) F(z) \\ H(z)(1-\alpha z^{-1}) &= (1-\alpha) F(z) \\ H(z) &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} F(z). \end{aligned}$$

  Damit ist die Übertragungsfunktion

  $$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \\ &= (1-\alpha) \frac{z}{z-\alpha}. \end{aligned}$$

- Der Filter ist stabil, wenn der Betrag von allen Polen der Übertragungsfunktion kleiner als Eins ist. Die Übertragungsfunktion hat einen Pol bei $z = \alpha$. Damit ist der Filter stabil wenn $|\alpha| < 1$.

- Frequenzantwort.

$$G(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{(1-\alpha)e^{j\hat{\omega}}}{e^{j\hat{\omega}}-\alpha}$$

- Quadrierter Amplitudengang.

$$\begin{aligned} u(\hat{\omega}) &= |G(e^{j\hat{\omega}})|^2 \\ &= (1-\alpha)^2 \frac{1}{|e^{j\hat{\omega}}-\alpha|^2} \\ &= (1-\alpha)^2 \frac{1}{(\cos(\hat{\omega})-\alpha)^2+\sin^2(\hat{\omega})} \\ &= (1-\alpha)^2 \frac{1}{\cos^2(\hat{\omega})+\alpha^2-2\alpha\cos(\hat{\omega})+\sin^2(\hat{\omega})} \\ &= (1-\alpha)^2 \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\hat{\omega})}. \end{aligned}$$

- Ableitung von $u(\hat{\omega})$.

$$\begin{aligned} u'(\hat{\omega}) &= (1-\alpha)^2(-1)(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\hat{\omega}))^{-2}(2\alpha\sin(\hat{\omega})) \\ &= -2(1-\alpha)^2 \frac{\alpha\sin(\hat{\omega})}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\hat{\omega}))^2}. \end{aligned}$$

  Da

$$2(1-\alpha)^2 \frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\hat{\omega}))^2} > 0$$

  ist für das Vorzeichen von $u'(\hat{\omega})$ nur noch der Term

$$-\alpha\sin(\hat{\omega})$$

  relevant. Für $0 < \hat{\omega} < \pi$ ist $\sin(\hat{\omega}) > 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} u'(\hat{\omega}) < 0 & \qquad \text{falls } \alpha > 0 \text{ und} \\ u'(\hat{\omega}) > 0 & \qquad \text{falls } \alpha < 0 \end{aligned}$$

  für alle $0 < \hat{\omega} < \pi$. Der Filter hat somit Tiefpasscharakteristik, wenn $\alpha > 0$ und Hochpasscharakteristik wenn $\alpha < 0$.

Aufgabe 16. Gegeben ist ein digitaler Filter mit Impulsantwort

$$g_k = \delta_k + \delta_{k-2}.$$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Filters.
- Ist der Filter kausal? Ist der Filter stabil?
- Mit welchem Faktor verstärkt dieser Filter die Amplitude einer komplexen Schwingung mit normierter Kreisfrequenz $\hat{\omega} = \pi/2$ bzw. $\hat{\omega} = 0$?
- Um welchen Winkel verschiebt der Filter die Phase eine Schwingung mit normierter Kreisfrequenz $\hat{\omega} = \pi/4$?

Lösung von Aufgabe 16.

$$G(z) \quad = \quad 1 + z^{-2} \quad = \quad \frac{z^2+1}{z^2}.$$

Der Filter ist kausal da $g_k = 0$ für $k < 0$. Der Filter ist stabil, da die einzige Polstelle $z = 0$ innerhalb des Einheitskreises liegt. Die Frequenzantwort ist

$$G(e^{j\hat{\omega}}) \quad = \quad \frac{e^{2j\hat{\omega}}+1}{e^{2j\hat{\omega}}}.$$

Für $\hat{\omega} = \pi/2$ erhält man

$$|G(e^{j\pi/2})| \quad = \quad \frac{e^{j\pi}+1}{e^{j\pi}} \quad = \quad 0.$$

Für $\hat{\omega} = 0$ erhält man

$$|G(e^{j0})| \quad = \quad \frac{e^{j0}+1}{e^{j0}} \quad = \quad 2.$$

Für $\hat{\omega} = \pi/4$ erhält man

$$\begin{aligned} G(e^{j\pi/4}) \quad &= \quad \frac{e^{j\pi/2}+1}{e^{j\pi/2}} \quad = \quad \frac{1+j}{j} \quad = \quad 1-j \\ \sphericalangle G(e^{j\pi/4}) \quad &= \quad -\pi/4. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k \quad = \quad \sigma_{k-1}\, 4^{-k}\, k^2.$$

Lösung von Aufgabe 17. Es gilt

$$\sigma_{k-1}k^2 \quad = \quad \sigma_k k^2$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma_k k^2 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Aus der Korrespondenz

$$a^k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z/a)$$

folgt

$$\begin{aligned} 4^{-k} f_k \quad &= \quad \left(\frac{1}{4}\right)^k f_k \\ &= \quad F(4z). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{4z(4z+1)}{(4z-1)^3}.$$

Aufgabe 18. Berechnnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad \delta(t-1), \quad f(0) = 5$$

mit Hilfe der Laplace Transformation für $t \geq 0$. Hat die Lösungsfunktion an der Stelle $t = 0$ einen Sprung? Setzen Sie Ihre Lösungsfunktion in die DGL ein und verifzieren Sie das Ergebnis.

Lösung von Aufgabe 18. Sei

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ \sigma(t)f'(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) - f(0^-). \end{aligned}$$

Multipliziert man die DGL mit $\sigma(t)$ erhält man

$$\sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) \quad = \quad \delta(t-1).$$

Laplace Transformation auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0^-) + F(s) &= e^{-s} \\ F(s)(s+1) &= f(0^-) + e^{-s} \\ F(s) &= \frac{f(0^-)}{s+1} + e^{-s}\frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{s-a} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{at}$$

gilt im Spezialfall $a = -1$

$$\frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{-t}.$$

Mit der Linearität gilt

$$\frac{f(0^-)}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(0^-)\sigma(t)e^{-t}$$

Mit der Zeitverschiebung gilt

$$e^{-s}\frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)e^{-(t-1)}$$

Damit ist

$$\sigma(t)f(t) \quad = \quad f(0^-)\sigma(t)e^{-t} + \sigma(t-1)e^{-(t-1)}.$$

Für $t = 0$ erhält man hieraus

$$f(0) \quad = \quad f(0^-),$$

d.h. die Lösungsfunktion $f(t)$ hat an der Stelle $t = 0$ keinen Sprung und es gilt

$$\sigma(t)f(t) \quad = \quad 5\sigma(t)e^{-t} + \sigma(t-1)e^{-(t-1)}.$$

Für $t \geq 0$ gilt somit

$$f(t) = 5e^{-t} + \sigma(t-1)e^{-(t-1)}.$$

Verifikation.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -5e^{-t} - \sigma(t-1)e^{-(t-1)} + \delta(t-1)e^{-(t-1)} \\ &= -5e^{-t} - \sigma(t-1)e^{-(t-1)} + \delta(t-1). \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} f'(t) + f(t) &= -5e^{-t} - \sigma(t-1)e^{-(t-1)} + \delta(t-1) + 5e^{-t} + \sigma(t-1)e^{-(t-1)} \\ &= \delta(t-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Sei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$$

ein Impulszug. Da $p(t)$ periodisch ist, kann er durch eine Fourier Reihe dargestellt werden. Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k und zeigen Sie damit, dass

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt}.$$

Zeigen Sie mit dem Dämpfungssatz der Laplace Transformation, dass

$$f(t)p(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - 2\pi jk).$$

Lösung von Aufgabe 19. Die Fourier Koeffizienten einer T-periodischen Funktion $p(t)$ berechnen sich nach der Formel

$$z_k = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jk\omega t}dt.$$

In diesem Beispiel ist $T = 1$ und damit $\omega = 2\pi$. Da der Integrand T-periodisch ist und an der Stelle $t = 0$ und $t = T$ ein Impuls ist, bietet es sich an, nicht von 0 bis T zu integrieren sondern von $-T/2$ bis $T/2$. Damit erhält man unter Verwendung der Ausblendeigenschaft

$$\begin{aligned} z_k &= \int_{-1/2}^{1/2} p(t)e^{-2\pi jkt}dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)e^{-2\pi jkt}dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Fourier Reihe ist damit

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt}. \end{aligned}$$

Der Verschiebungssatz der Laplace Transfomation sagt

$$e^{-at} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a).$$

Mit

$$a = -2\pi jk$$

erhält man

$$e^{2\pi jkt} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s-2\pi jk).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(t)p(t) &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi jkt} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s-2\pi jk). \end{aligned}$$