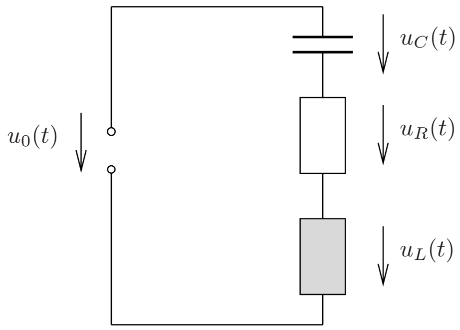
Heilbronn, den 19.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 11

Aufgabe 1. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$. Die Eingangsspannung sei

$$u_0(t) = \cos(\omega t).$$

Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für $q(t)$ in Abhängigkeit von ω. Warum tritt bei diesem System nie Resonanz auf?

Lösung von Aufgabe 1. Mit der Maschenregel gilt

$$q/C + Rq' + Lq'' = \cos(\omega t).$$

Reeller Ansatz

$$\begin{aligned} q &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ q' &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\ q'' &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \\ + \quad & R(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) \\ + \quad & L(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)) \\ = \quad & \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t)(A/C + B\omega R - A\omega^2 L) + \sin(\omega t)(B/C - A\omega R - B\omega^2 L) &= \cos(\omega t) \\
A/C + B\omega R - A\omega^2 L &= 1 \\
B/C - A\omega R - B\omega^2 L &= 0
\end{aligned}$$

Lösen

$$\begin{aligned}
A(1/C - \omega^2 L) + B\omega R &= 1 \\
B(1/C - \omega^2 L) - A\omega R &= 0
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$A = B(1/C - \omega^2 L)/(\omega R).$$

Einsetzen in erste Gleichung gibt

$$\begin{aligned}
B((1/C - \omega^2 L)^2/(\omega R) + \omega R) &= 1 \\
B((1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2) &= \omega R \\
B &= \frac{\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2} \\
A &= \frac{1/C - \omega^2 L}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}.
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man die Aufgabe auch mit dem komplexen Ansatz

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

lösen können. Für die rechte Seite

$$r_1(t) = e^{j\omega t}$$

ist der Ansatz

$$\begin{aligned}
q_1 &= ae^{j\omega t} \\
q_1' &= aj\omega e^{j\omega t} \\
q_1'' &= -a\omega^2 e^{j\omega t}.
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
1/Cae^{j\omega t} + Raj\omega e^{j\omega t} - La\omega^2 e^{j\omega t} &= e^{j\omega t} \\
a(1/C + j\omega R - \omega^2 L) &= 1 \\
a &= \frac{1}{1/C + j\omega R - \omega^2 L} \\
&= \frac{1/C - \omega^2 L - j\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}.
\end{aligned}$$

Lösung für rechte Seite $r_1(t)$ ist somit

$$q_1 = ae^{j\omega t}.$$

Für die rechte Seite

$$r_2(t) = e^{-j\omega t}$$

erhält man analog die Lösung

$$q_2 = \overline{q_1}.$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\
&= \mathrm{re}(q_1) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1/C - \omega^2 L - j\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\right) \\
&= \frac{1/C - \omega^2 L}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Damit Resonanz auftritt, muss $j\omega$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$L\lambda^2 + R\lambda + 1/C$$

sein. Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

Da $R \neq 0$ haben diese einen Realteil. Da ω reell ist, ist $j\omega$ rein imaginär und damit kann $j\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

ist ein Vektorraum. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

Lösung von Aufgabe 2. Das LGS ist bereits in Zeilenstufenform. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned}
x_4 &= \text{beliebig} \\
x_3 &= \text{beliebig} \\
x_2 &= -2x_3 - x_4 \\
x_1 &= -x_2 + x_4 \\
&= 2x_3 + 2x_4.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Eine Basis ist somit

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 3. Sei g eine T-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $f * g$ eine T-periodische Funktion ist für beliebiges f.

Wenn man sich f als akustisches Signal und g als Raumimpulsantwort vorstellt, ist anschaulich klar, dass wenn der Sender ein periodisches Signal abschickt, beim Empfänger ebenfalls ein periodisches Signal mit gleicher Periodendauer ankommen muss.

Lösung von Aufgabe 3. Sei g eine T-periodische Funktion, d.h.

$$g(t+T) = g(t) \qquad \text{für alle } t.$$

Sei f eine beliebige Funktion. Zu zeigen

$$(f * g)(t+T) = (f * g)(t) \qquad \text{für alle } t.$$

Es gilt

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

und folglich

$$(f * g)(t+T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t+T-\tau) d\tau.$$

Da g eine T-periodische Funktion ist, gilt

$$g(t+T-\tau) = g(t-\tau)$$

und folglich

$$\begin{aligned}(f * g)(t+T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= (f * g)(t).\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Gegeben sei die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1h'(t) + a_0h(t) \quad = \quad f(t).$$

Es wird vorausgesetzt, dass $f(t)$ und $h(t)$ eine Laplace Transformierte haben. Weiterhin habe das charakteristische Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

lauter einfache Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Zeigen Sie, dass es dann Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt so dass

$$h(t) \quad = \quad (f * g)(t)$$

mit

$$g(t) \quad = \quad \sigma(t)\left(c_1e^{\alpha_1 t} + c_2e^{\alpha_2 t} + \ldots + c_ne^{\alpha_n t}\right).$$

Lösung von Aufgabe 4. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)\\
h(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s)\\
h'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad sH(s)\\
&\vdots\\
h^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^nH(s).
\end{aligned}$$

Im Bildbereich ist die DGL somit

$$H(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0) \quad = \quad F(s).$$

In den Klammern steht das charakteristische Polynom in s, das laut Annahme lauter einfache Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat und sich somit faktorisieren lässt:

$$\begin{aligned}
H(s)\prod_{i=1}^{n}(s - \alpha_i) \quad &= \quad F(s)\\
H(s) \quad &= \quad F(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(s - \alpha_i)}.
\end{aligned}$$

Da die Nullstellen alle einfach sind, lässt sich der zweite Faktor in Partialbrüche zerlegen.

$$H(s) \quad = \quad F(s)\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s - \alpha_i}$$

für bestimmte Konstanten $c_1, \ldots, c_n$. Mit

$$\frac{1}{s - \alpha_i} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{\alpha_i t}$$

folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\alpha_i} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\alpha_i t}\\ &\quad = \quad g(t).\end{aligned}$$

Mit dem Faltungssatz gilt damit

$$h(t) \quad = \quad (f * g)(t).$$

Aufgabe 5. Sei S ein diskretes System mit Eingangssignal f_k und Ausgangssignal h_k, das nichts anderes tut als den Ausgang mit n-Takten Verzögerung zum Eingang rückzukoppeln. Eine ähnliche Situation liegt z.B. bei akustischer Rückkopplung mit einem Mikrofon, Verstärker und Lautsprecher vor, was oft zu einem sehr lauten Pfeifton führt.

Es gilt somit

$$h_k \quad = \quad f_k + h_{k-n}.$$

Zeigen Sie, dass dieses System instabil ist. Berechnen Sie die tiefste normierte Frequenz $\hat{\omega} > 0$, die dieses System theoretisch unendlich verstärken würde.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} h_k - h_{k-n} &= f_k\\ H(z)(1-z^{-n}) &= F(z)\\ H(z) &= \frac{1}{1-z^{-n}}F(z)\\ &= \frac{z^n}{z^n-1}F(z).\end{aligned}$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$G(z) \quad = \quad \frac{z^n}{z^n-1}.$$

Diese Funktion hat Pole für

$$z^n \quad = \quad 1.$$

Sei $z = re^{j\varphi}$. Dann ist

$$r^n e^{jn\varphi} \quad = \quad 1.$$

Hieraus folgt $r = 1$ und

$$\varphi \quad = \quad k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die Pole der Übertragungsfunktion sind folglich

$$z \quad = \quad e^{2\pi jk/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die Pole liegen alle auf dem Einheitskreis und nicht darin. Folglich ist das System instabil.

Die Frequenzantwort des System ist

$$G(e^{j\hat{\omega}}) \quad = \quad \frac{e^{jn\hat{\omega}}}{e^{jn\hat{\omega}} - 1}.$$

Der Verstärkungsfaktor bei normierter Frequenz $\hat{\omega}$ ist somit

$$|G(e^{j\hat{\omega}})| \quad = \quad \frac{1}{|e^{jn\hat{\omega}} - 1|}.$$

Dieser Faktor ist unendlich falls

$$\begin{aligned}
|e^{jn\hat{\omega}} - 1| &= 0 \\
|\cos(n\hat{\omega}) + j\sin(n\hat{\omega}) - 1| &= 0 \\
(\cos(n\hat{\omega}) - 1)^2 + \sin^2(n\hat{\omega}) &= 0 \\
\cos^2(n\hat{\omega}) - 2\cos(n\hat{\omega}) + 1 + \sin^2(n\hat{\omega}) &= 0 \\
\\
2 - 2\cos(n\hat{\omega}) &= 0 \\
\cos(n\hat{\omega}) &= 1 \\
n\hat{\omega} &= 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z} \\
\hat{\omega} &= 2\pi\frac{k}{n}.
\end{aligned}$$

Den kleinsten Wert $\hat{\omega} > 0$ erhält man für $k = 1$, d.h.

$$\hat{\omega} \quad = \quad \frac{2\pi}{n}.$$

Ganzzahlige Vielfache dieser Frequenz werden aber ebenfalls theoretisch unendlich verstärkt.

Aufgabe 6. Sei

$$[S(f)]_k \quad = \quad kf_k + f_{k-1}.$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 6. S ist linear.

$$\begin{aligned}
S(f+g) &= S(f) + S(g) \\
[S(f+g)]_k &= k(f+g)_k + (f+g)_{k-1} \\
&= kf_k + f_{k-1} + kg_k + g_{k-1} \\
&= [S(f)]_k + [S(g)]_k \\
&= [S(f) + S(g)]_k \\
S(uf) &= uS(f) \\
[S(uf)]_k &= k(uf)_k + (uf)_{k-1} \\
&= kuf_k + uf_{k-1} \\
&= u(kf_k + f_{k-1}) \\
&= u\,[S(f)]_k \\
&= [uS(f)]_k
\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
S(f_{.-\hat{k}}) &\neq S(f)_{.-\hat{k}} \\
\left[S(f_{.-\hat{k}})\right]_k &= kf_{k-\hat{k}} + f_{k-1-\hat{k}} \\
\left[S(f)_{.-\hat{k}}\right]_k &= [S(f)]_{k-\hat{k}} \\
&= (k-\hat{k})f_{k-\hat{k}} + f_{k-1-\hat{k}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Mit dem Faltungssatz der Laplace Transformation erhält man

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}})(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^n}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t)t^{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{(n-1)!}{s^n}.$$

Daraus folgt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}})(t) = \frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)t^{n-1}.$$

Beweisen Sie dies nun durch Induktion im Zeitbereich (d.h. ohne Laplace Transformation).

Lösung von Aufgabe 7.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sigma(t) = \frac{1}{0!}\sigma(t)t^0.$$

- Induktionsannahme: Für ein festes n gelte

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}})(t) = \frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)t^{n-1}.$$

- Induktionsschritt. Zu zeigen:

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1 \text{ Mal}})(t) = \frac{1}{n!}\sigma(t)t^n.$$

  Da die Faltung mit σ eine Integration bewirkt, erhält man mit der

Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1 \text{ Mal}})(t) &= (\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}} * \sigma)(t) \\
&= \left(\frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)t^{n-1}\right) * \sigma(t) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\tau^{n-1}d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)\int_{0}^{t} \tau^{n-1}d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)\frac{1}{n}\left[\tau^{n}\right]_0^t \\
&= \sigma(t)\frac{1}{n!}t^n.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Sei S ein LTI System mit Impulsantwort

$$g_k = \sigma_k a^k.$$

für eine reelle Konstante a. Berechnen Sie die Frequenzantwort $K(\hat{\omega})$ des Systems. Zeigen Sie, dass $|K(\hat{\omega})|^2$ im Bereich $0 < \hat{\omega} < \pi$ streng monoton fallend ist für $a > 0$ und streng monoton steigend ist für $a < 0$. Das System hat somit Tiefpass Charakteristik falls $a > 0$ und Hochpass Charakteristik falls $a < 0$.

Lösung von Aufgabe 8. Die Übertragungsfunktion ist

$$G(z) = \frac{z}{z-a}.$$

Damit ist die Frequenzantwort

$$\begin{aligned}
K(\hat{\omega}) &= G(e^{j\hat{\omega}}) \\
&= \frac{e^{j\hat{\omega}}}{e^{j\hat{\omega}} - a} \\
|K(\hat{\omega})|^2 &= \frac{1}{|\cos(\hat{\omega}) + j\sin(\hat{\omega}) - a|^2} \\
&= \frac{1}{(\cos(\hat{\omega}) - a)^2 + \sin^2(\hat{\omega})} \\
&= \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos(\hat{\omega})} \\
\frac{d}{d\hat{\omega}}|K(\hat{\omega})|^2 &= \frac{-(-2a)(-\sin(\hat{\omega}))}{(1 + a^2 - 2a\cos(\hat{\omega}))^2} \\
&= -\frac{2a\sin(\hat{\omega})}{(a^2 - 2a\cos(\hat{\omega}) + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Für $0 < \hat{\omega} < \pi$ ist $|\cos(\hat{\omega})| < 1$ und aus der Mitternachtsformel folgt

$$a^2 - 2a\cos(\hat{\omega}) + 1 \neq 0$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Der Nenner ist somit immer positiv. Für $0 < \hat{\omega} < \pi$ ist $\sin(\hat{\omega}) > 0$. Damit gilt:

- Für $a > 0$ ist der Bruch negativ und die Frequenzantwort streng monoton fallend.
- Für $a < 0$ ist der Bruch positiv und die Frequenzantwort streng monoton steigend.

Aufgabe 9. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und B die Matrix, die aus A entsteht, wenn man deren Zeilen vertauscht. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = -\det(A).$$

Zeigen Sie dann durch Induktion für jedes $n \geq 2$, dass wenn $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entsteht, indem zwei beliebige Zeilen von A vertauscht werden, gilt

$$\det(B) = -\det(A).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von B nach einer Zeile, die *nicht* vertauscht wurde.

Lösung von Aufgabe 9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= ad - bc \\ \det(B) &= cb - da \\ &= bc - ad \\ &= -(ad - bc) \\ &= -\det(A). \end{aligned}$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$, wobei B aus A entsteht, indem zwei beliebige Zeilen von A vertauscht werden. Zu zeigen ist, dass dann

$$\det(B) = -\det(A).$$

- Der Induktionsanfang $n = 2$ wurde oben gezeigt.
- Die Induktionshyptothese ist, dass die Aussage für ein festes n gilt.
- Es muss nun noch gezeigt werden, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt. Seien also $A, B \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ mit $n \geq 2$, wobei B aus A entsteht, indem zwei beliebige Zeilen von A vertauscht werden. Sei i eine Zeile, die *nicht* vertauscht wurde, d.h.

  $$a_{ij} = b_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

  Entwicklung nach der i-ten Zeile ergibt

  $$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} b_{ij} \det(B^{i,j}) \\ &= \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(B^{i,j}). \end{aligned}$$

Da $B^{i,j}$ gleich ist wie $A^{i,j}$ wobei zwei Zeilen vertauscht sind und beides $n \times n$ Matrizen sind, gilt laut Induktionsannahme

$$\det(B^{i,j}) = -\det(A^{i,j}).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} (-\det(A^{i,j}) \\ &= -\sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j}) \\ &= -\det(A). \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Nutzen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe um zu zeigen, dass die Determinante einer Matrix, in der zwei Zeilen identisch sind, Null ist.

Lösung von Aufgabe 10. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, in der zwei Zeilen identisch sind. Sei B die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die beiden Zeilen vertauscht. Da die Zeilen identisch sind, ist

$$A = B.$$

Aufgrund der vorigen Aufgabe gilt

$$\det(A) = -\det(B)$$

und da $A = B$ ist

$$\det(A) = -\det(A).$$

Hieraus folgt

$$\det(A) = 0.$$

Aufgabe 11. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wobei B identisch ist mit A außer der i-ten Zeile. Die i-te Zeile von B ist gleich der Summe aus i-ter und k-ter Zeile von A mit $i \neq k$. Für die i-te Zeile von B gilt also

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = \det(A).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von B nach der i-ten Zeile. Wenn Sie die dabei auftretende Summe in zwei Summen zerlegen, stoßen Sie auf die Determinante einer Matrix C, die identisch ist mit A bis auf die i-te Zeile. Die i-te Zeile von C ist gleich der k-ten Zeile von A, d.h.

$$c_{ij} = a_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

In der Matrix C sind somit i-te und k-te Zeile gleich. Damit ist C singulär und $\det(C) = 0$.

Lösung von Aufgabe 11. Entwicklung nach der i-ten Zeile ergibt

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\det(B^{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(a_{ij}+a_{kj})\det(A^{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{i,j}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\det(A^{i,j}) \\
&= \det(A) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\det(C^{i,j}) \\
&= \det(A) + \det(C) \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wobei B identisch ist mit A bis auf die i-te Zeile. Die i-te Zeile von B ist gleich der i-ten Zeile von A plus u mal der k-ten Zeile von A mit $i \neq k$. Es gilt also

$$b_{ij} = a_{ij} + u\,a_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = \det(A).$$

Sie müssen hierzu die Lösung der vorigen Aufgabe nur geringfügig modifizieren.

Durch Anwenden eines Schrittes des Gauß-Algorithmus ändert sich die Determinante folglich nicht!

Lösung von Aufgabe 12. Entwicklung nach der i-ten Zeile ergibt

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\det(B^{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(a_{ij}+u\,a_{kj})\det(A^{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{i,j}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}u\,a_{kj}\det(A^{i,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{i,j}) + u\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\det(A^{i,j}) \\
&= \det(A) + u\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\det(C^{i,j}) \\
&= \det(A) + u\det(C) \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j.$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente ist.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst in einem Beispiel die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix durch Entwicklung nach der ersten Spalte.

Lösung von Aufgabe 13.

- Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.
- Angenommen für ein festes n gilt, dass die Determinante von oberen Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente ist.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

  $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i,1}).$$

  Da A obere Dreiecksmatrix ist, sind alle $a_{i1} = 0$ außer für $i = 1$.

  $$\det(A) = a_{11} \det(A^{1,1}).$$

  Da $A^{1,1}$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt nach Induktionsannahme

  $$\det(A^{1,1}) = a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

  Damit ist

  $$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

  gleich dem Produkt der Diagonalelemente von A.

Aufgabe 14. Sei B eine Matrix, die durch Anwenden eines Gauß Schrittes aus A entsteht. In einer früheren Aufgabe wurde gezeigt, dass dann

$$\det(B) = \det(A)$$

und somit

$$\det(B) = 0 \text{ genau dann wenn } \det(A) = 0.$$

Durch eine Folge von Gauß Schritten kann eine Matrix auf Zeilenstufenform gebracht werden. Eine quadratische Matrix ist regulär genau dann wenn die Diagonalelemente der Zeilenstufenform alle ungleich Null sind. Zeigen Sie damit und unter Verwendung der vorigen Aufgaben, dass

$$A \text{ regulär genau dann wenn } \det(A) \neq 0.$$

Lösung von Aufgabe 14. Sei B die Matrix, die aus A entsteht, wenn man sie durch Gauß Schritte auf Zeilenstufenform gebracht hat. Dann ist B eine obere Dreiecksmatrix.

- A ist regulär, gdw. in der Zeilenstufenform B alle Diagonalemenente ungleich Null sind.
- Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(B) \neq 0$.
- Da B durch Anwenden von Gauß Schritten aus A entstanden ist, ist dies genau dann der Fall wenn $\det(A) \neq 0$.
- Folglich ist A regulär genau dann wenn $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 15. Für Determinanten gilt

$$\det(AB) \quad = \quad \det(A)\det(B).$$

Kann man daraus schließen, dass

$$\det(AB) \quad = \quad \det(BA)?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 15. Ja.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A)\det(B) \\ &= \det(B)\det(A) \\ &= \det(BA). \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Nennen Sie mindestens 6 äquivalente Bedingungen wann eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singulär ist.

Lösung von Aufgabe 16.

- Zeilen von A sind linear abhängig.
- Spalten von A sind linear abhängig.
- A ist nicht invertierbar.
- Determinante von A ist Null.
- A hat einen Eigenwert $\lambda = 0$.
- Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$
- Die Funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist nicht injektiv.
- Die Funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist nicht surjektiv.
- Die Funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 17. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwicklung nach der ersten Spalte und durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.

Lösung von Aufgabe 17. Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei $\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann auch $c\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist für jedes $c \neq 0$.

Lösung von Aufgabe 18. Sei $\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ, d.h.

$$\vec{v} \neq \vec{0} \text{ und } A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Sei $c \neq 0$. Dann ist $c\vec{v} \neq \vec{0}$ und

$$\begin{aligned} A(c\vec{v}) &= cA\vec{v} \\ &= c\lambda\vec{v} \\ &= \lambda(c\vec{v}), \end{aligned}$$

d.h. $c\vec{v}$ ist Eigenvektor von A mit Eigenwert λ.

Aufgabe 19. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ wenn gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Eigenvektoren von A zum gleichen Eigenwert λ sind, auch jede Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ungleich $\vec{0}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist.

Lösung von Aufgabe 19. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektoren von A mit Eigenwert λ, d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{y} &= \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

Sei $\vec{z}$ Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$, d.h.

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

für bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: $\vec{z}$ ist Eigenvektor von A mit Eigenwert λ, d.h.

$$A\vec{z} = \lambda\vec{z}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} A\vec{z} &= A(a\vec{x} + b\vec{y}) \\ &= Aa\vec{x} + Ab\vec{y} \\ &= aA\vec{x} + bA\vec{y} \\ &= a\lambda\vec{x} + b\lambda\vec{y} \\ &= \lambda(a\vec{x} + b\vec{y}) \\ &= \lambda\vec{z}. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A und von B. Zeigen Sie, dass dann $\vec{v}$ auch ein Eigenvektor von AB ist.

Lösung von Aufgabe 20. Sei $\vec{v}$ Eigenvektor von A und von B, d.h.

$$A\vec{v} = \lambda_A\vec{v} \text{ und } B\vec{v} = \lambda_B\vec{v}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(AB)\vec{v} &= A(B\vec{v}) \\
&= A\lambda_B\vec{v} \\
&= \lambda_B A\vec{v} \\
&= \lambda_B\lambda_A\vec{v}.
\end{aligned}$$