

Übungen zu Mathematik 3  
mit Musterlösungen  
Blatt 13

---

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die Originalfunktion  $f(t)$  der Laplace Transformatierten

$$F(s) = \frac{4s + 3}{5s^2 + 6}.$$

Sie benötigen dafür *keine* Partialbruchzerlegung.

**Lösung von Aufgabe 1.**

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{4s + 3}{5s^2 + 6} \\ &= 4 \frac{s}{5s^2 + 6} + 3 \frac{1}{5s^2 + 6} \\ &= \frac{4}{5} \frac{s}{s^2 + 6/5} + \frac{3}{5} \frac{1}{s^2 + 6/5} \\ &= \frac{4}{5} \frac{s}{s^2 + 6/5} + \frac{3}{5} \sqrt{5/6} \frac{\sqrt{6/5}}{s^2 + 6/5} \\ &\bullet \circ \sigma(t) \left( \frac{4}{5} \cos(\sqrt{6/5} t) + \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6/5} t) \right) \\ &= \sigma(t) \left( \frac{4}{5} \cos(\sqrt{6/5} t) + \sqrt{3/10} \sin(\sqrt{6/5} t) \right) \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Sei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$$

ein Impulszug. Da  $p(t)$  periodisch ist, kann er durch eine Fourier Reihe dargestellt werden. Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten  $z_k$  und zeigen Sie damit, dass

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j k t}.$$

Zeigen Sie mit dem Dämpfungssatz der Laplace Transformation, dass

$$f(t)p(t) \circ \bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - 2\pi j k).$$

**Lösung von Aufgabe 2.** Die Fourier Koeffizienten einer  $T$ -periodischen Funktion  $p(t)$  berechnen sich nach der Formel

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-j k \omega t} dt.$$

In diesem Beispiel ist  $T = 1$  und damit  $\omega = 2\pi$ . Da der Integrand  $T$ -periodisch ist und an der Stelle  $t = 0$  und  $t = T$  ein Impuls ist, bietet es sich an, nicht von 0 bis  $T$  zu integrieren sondern von  $-T/2$  bis  $T/2$ . Damit erhält man unter Verwendung der Ausblendeigenschaft

$$\begin{aligned} z_k &= \int_{-1/2}^{1/2} p(t)e^{-2\pi jkt} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)e^{-2\pi jkt} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Fourier Reihe ist damit

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt}. \end{aligned}$$

Der Verschiebungssatz der Laplace Transformation sagt

$$e^{-at} f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s + a).$$

Mit

$$a = -2\pi jk$$

erhält man

$$e^{2\pi jkt} f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s - 2\pi jk).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(t)p(t) &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi jkt} \\ &\circ \text{---} \bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - 2\pi jk). \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie die Laplace Transformierte der Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte der Rechteck Schwingung

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \leq t \leq k + 1 \text{ für } k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt  $f(t) - f(t - 2) = g(t)$  für alle  $t$ .

### Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{s} (e^{-s} - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Sei

$$f(t) \circ \bullet F(s).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$f(t-2) \circ \bullet e^{-2s}F(s).$$

Damit ist

$$g(t) = f(t) - f(t-2) \circ \bullet F(s)(1 - e^{-2s}) = G(s).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{G(s)}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** Sei  $S$  ein System mit  $S(f) = h$  wobei  $h$  eine Lösung der DGL

$$h'' + h = f$$

ist.

- Berechnen Sie die Impulsantwort  $g(t)$  von  $S$ . Sie dürfen dabei voraussetzen, dass  $f(t)$  und  $h(t)$  eine Laplace Transformierte haben. (Hieraus folgen die Startwerte  $h(-\infty) = h'(-\infty) = 0$  und damit die Eindeutigkeit der Lösung der DGL.
- Verifizieren Sie, dass für das von Ihnen berechnete  $g(t)$  tatsächlich gilt

$$S(\delta) = g$$

bzw.

$$g'' + g = \delta.$$

Sie müssen hier  $\sigma(t)$  immer dazuschreiben und beim Ableiten berücksichtigen, sonst kommt nicht das richtige Ergebnis heraus.

#### Lösung von Aufgabe 4.

- Mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\text{---}\bullet F(s) \\ h(t) &\circ\text{---}\bullet H(s) \\ h'(t) &\circ\text{---}\bullet sH(s) \\ h''(t) &\circ\text{---}\bullet s^2H(s) \end{aligned}$$

wird aus der DGL durch Laplace Transformation

$$\begin{aligned} s^2H(s) + H(s) &= F(s) \\ H(s)(s^2 + 1) &= F(s) \\ H(s) &= \frac{1}{s^2 + 1}F(s). \end{aligned}$$

Rücktransformation mit dem Faltungssatz ergibt

$$h(t) = (f * g)(t)$$

wobei

$$g(t) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Mit der Korrespondenz

$$\sigma(t) \sin(\omega t) \circ\text{---}\bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

folgt

$$g(t) = \sigma(t) \sin(t).$$

- Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \delta(t) \sin(t) + \sigma(t) \cos(t) \\ &= \delta(t) \sin(0) + \sigma(t) \cos(t) \\ &= \sigma(t) \cos(t) \\ g''(t) &= \delta(t) \cos(t) - \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t) \cos(0) - \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t) - \sigma(t) \sin(t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} g'' + g &= \delta(t) - \sigma(t) \sin(t) + \sigma(t) \sin(t) \\ &= \delta(t). \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.** Sei

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k 2^k \\ g_k &= \sigma_k k. \end{aligned}$$

Berechnen Sie  $(f * g)_k$  einmal ohne Verwendung der  $z$ -Transformation und einmal mit der  $z$ -Transformation.

**Lösung von Aufgabe 5.** Ohne  $z$ -Transformation.

$$\begin{aligned}(f * g)_k &= \sigma_k \sum_{\ell=0}^k 2^\ell (k - \ell) \\ &= \sigma_k \left( k \sum_{\ell=0}^k 2^\ell - \sum_{\ell=0}^k \ell 2^\ell \right).\end{aligned}$$

• Sei

$$\begin{aligned}s &= \sum_{\ell=0}^k 2^\ell \\ 2s &= \sum_{\ell=0}^k 2^{\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} 2^\ell \\ 2s - s &= 2^{k+1} - 2^0 \\ s &= 2^{k+1} - 1\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=0}^k 2^\ell = 2^{k+1} - 1.$$

• Sei

$$\begin{aligned}s &= \sum_{\ell=0}^k \ell 2^\ell \\ 2s &= \sum_{\ell=0}^k \ell 2^{\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} (\ell - 1) 2^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} \ell 2^\ell - \sum_{\ell=1}^{k+1} 2^\ell \\ 2s - s &= (k+1)2^{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k+1} 2^\ell \\ s &= (k+1)2^{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k+1} 2^\ell \\ &= (k+1)2^{k+1} - 2 \sum_{\ell=0}^k 2^\ell \\ &= (k+1)2^{k+1} - 2(2^{k+1} - 1) \\ &= (k-1)2^{k+1} + 2\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=0}^k \ell 2^\ell = (k-1)2^{k+1} + 2.$$

• Folglich ist

$$\begin{aligned} (f * g)_k &= \sigma_k (k(2^{k+1} - 1) - (k-1)2^{k+1} - 2) \\ &= \sigma_k (k2^{k+1} - k - k2^{k+1} + 2^{k+1} - 2) \\ &= \sigma_k (2^{k+1} - k - 2). \end{aligned}$$

Mit  $z$ -Transformation.

$$\begin{aligned} f_k &\circ \bullet \frac{z}{z-2} \\ g_k &\circ \bullet \frac{z}{(z-1)^2} \\ (f * g)_k &\circ \bullet \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)} &= \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2} + \frac{c_3}{z-2} \\ z^2 &= c_1(z-1)(z-2) + c_2(z-2) + c_3(z-1)^2. \end{aligned}$$

Spezialfall  $z = 1$

$$1 = -c_2.$$

Spezialfall  $z = 2$

$$4 = c_3$$

Spezialfall  $z = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2c_1 + 2 + 4 \\ 2c_1 &= -6 \\ c_1 &= -3. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f * g)_k &\circ \bullet -3 \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + 4 \frac{1}{z-2} \\ &= z^{-1} \left( -3 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} + 4 \frac{z}{z-2} \right) \\ &\bullet \circ -3\sigma_{k-1} - (k-1)\sigma_{k-1} + 4\sigma_{k-1}2^{k-1} \\ &= \sigma_{k-1}(-3 - k + 1 + 2^{k+1}) \\ &= \sigma_{k-1}(2^{k+1} - k - 2) \\ &= \sigma_k(2^{k+1} - k - 2). \end{aligned}$$

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie die inverse  $z$ -Transformierte von

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

**Lösung von Aufgabe 6.** Es gibt zwei Lösungswege:

- Lösung mit dem Faltungssatz. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-1} & \bullet \text{---} \circ 1 \\ \frac{z}{z-2} & \bullet \text{---} \circ 2^k. \end{aligned}$$

Mit dem Faltungssatz erhält man

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{u=0}^k 2^u 1^{k-u} \\ &= \sum_{u=0}^k 2^u. \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} 2f_k &= \sum_{u=0}^k 2^{u+1} \\ &= \sum_{u=1}^{k+1} 2^u \\ 2f_k - f_k &= 2^{k+1} - 1 \\ f_k &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

- Lösung mit Partialbruchzerlegung.

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

Polynomdivision.

$$F(z) = 1 + \frac{3z-2}{(z-1)(z-2)}.$$

Partialbruchzerlegung des Rests.

$$\begin{aligned} \frac{3z-2}{(z-1)(z-2)} &= \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2} \\ 3z-2 &= c_1(z-2) + c_2(z-1). \end{aligned}$$

Spezialfall  $z = 1$  ergibt  $c_1 = -1$ , Spezialfall  $z = 2$  ergibt  $c_2 = 4$ .

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z-1} + \frac{4}{z-2} & \circ \text{---} \bullet -1 + \delta_k + 4\sigma_{k-1}2^{k-1} \\ & = -1 + \delta_k + \sigma_{k-1}2^{k+1}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} f_k &= \delta_k - 1 + \delta_k + \sigma_{k-1}2^{k+1} \\ &= 2\delta_k + \sigma_{k-1}2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Zeigen Sie durch Induktion über  $k$ , dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

**Lösung von Aufgabe 7.**

- Induktionsanfang. Für  $k = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} &= \binom{0+n}{n} \\ &= 1 \\ &= \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{k+n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

- Induktionsannahme. Für ein festes  $k \in \mathbb{N}$  gelte

$$\sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

- Induktionsschluss. Zu zeigen: Für dieses  $k$  gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+2}{n+1}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{\ell+n}{n} &= \sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} + \binom{k+1+n}{n} \\ &= \binom{k+n+1}{n+1} + \binom{k+n+1}{n} \\ &= \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!k!} + \frac{(k+n+1)!}{n!(k+1)!} \\ &= (k+1) \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} + (n+1) \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= (k+n+2) \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= \frac{(k+n+2)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= \binom{k+n+2}{n+1} \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.** Ein lineares System mit Eingang  $f_k$  und Ausgang  $h_k$  genügt der Differenzengleichung

$$h_k = \frac{1}{2}h_{k-1} + f_k - f_{k-1}.$$

- Seien  $F(z)$  und  $H(z)$  die  $z$ -Transformierten von  $f_k$  und  $h_k$ . Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{H(z)}{F(z)}.$$

Berechnen Sie hieraus die Impulsantwort  $g_k$ .

- Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Impulsantwort  $g_k$  für  $k = 0, 1, 2, 3$  ohne  $z$ -Transformation berechnen. Sie erhalten die Impulsantwort, indem Sie  $f_k = \delta_k$  setzen und mit o.g. Formel  $h_k$  für  $k = 0, 1, 2, 3$  berechnen, wobei  $h_k = 0$  für  $k < 0$  angenommen wird.

**Lösung von Aufgabe 8.** Aus der Gleichung folgt

$$h_k - \frac{1}{2}h_{k-1} = f_k - f_{k-1}.$$

Unter Verwendung von Faltungen lässt sich dies formulieren durch

$$(h * a)_k = (f * b)_k$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \langle 1, -1/2 \rangle \\ b &= \langle 1, -1 \rangle. \end{aligned}$$

Mit dem Faltungssatz der  $z$ -Transformation erhält man

$$H(z)A(z) = F(z)B(z)$$

wobei

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \\ B(z) &= 1 - z^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{H(z)}{F(z)} \\ &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \frac{z - 1}{z - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Polynomdivision ergibt

$$\frac{z-1}{z-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}.$$

Mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{z-\frac{1}{2}} \begin{array}{l} \bullet \text{---} \circ \quad \delta_k \\ \bullet \text{---} \circ \quad \sigma_{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \end{array}$$

erhält man

$$\begin{aligned} G(z) & \bullet \text{---} \circ \quad \delta_k - \frac{1}{2} \sigma_{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \\ & = \delta_k - \sigma_{k-1} 2^{-k} \\ & = \langle 1, -1/2, -1/4, -1/8, \dots \rangle. \end{aligned}$$

Rechnet man die Impulsantwort im Zeitbereich aus, erhält man mit  $f_k = \delta_k$  aus

$$\frac{1}{2} h_{k-1} + \delta_k - \delta_{k-1}$$

die Werte

$$\begin{aligned} h_0 & = \frac{1}{2} h_{-1} + \delta_0 - \delta_{-1} = 1 \\ h_1 & = \frac{1}{2} h_0 + \delta_1 - \delta_0 = -1/2 \\ h_2 & = \frac{1}{2} h_1 + \delta_2 - \delta_1 = -1/4 \\ h_3 & = \frac{1}{2} h_2 + \delta_3 - \delta_2 = -1/8. \end{aligned}$$

**Aufgabe 9.** Sei

$$[S(f)]_k = kf_k + f_{k-1}.$$

Ist  $S$  linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

**Lösung von Aufgabe 9.**  $S$  ist linear.

$$\begin{aligned} S(f+g) & = S(f) + S(g) \\ [S(f+g)]_k & = k(f+g)_k + (f+g)_{k-1} \\ & = kf_k + f_{k-1} + kg_k + g_{k-1} \\ & = [S(f)]_k + [S(g)]_k \\ & = [S(f) + S(g)]_k \\ S(uf) & = uS(f) \\ [S(uf)]_k & = k(uf)_k + (uf)_{k-1} \\ & = kuf_k + uf_{k-1} \\ & = u(kf_k + f_{k-1}) \\ & = u[S(f)]_k \\ & = [uS(f)]_k \end{aligned}$$

$S$  ist nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned} S(f_{\cdot, -\hat{k}}) &\neq S(f)_{\cdot, -\hat{k}} \\ [S(f_{\cdot, -\hat{k}})]_k &= kf_{k-\hat{k}} + f_{k-1-\hat{k}} \\ [S(f)_{\cdot, -\hat{k}}]_k &= [S(f)]_{k-\hat{k}} \\ &= (k - \hat{k})f_{k-\hat{k}} + f_{k-1-\hat{k}}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 10.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Matrix mit einem Eigenwert, der *geometrische* Vielfachheit 2 hat. Begründen Sie, weshalb  $A$  dann eine Diagonalmatrix mit identischen Diagonalelementen sein muss.

Hinweis: Der Vektorraum  $\mathbb{C}^2$  hat Dimension 2. Folglich spannen 2 linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{C}^2$  immer den gesamten  $\mathbb{C}^2$  auf.

**Lösung von Aufgabe 10.** Da bereits 2 linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{C}^2$  den gesamten  $\mathbb{C}^2$  aufspannen, ist der einzige Vektorraum mit Dimension 2 in  $\mathbb{C}^2$  der ganze  $\mathbb{C}^2$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  mit geometrischer Vielfachheit 2, dann ist  $E_\lambda \subseteq \mathbb{C}^2$  ein zweidimensionaler Vektorraum und somit  $E_\lambda = \mathbb{C}^2$ . Folglich ist jeder Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ . Daher ist

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{C}^2.$$

Damit muss  $A - \lambda E$  die Nullmatrix sein, d.h.  $a_{12} = a_{21} = 0$  und

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda \\ a_{22} &= \lambda. \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $a_{11} = a_{22}$ , d.h.  $A$  ist eine Diagonalmatrix mit identischen Diagonalelementen.

**Aufgabe 11.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Ein Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  heißt Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  wenn gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zeigen Sie, dass wenn  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  Eigenvektoren von  $A$  zum gleichen Eigenwert  $\lambda$  sind, auch jede Linearkombination von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  ungleich  $\vec{0}$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$  ist.

**Lösung von Aufgabe 11.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$  Eigenvektoren von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ , d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{y} &= \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

Sei  $\vec{z}$  Linearkombination von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ , d.h.

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

für bestimmte  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen:  $\vec{z}$  ist Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ , d.h.

$$A\vec{z} = \lambda\vec{z}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} A\vec{z} &= A(a\vec{x} + b\vec{y}) \\ &= Aa\vec{x} + Ab\vec{y} \\ &= aA\vec{x} + bA\vec{y} \\ &= a\lambda\vec{x} + b\lambda\vec{y} \\ &= \lambda(a\vec{x} + b\vec{y}) \\ &= \lambda\vec{z}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\vec{v}$  ein Eigenvektor von  $A$  und von  $B$ . Zeigen Sie, dass dann  $\vec{v}$  auch ein Eigenvektor von  $AB$  ist.

**Lösung von Aufgabe 12.** Sei  $\vec{v}$  Eigenvektor von  $A$  und von  $B$ , d.h.

$$A\vec{v} = \lambda_A\vec{v} \text{ und } B\vec{v} = \lambda_B\vec{v}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (AB)\vec{v} &= A(B\vec{v}) \\ &= A\lambda_B\vec{v} \\ &= \lambda_B A\vec{v} \\ &= \lambda_B \lambda_A \vec{v}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 13.** Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

**Lösung von Aufgabe 13.**

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen berechnet man mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 8}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lambda_1 = 5.372, \quad \lambda_2 = -0.372.$$

- Eigenvektoren zu  $\lambda_1$ . Aus

$$\begin{pmatrix} -4.37 & 3 \\ 2 & -1.37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$-4.37x + 3y = 0$$

bzw.

$$y = 1.456x.$$

Damit ist

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.456 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu  $\lambda_1$ .

- Eigenvektoren zu  $\lambda_2$ . Aus

$$\begin{pmatrix} 1.37 & 3 \\ 2 & 4.37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$1.37x + 3y = 0$$

bzw.

$$y = -0.46x.$$

Damit ist

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.46 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu  $\lambda_2$ .

**Aufgabe 14.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ , zu jedem Eigenwert seine geometrische und algebraische Vielfachheit und eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

**Lösung von Aufgabe 14.**

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinante nach der zweiten Zeile.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) \\ &= (2 - \lambda)\lambda(\lambda - 2) \\ &= -\lambda(2 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Damit hat  $A$  zwei Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  mit algebraischer Vielfachheit 1 und  $\lambda_2 = 2$  mit algebraischer Vielfachheit 2.

Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt  $y = 0$ . Aus der ersten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ z &= -x. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$x = z.$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} x + y - x &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend erhält man

Eigenwert $\lambda$ :	0	2
algebraische Vielfachheit:	1	2
geometrische Vielfachheit:	1	1
Basis:	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 15.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle Matrix und  $\vec{v}$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $\overline{\vec{v}}$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\overline{\lambda}$  ist.

**Lösung von Aufgabe 15.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\vec{v}$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ , d.h.

$$\vec{v} \neq \vec{0} \text{ und } A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zu zeigen:  $\overline{\vec{v}}$  ist Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\overline{\lambda}$ , d.h.

$$A\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} A\overline{\vec{v}} &= \overline{A\vec{v}} \\ &= \overline{\lambda\vec{v}} \\ &= \overline{\lambda}\overline{\vec{v}} \\ &= \overline{\lambda}\overline{\vec{v}}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 16.** Sei  $A$  eine reguläre Matrix und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Zeigen Sie, dass dann  $1/\lambda$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$  ist. Hinweis: Beginnen Sie mit der Gleichung

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Multiplizieren Sie beide Seiten mit  $A^{-1}$ . Nutzen Sie aus, dass  $A^{-1}A = E$ . Dann steht's schon fast da.

**Lösung von Aufgabe 16.** Sei  $A$  eine reguläre Matrix und  $\vec{v}$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ , d.h.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Multiplikation mit  $A^{-1}$  auf beiden Seiten gibt

$$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\lambda\vec{v}.$$

Da  $A^{-1}A = E$  und  $E\vec{v} = \vec{v}$  folgt

$$\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}.$$

Da  $A$  regulär ist, ist  $\lambda \neq 0$  und man kann auf beiden Seiten durch  $\lambda$  dividieren. Damit gilt

$$\frac{1}{\lambda}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

d.h.  $\vec{v}$  ist Eigenvektor von  $A^{-1}$  mit Eigenwert  $1/\lambda$ .

**Aufgabe 17.** Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind immer reell. Dies soll für den Spezialfall von  $2 \times 2$  Matrizen gezeigt werden. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix. Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$  und zeigen Sie, dass diese reell sind für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Lösung von Aufgabe 17.**

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (a - \lambda)(b - \lambda) - c^2 \\ &= \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2. \end{aligned}$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab + 4c^2}}{2} \\ &= \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2}}{2} \\ &= \frac{a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2} \end{aligned}$$

Da

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ und } c^2 \geq 0$$

für alle  $a, b, c$  ist die Diskriminante nicht negativ und damit sind beide Eigenwerte reell.

**Aufgabe 18.** Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Folge  $f_k$  heißt Eigenfolge eines diskreten LTI Systems  $S$  mit Eigenwert  $\lambda$  wenn

$$\begin{aligned} S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)]_k &= \lambda f_k \quad \text{für alle } k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes  $a \in \mathbb{C}$  die Folge

$$f_k = a^k, \quad -\infty < k < \infty$$

Eigenfolge von  $S$  ist mit Eigenwert

$$\lambda = G(a)$$

wobei  $G(z)$  die Übertragungsfunktion des Systems ist.

Hinweis: Da  $S$  LTI ist, gibt es eine Folge  $g_k$  so dass  $S(f) = f * g$ . Die Übertragungsfunktion von  $S$  ist dann

$$G(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} z^{-\ell}.$$

Berechnen Sie

$$[S(f)]_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} f_{k-\ell}$$

für  $f_k = a^k$  und formen Sie so lange um, bis Sie bei  $G(a)f_k$  herauskommen.

**Lösung von Aufgabe 18.** Sei  $S$  ein LTI System mit Impulsantwort  $g_k$ . Für die Folge  $f_k = a^k$  erhält man

$$\begin{aligned}
 [S(f)]_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} f_{k-\ell} \\
 &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} a^{k-\ell} \\
 &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} a^k a^{-\ell} \\
 &= a^k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} a^{-\ell} \\
 &= a^k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{\ell} z^{-\ell} \quad \text{für } z = a \\
 &= a^k G(z) \\
 &= f_k G(z) \\
 &= G(a) f_k \quad \text{da } z = a.
 \end{aligned}$$

Dies gilt für alle  $k$ , folglich ist

$$S(f) = G(a)f$$

und somit ist die Folge  $f$  Eigenfolge von  $S$  mit Eigenwert  $G(a)$ .

**Aufgabe 19.** Zeichnen Sie folgende Vektoren als Punkte in ein Koordinatensystem ein.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es entsteht eine Punktwolke, die anschaulich die ‘‘Richtung’’

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat. Dies liegt daran, dass die Vektorkomponenten ‘‘korreliert’’ sind: Alle Punkte der Wolke liegen näherungsweise auf einer Geraden. Quantitativ drückt sich dies durch die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix aus.

- Berechnen Sie zunächst den Mittelwertvektor

$$\vec{\mu} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \vec{x}_i$$

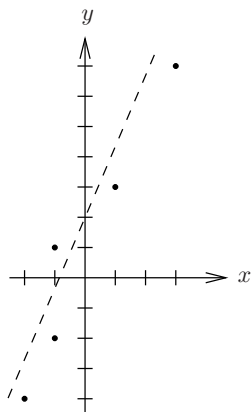
und dann die Kovarianzmatrix

$$A = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\vec{x}_i - \vec{\mu})(\vec{x}_i - \vec{\mu})^T.$$

Die Summanden sind Produkte aus einem Spalten- und einem Zeilenvektor und ergeben somit  $2 \times 2$  Matrizen. Da jeder Summand eine symmetrische Matrix ist, ist auch  $A$  symmetrisch.

- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ . Da  $A$  symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell. Dass die Punktwolke eine ausgeprägte Hauptrichtung hat, zeigt sich darin, dass ein Eigenwert groß und der andere klein ist. Berechnen Sie den Eigenraum zum größeren der beiden Eigenwerte. (Verwenden Sie einen Taschenrechner.) Es muss sich eine Ursprungsgerade ergeben, deren Richtungsvektor näherungsweise dem o.g. Vektor  $\vec{v}$  entspricht.

**Lösung von Aufgabe 19.** Punktwolke.



$$\vec{\mu} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren  $\vec{x} - \vec{\mu}$  sind somit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Kovarianzmatrix ist damit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{5} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 33 & 74 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 16/5 - \lambda & 33/5 \\ 33/5 & 74/5 - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (16/5 - \lambda)(74/5 - \lambda) - (33/5)^2 \\ &= \lambda^2 - 90/5\lambda + 95/25 \\ &= \lambda^2 - 18\lambda + 19/5 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{18 \pm \sqrt{324 - 76/5}}{2} \\ &\approx 9 \pm 8.79. \end{aligned}$$

Eigenvektor zu Eigenwert  $\lambda = 17.79$ .

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -14.59 & 6.6 \\ 6.6 & -2.99 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist singulär. In dem LGS

$$\begin{pmatrix} -14.59 & 6.6 \\ 6.6 & -2.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss somit nur eine Gleichung gelöst werden.

$$\begin{aligned} -14.59x + 6.6y &= 0 \\ y &= 2.21x \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind somit skalare Vielfache von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.21 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$