

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 14

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = 3x(t) + t, \quad x(0^-) = 2$$

für $t \geq 0$ mit Laplace Transformation. Führen Sie die Rücktransformation auf zwei Weisen durch:

- mit Partialbruchzerlegung
- mit dem Faltungssatz.

Das Ergebnis muss natürlich gleich sein.

Berechnen Sie dann die Lösung mit dem $e^{\lambda t}$ Ansatz, indem Sie zunächst die allgemeine homogene Lösung und dann eine partikuläre inhomogene Lösung bestimmen.

Lösung von Aufgabe 1. Multipliziert man beide Seiten mit $\sigma(t)$, erhält man

$$\sigma(t)x'(t) = 3\sigma(t)x(t) + \sigma(t)t.$$

Mit

$$\sigma(t)x(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(s)$$

gilt

$$\sigma(t)x'(t) = sX(s) - 2.$$

Damit ist die DGL im Bildbereich

$$sX(s) - 2 = 3X(s) + \frac{1}{s^2}.$$

Lösung im Bildbereich

$$\begin{aligned} (s-3)X(s) &= 2 + \frac{1}{s^2} \\ X(s) &= \frac{2}{s-3} + \frac{1}{(s-3)s^2}. \end{aligned}$$

- Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s^2 + 1}{(s-3)s^2} \\ &= \frac{c_1}{s-3} + \frac{c_2}{s} + \frac{c_3}{s^2} \\ 2s^2 + 1 &= c_1s^2 + c_2s(s-3) + c_3(s-3) \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= -3c_3 \\ c_3 &= -1/3 \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 3$

$$\begin{aligned} 19 &= 9c_1 \\ c_1 &= 19/9 \end{aligned}$$

Einsetzen und Spezialfall $s = 1$

$$\begin{aligned} 3 &= 19/9 - 2c_2 + 2/3 \\ c_2 &= -1/9. \end{aligned}$$

Lösung

$$x(t) = 19/9e^{3t} - 1/9 - 1/3t.$$

- Rücktransformation mit Faltungssatz.

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{3t} + e^{3t} * t \\ &= 2e^{3t} + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \tau d\tau \\ &= 2e^{3t} + \int_0^t e^{3t} e^{-3\tau} \tau d\tau \\ &= 2e^{3t} + e^{3t} \int_0^t e^{-3\tau} \tau d\tau. \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Lösung des Integrals mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-3\tau} \tau d\tau &= -1/3 [e^{-3\tau} \tau]_0^t - \int_0^t -1/3 e^{-3\tau} d\tau \\ &= -1/3 e^{-3t} t + 1/3 \int_0^t e^{-3\tau} d\tau \\ &= -1/3 e^{-3t} t - 1/9 [e^{-3\tau}]_0^t \\ &= -1/3 e^{-3t} t - 1/9 e^{-3t} + 1/9 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{3t} + e^{3t} \int_0^t e^{-3\tau} \tau d\tau \\ &= 2e^{3t} + e^{3t} (-1/3 e^{-3t} t - 1/9 e^{-3t} + 1/9) \\ &= 2e^{3t} - 1/3t - 1/9 + 1/9 e^{3t} \\ &= 19/9 e^{3t} - 1/9 - 1/3t. \end{aligned}$$

Lösung mit $e^{\lambda t}$ Ansatz. Homogene DGL

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) \\ \lambda e^{\lambda t} &= 3e^{\lambda t} \\ \lambda &= 3. \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung

$$x(t) = ce^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre inhomogene Lösung. Ansatz

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 t + a_0 \\x'(t) &= a_1\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3x(t) + t \\a_1 &= 3(a_1 t + a_0) + t \\a_1 &= t(3a_1 + 1) + 3a_0\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}3a_1 + 1 &= 0 \\a_1 &= 3a_0\end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned}a_1 &= -1/3 \\a_0 &= -1/9\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$x(t) = -1/3t - 1/9.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$x(t) = ce^{3t} - 1/3t - 1/9$$

Anfangswert

$$\begin{aligned}x(0) &= 2 \\c - 1/9 &= 2 \\c &= 19/9.\end{aligned}$$

Lösung mit gegebenem Anfangswert

$$x(t) = 19/9e^{3t} - 1/3t - 1/9.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^k f_\ell = (f * \sigma)_k.$$

Lösung von Aufgabe 2. Da $\sigma_{k-\ell} = 0$ für $\ell > k$ gilt

$$\begin{aligned}(f * \sigma)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \sigma_{k-\ell} \\&= \sum_{\ell=-\infty}^k f_\ell.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die z -Transformierte von

$$f_k = \sigma_k k^2 2^k.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 3. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma_k k^2 \circ \bullet \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Mit der Korrespondenz

$$a^k f_k \circ \bullet F(z/a)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_k 2^k k^2 &\circ \bullet \frac{z/2(z/2+1)}{(z/2-1)^3} \\ &= \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte der inversen Matrix von A , d.h. von A^{-1} .

Lösung von Aufgabe 4. Am Einfachsten geht's wenn man die zuerst die Eigenwerte von A berechnet. Die Eigenwerte von A^{-1} sind deren Kehrwerte.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 1. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2},$$

d.h.

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Die Eigenwerte von A^{-1} sind somit

$$\lambda_1 = \frac{2}{3 + \sqrt{13}} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3 - \sqrt{13}} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5)\end{aligned}$$

Damit ist

$$\lambda_1 = 1$$

und

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine Matrix T gibt so dass

$$T^{-1}AT = B.$$

Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die selben Eigenwerte haben.

Hinweis: Zeigen Sie, dass wenn \vec{v} Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist, $T^{-1}\vec{v}$ Eigenvektor von $T^{-1}AT$ mit gleichem Eigenwert λ ist.

Lösung von Aufgabe 6. Sei λ Eigenwert von A . Zu zeigen ist, dass λ auch Eigenwert von $T^{-1}AT$ ist. Aus der Annahme folgt, dass es einen Vektor \vec{v} gibt mit

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Es wird nun gezeigt, dass $\vec{w} = T^{-1}\vec{v}$ Eigenvektor von $T^{-1}AT$ mit gleichem Eigenwert λ ist, d.h.

$$T^{-1}AT\vec{w} = \lambda\vec{w}.$$

Damit ist λ auch Eigenwert von $T^{-1}AT$.

$$\begin{aligned}T^{-1}AT\vec{w} &= T^{-1}ATT^{-1}\vec{v} \\ &= T^{-1}A\vec{v} \\ &= T^{-1}\lambda\vec{v} \\ &= \lambda T^{-1}\vec{v} \\ &= \lambda\vec{w}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Funktion f heißt Eigenfunktion eines LTI Systems S mit Eigenwert λ wenn

$$\begin{aligned}S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)](t) &= \lambda f(t) \quad \text{für alle } t.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(t) = e^{at}, \quad -\infty < t < \infty$$

Eigenfunktion von S ist mit Eigenwert $G(a)$ wobei $G(s)$ die Laplace Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems ist.

Berechnen Sie

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

und formen Sie so lange um, bis Sie bei $G(a)f(t)$ herauskommen. Der Rechenweg ist sehr kurz.

Lösung von Aufgabe 7. Sei S ein LTI System mit Impulsantwort $g(t)$. Für die Funktion $f(t) = e^{at}$ erhält man

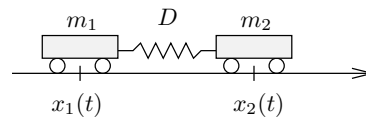
$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-a\tau}d\tau\right)}_{G(a)} e^{at} \\ &= G(a)e^{at} \\ &= G(a)f(t). \end{aligned}$$

Dies gilt für alle t , folglich ist

$$S(f) = G(a)f$$

und somit ist f Eigenfunktion von S mit Eigenwert $G(a)$.

Aufgabe 8. Zwei Wägen mit Massen m_1, m_2 sind auf einer horizontalen Geraden reibungsfrei über eine Feder mit Ruhelänge Null und Federkonstante D verbunden.



- Berechnen Sie die Kräfte, die auf die Wägen wirken und stellen Sie ein lineares DGL System zweiter Ordnung für die Positionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Wägen auf, d.h.

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= \dots \\ x_2''(t) &= \dots \end{aligned}$$

- Nehmen Sie als Hilfsgrößen die Geschwindigkeiten $v_1(t)$ und $v_2(t)$ der beiden Wagen dazu um aus dem DGL System zweiter Ordnung ein DGL System erster Ordnung mit 4 Gleichungen und den 4 Unbekannten $x_1(t), v_1(t), x_2(t), v_2(t)$ zu machen. Hinweis: Zwei der Gleichungen sind

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= v_1(t) \\x_2'(t) &= v_2(t)\end{aligned}$$

Die anderen beiden haben die Form

$$\begin{aligned}v_1'(t) &= \dots \\v_2'(t) &= \dots\end{aligned}$$

wobei $v' = a$ die Beschleunigung ist.

- Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ so dass

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

für alle t wobei

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

der Systemzustand ist.

- Was würde sich an der Matrix A ändern, wenn zusätzlich eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $F_R(t) = rv(t)$ dazukäme?

Lösung von Aufgabe 8. Alle Größen sind positiv nach rechts orientiert. Der Abstand der Wagen ist $x_2 - x_1$. Ein negativer Abstand bedeutet, dass der zweite Wagen links vom ersten steht.

Auf den ersten Wagen wirkt die Kraft

$$F_1 = D(x_2 - x_1).$$

Auf den zweiten Wagen wirkt die Kraft

$$F_2 = -D(x_2 - x_1).$$

Mit dem Trägheitsgesetz erhält man die Beschleunigungen

$$\begin{aligned}x_1'' &= \frac{D}{m_1}(x_2 - x_1) \\x_2'' &= -\frac{D}{m_2}(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Mit den Hilfsgrößen v_1, v_2 lässt sich x'' ersetzen durch v' und man erhält das DGL System erster Ordnung

$$\begin{aligned}x_1' &= v_1 \\x_2' &= v_2 \\v_1' &= \frac{D}{m_1}(x_2 - x_1) \\v_2' &= -\frac{D}{m_2}(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

Damit ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}'}_{\bar{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -D/m_1 & D/m_1 & 0 & 0 \\ D/m_2 & -D/m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{x(t)}$$

Bei einer zusätzlichen Reibungskraft wäre die Gesamtkraft auf die Wagen

$$\begin{aligned} F_1 &= D(x_2 - x_1) - rv_1 \\ F_2 &= -D(x_2 - x_1) - rv_2. \end{aligned}$$

Mit dem Trägheitsgesetz erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 v_1' &= D(x_2 - x_1) - rv_1 \\ m_2 v_2' &= -D(x_2 - x_1) - rv_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{D}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{r}{m_1}v_1 \\ v_2' &= -\frac{D}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{r}{m_2}v_2 \end{aligned}$$

In Matrix Darstellung erhält man das DGL System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}'}_{\bar{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -D/m_1 & D/m_1 & -r/m_1 & 0 \\ D/m_2 & -D/m_2 & 0 & -r/m_2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{x(t)}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor. Da A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten zueinander orthogonal sein. Prüfen Sie dies nach.

Lösung von Aufgabe 9.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnet man die Determinante wie folgt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) + (-1)(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 3.$$

An dem Eigenwert $\lambda_2 = 0$ erkennt man übrigens, dass A singularär ist.

- Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man $y = 0$ und $z = x$. Damit ist ein Eigenvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man $y = x$ und $z = -x$. Damit ist ein Eigenvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$. Aus

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man $y = -2x$ und $z = -x$. Damit ist ein Eigenvektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren sind paarweise orthogonal. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 &= 0 \\ \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3 &= 0 \\ \vec{v}_2 \circ \vec{v}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Sei \vec{v} Eigenvektor von A mit Eigenwert λ . Zeigen Sie, dass dann auch $c\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist für jedes $c \neq 0$.

Lösung von Aufgabe 10. Sei \vec{v} Eigenvektor von A mit Eigenwert λ , d.h.

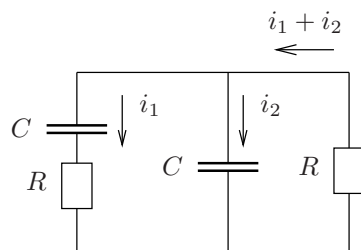
$$\vec{v} \neq \vec{0} \text{ und } A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Sei $c \neq 0$. Dann ist $c\vec{v} \neq \vec{0}$ und

$$\begin{aligned} A(c\vec{v}) &= cA\vec{v} \\ &= c\lambda\vec{v} \\ &= \lambda(c\vec{v}), \end{aligned}$$

d.h. $c\vec{v}$ ist Eigenvektor von A mit Eigenwert λ .

Aufgabe 11. In folgendem Bild ist eine elektrische Schaltung bestehend aus zwei gleichen Widerständen mit R Ohm und zwei gleichen Kondensatoren mit $C \mu F$ dargestellt.



Berechnen Sie die allgemeine Lösung für die Spannung an den Kondensatoren für $t \geq 0$.

Lösung von Aufgabe 11. Aus der Maschenregel folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{C} + R(i_1 + i_2) &= 0 \\ \frac{q_1}{C} + Ri_1 + R(i_1 + i_2) &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\tau = \frac{1}{RC}$$

folgt

$$\begin{aligned} \tau q_2 + i_1 + i_2 &= 0 \\ \tau q_1 + 2i_1 + i_2 &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$q'_1 = i_1, \quad q'_2 = i_2$$

folgt

$$\begin{aligned} q'_1 + q'_2 &= -\tau q_2 \\ 2q'_1 + q'_2 &= -\tau q_1. \end{aligned}$$

Auflösen nach q'_1 und q'_2 ergibt

$$\begin{aligned}q'_1 &= -\tau q_1 + \tau q_2 \\q'_2 &= -\tau q_2 - q'_1 \\ &= \tau q_1 - 2\tau q_2.\end{aligned}$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix}}_{\vec{q}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\tau & \tau \\ \tau & -2\tau \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{\vec{q}}.$$

Der Lösungsansatz

$$\vec{q} = \vec{v}e^{\lambda t}$$

führt auf das Eigenwertproblem

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -\tau - \lambda & \tau \\ \tau & -2\tau - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\tau + \lambda)(2\tau + \lambda) - \tau^2 \\ &= \lambda^2 + 3\tau\lambda + \tau^2.\end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-3\tau \pm \sqrt{9\tau^2 - 4\tau^2}}{2} \\ &= \frac{-3\tau \pm \sqrt{5}\tau}{2} \\ &= \tau \left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right).\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu λ_1 .

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \tau \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) x + y &= 0 \\ y &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) x.\end{aligned}$$

Ein Eigenvektor ist somit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu λ_2 .

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \tau \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x + y &= 0 \\ y &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x. \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor ist somit

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned} \vec{q} &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{(-3+\sqrt{5})/(2RC)t} + \\ & c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{5})/(2RC)t}. \end{aligned}$$

Für die Spannung gilt somit

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{c_1}{C} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{(-3+\sqrt{5})/(2RC)t} + \\ & \frac{c_2}{C} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{5})/(2RC)t}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $\vec{v}e^{\lambda t}$ eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Zeigen Sie, dass dann $\vec{v}e^{t/\lambda}$ eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A^{-1}\vec{x}(t)$$

ist.

Lösung von Aufgabe 12. Aus der Annahme folgt

$$\begin{aligned} (\vec{v}e^{\lambda t})' &= A\vec{v}e^{\lambda t} \\ \lambda\vec{v}e^{\lambda t} &= A\vec{v}e^{\lambda t} \\ A\vec{v} &= \lambda\vec{v}. \end{aligned}$$

Zu zeigen: Für $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{t/\lambda}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= A^{-1}\vec{x}(t) \quad \text{bzw.} \\ A\vec{x}'(t) &= \vec{x}(t). \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} A\vec{x}'(t) &= A(\vec{v}e^{t/\lambda})' \\ &= A\vec{v}(1/\lambda)e^{t/\lambda} \\ &= \lambda\vec{v}(1/\lambda)e^{t/\lambda} \\ &= \vec{v}e^{t/\lambda} \\ &= \vec{x}'(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A .
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems *zweiter* Ordnung

$$\vec{x}''(t) = A\vec{x}(t).$$

Hinweis: Wie bei DGL Systemen *erster* Ordnung erhalten Sie alle Basislösungen mit dem Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\lambda t}.$$

Lösung von Aufgabe 13.

- Aus der Gleichung

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

folgt durch Umformen

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}.$$

Diese Gleichung hat eine nichttriviale Lösung $\vec{v} \neq \vec{0}$ genau dann wenn $A - \lambda E$ singular ist bzw.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0. \\ A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 6 \\ -3 & 7 - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (-2 - \lambda)(7 - \lambda) + 18 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x + y &= 0 \\ y &= x \\ E_4 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x + 2y &= 0 \\ x &= 2y \\ E_1 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

- Mit dem Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\lambda t}$$

erhält man aus dem DGL System

$$\begin{aligned} \lambda^2 \vec{v}e^{\lambda t} &= A\vec{v}e^{\lambda t} \\ \lambda^2 \vec{v} &= A\vec{v}. \end{aligned}$$

Somit muss \vec{v} Eigenvektor von A sein mit Eigenwert λ^2 . Für λ erhält man damit vier Lösungen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1$$

bzw. vier linear unabhängige Basislösungen

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ \vec{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \\ \vec{x}_3(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \\ \vec{x}_4(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (C_3 e^t + C_4 e^{-t}).$$

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine reelle Matrix mit

$$A \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+j \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie alle reellen Lösungsfunktionen $\vec{x} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

- Berechnen Sie die Matrix A .

Lösung von Aufgabe 14. Es gilt

$$A \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\lambda = j$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix}$$

Eine komplexe Basislösung ist daher

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{v}e^{\lambda t} \\ &= \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix} e^{jt} \\ &= \begin{pmatrix} j(\cos(t) + j \sin(t)) \\ (1+j)(\cos(t) + j \sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da A reell ist, ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\bar{\vec{v}}$ und somit $\overline{\vec{x}(t)}$ eine Lösungsfunktion des DGL Systems. Da es sich um ein lineares, homogenes DGL System handelt, sind auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\vec{x}(t) + \overline{\vec{x}(t)}) &= \text{re}(\vec{x}(t)) \\ \frac{1}{2j}(\vec{x}(t) - \overline{\vec{x}(t)}) &= \text{im}(\vec{x}(t)) \end{aligned}$$

Lösungsfunktionen. Die allgemeine Lösung ist damit

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

Aus

$$A \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+j \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} a_{11}j + a_{12}(1 + j) &= -1 \\ a_{21}j + a_{22}(1 + j) &= -1 + j. \end{aligned}$$

Nimmt man von beiden Gleichungen den Real- und Imaginärteil und berücksichtigt, dass A reell ist, erhält man

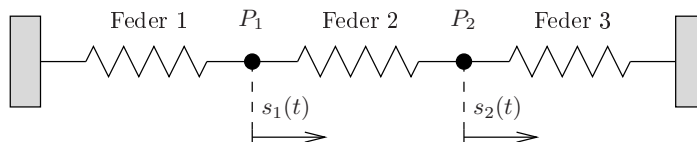
$$\begin{aligned} a_{12} &= -1 \\ a_{11} + a_{12} &= 0 \quad \text{und damit } a_{11} = 1 \\ a_{22} &= -1 \\ a_{21} + a_{22} &= 1 \quad \text{und damit } a_{21} = 2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15. In folgendem Bild ist ein mechanisches System mit drei Federungen und zwei Massepunkten P_1 und P_2 dargestellt. Alle Federkonstanten seien $D = 1$, die Massepunkte haben beide Masse $m = 1$.

In der Ruhelage sind alle Federungen entspannt, d.h. es wirken keine Kräfte. Die Auslenkung der Massepunkte aus der Ruhelage nach rechts wird mit $s_1(t)$ bzw. $s_2(t)$ beschrieben.



Berechnen Sie die allgemeine Lösung für $s_1(t)$ und $s_2(t)$ und gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Berechnen Sie die Dehnungen der drei Federn in Abhängigkeit von $s_1(t)$ und $s_2(t)$. Hinweis: Die Dehnung von Feder 2 ist $s_2(t) - s_1(t)$.
- Auf jeden Massepunkt wirken die Kräfte von zwei Federn. Überlegen Sie sich, welche Kraft nach links und welche nach rechts zieht. Berechnen Sie die resultierende Kraft auf jeden Massepunkt.
- Berechnen Sie die Beschleunigungen der Massepunkte $s_1''(t)$ und $s_2''(t)$ mit dem Trägheitsgesetz und stellen Sie ein lineares DGL System zweiter Ordnung auf.
- Formen Sie das DGL System durch Diagonalisierung so um, dass zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstehen.
- Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen mit dem $e^{\lambda t}$ Ansatz.
- Berechnen Sie hieraus die allgemeine Lösung des ursprünglichen DGL Systems.

Lösung von Aufgabe 15.

- Dehnung von Feder 1: $s_1(t)$, Dehnung von Feder 2: $s_2(t) - s_1(t)$, Dehnung von Feder 3: $-s_2(t)$.
- Kraft auf Massepunkt 1: $Ds_1(t)$ nach links und $D(s_2(t) - s_1(t))$ nach rechts. Resultierende Kraft nach rechts mit $D = 1$:

$$\begin{aligned}F_1 &= -Ds_1(t) + D(s_2(t) - s_1(t)) \\ &= -2s_1(t) + s_2(t).\end{aligned}$$

Kraft auf Massepunkt 2: $D(s_2(t) - s_1(t))$ nach links und $-Ds_2(t)$ nach rechts. Resultierende Kraft nach rechts mit $D = 1$:

$$\begin{aligned}F_2 &= D(s_1(t) - s_2(t)) - Ds_2(t) \\ &= s_1(t) - 2s_2(t).\end{aligned}$$

- Beschleunigung der Massepunkte nach rechts mit $m = 1$

$$\begin{aligned}s_1''(t) &= \frac{F_1}{m} \\ &= -2s_1(t) + s_2(t) \\ s_2''(t) &= \frac{F_2}{m} \\ &= s_1(t) - 2s_2(t).\end{aligned}$$

DGL System zweiter Ordnung:

$$\vec{s}''(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{s}(t).$$

- Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)^2 - 1 \\ &= (2 + \lambda)^2 - 1 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 3.\end{aligned}$$

Nullstellen.

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= -2 \pm 1 \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -3.\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x = -y$$
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$T^{-1}AT = \text{diag}(-1, -3) \text{ bzw.}$$
$$A = T \text{diag}(-1, -3) T^{-1}.$$

Aus dem DGL System

$$\vec{s}''(t) = A\vec{s}(t)$$

erhält man damit

$$\vec{s}''(t) = T \text{diag}(-1, -3) T^{-1} \vec{s}(t) \text{ bzw.}$$
$$T^{-1} \vec{s}''(t) = \text{diag}(-1, -3) T^{-1} \vec{s}(t).$$

Substitution

$$\vec{y}(t) = T^{-1} \vec{s}(t)$$

liefert das entkoppelte DGL System

$$\vec{y}''(t) = \text{diag}(-1, -3) \vec{y}(t)$$

bzw. die beiden voneinander unabhängigen Differentialgleichungen

$$y_1''(t) = -y_1(t)$$
$$y_2''(t) = -3y_2(t).$$

- Die DGL

$$y''(t) = ay(t)$$

löst man mit dem Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ und erhält

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= a \\ \lambda &= \pm\sqrt{a}.\end{aligned}$$

In den o.g. DGL ist $a = -1$ bzw. $a = -3$ so dass man konjugiert komplexe Basislösungen

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{jt} \\ y_2(t) &= e^{j\sqrt{3}t}\end{aligned}$$

bekommt, von denen man Real- und Imaginärteil nehmen muss. Somit ist

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11} \cos(t) + c_{12} \sin(t) \\ y_2(t) &= c_{21} \cos(\sqrt{3}t) + c_{22} \sin(\sqrt{3}t)\end{aligned}$$

- Rücksubstitution.

$$\begin{aligned}\vec{s}(t) &= T\vec{y}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \cos(t) + c_{12} \sin(t) \\ c_{21} \cos(\sqrt{3}t) + c_{22} \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \\ &= (c_{11} \cos(t) + c_{12} \sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (c_{21} \cos(\sqrt{3}t) + c_{22} \sin(\sqrt{3}t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t)\end{aligned}$$

mit der Eigenwertmethode.

Lösung von Aufgabe 16. Matrix Darstellung:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(-2-\lambda) + 8 \\ &= \lambda^2 - 4 + 8 \\ &= \lambda^2 + 4 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lösung

$$\lambda_1 = 2j, \quad \lambda_2 = -2j.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2j$

$$\begin{pmatrix} 2-2j & -2 \\ 4 & -2-2j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} (2-2j)x &= 2y \\ y &= (1-j)x \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor ist z.B.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-j \end{pmatrix}.$$

Eine Komplexe Lösungsfunktion ist

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-j \end{pmatrix} e^{2jt} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) + j \sin(2t) \\ (1-j)(\cos(2t) + j \sin(2t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reelle Basislösungen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 17. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine singuläre Matrix. Begründen Sie, weshalb in diesem Fall die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

auch zeitkonstante Lösungsfunktionen enthält. Sie dürfen in der Begründung alle Ihnen bekannten Eigenschaften von singulären Matrizen verwenden.

Lösung von Aufgabe 17. Wenn A singulär ist, hat das homogene LGS

$$A\vec{c} = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung $\vec{c} \neq \vec{0}$. Damit ist

$$\vec{x}(t) = \vec{c}$$

eine Lösungsfunktion, wie man durch Einsetzen verifiziert. Es gilt

$$\vec{x}'(t) = \vec{0} \text{ und } A\vec{x}(t) = \vec{0}.$$

Eine andere Begründung lässt sich mit der Eigenwertmethode finden. Da A singular ist, hat A einen Eigenwert Null. Damit ist

$$\vec{v}e^{0t} = \vec{v}$$

eine zeitkonstante Lösungsfunktion wobei \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert Null ist.