

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 15

Aufgabe 1. Berechnen Sie die inverse Fourier Transformierte von

$$F(\omega) = je^{\omega}\delta(\omega - 1).$$

Lösung von Aufgabe 1. Mit der Ausblendeigenschaft gilt

$$\begin{aligned} je^{\omega}\delta(\omega - 1) &= je\delta(\omega - 1) \\ \delta(\omega) &\bullet\text{---}\circ \frac{1}{2\pi} \\ \delta(\omega - 1) &\bullet\text{---}\circ \frac{1}{2\pi}e^{jt} \\ je\delta(\omega - 1) &\bullet\text{---}\circ \frac{je}{2\pi}e^{jt}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(t) = \frac{je}{2\pi}e^{jt}.$$

Aufgabe 2. Sei

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Übertragungsfunktion eines Hochpass Filters mit cutoff Frequenz 1. Berechnen Sie die Impulsantwort $f(t)$ dieses Filters.

Hinweis: Die direkte Anwendung der Formel für die inverse Fourier Transformation funktioniert hier nicht, da im Zeitbereich eine Distribution entsteht. Sie müssen daher zunächst $F(\omega)$ in eine Summe von Funktionen zerlegen, deren Rücktransformation einfacher geht.

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$F(\omega) = 1 - G(\omega).$$

Rücktransformation von $G(\omega)$.

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi j t} [e^{j\omega t}]_{-1}^1 \quad \text{falls } t \neq 0 \\
 &= \frac{1}{2\pi j t} (e^{jt} - e^{-jt}) \\
 &= \frac{1}{\pi t} \sin(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \text{si}(t).
 \end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhält man

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^0 d\omega = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \text{si}(0).$$

Damit ist

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \text{si}(t) \text{ für alle } t.$$

Rücktransformation von $F(\omega)$.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= 1 - G(\omega) \\
 &\bullet\text{---}\circ \delta(t) - \frac{1}{\pi} \text{si}(t).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Ableitung $f'(t)$ von $f(t)$ und beachten Sie den Spezialfall $\omega = 0$.

Hinweis: Da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, ist $f'(t)$ gerade. Vereinfachen Sie das Ergebnis daher so, dass keine komplexen Zahlen darin vorkommen.

Lösung von Aufgabe 3. Die Funktion $f(t)$ hat zwei Sprünge der Höhe -1 an den Stellen $t = \pm 1$. Damit ist die Ableitung

$$f'(t) = -\delta(t-1) - \delta(t+1) + \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
 f'(t) &\circ\text{---}\bullet -e^{-j\omega} - e^{j\omega} + \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt \\
 &= -(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) - \frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-1}^1, \quad \omega \neq 0 \\
 &= -2 \cos(\omega) - \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - e^{j\omega}) \\
 &= -2 \cos(\omega) + \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\
 &= -2 \cos(\omega) + \frac{1}{j\omega} 2j \sin(\omega) \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega) - 2 \cos(\omega).
 \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ erhält man

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet -2 + \int_{-1}^1 dt = 0.$$

Damit ist

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega) - 2 \cos(\omega) & \text{für } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0. \end{cases}$$

Alternativ hätte man auch zuerst die Fourier Transformierte von $f(t)$ berechnen können:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_{-1}^1 t e^{-j\omega t} dt \\
 &= \left[t \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{-j\omega} \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \neq 0 \\
 &= -\frac{1}{j\omega} [t e^{-j\omega t}]_{-1}^1 - \frac{1}{(j\omega)^2} [e^{-j\omega t}]_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} + e^{j\omega}) + \frac{1}{\omega^2} (e^{-j\omega} - e^{j\omega}) \\
 &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} + e^{j\omega}) - \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\
 &= \frac{2j}{\omega} \cos(\omega) - \frac{2j}{\omega^2} \sin(\omega) \\
 f'(t) &\circ\text{---}\bullet j\omega \left(\frac{2j}{\omega} \cos(\omega) - \frac{2j}{\omega^2} \sin(\omega) \right) \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega) - 2 \cos(\omega).
 \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
 f(t) &\circ\text{---}\bullet \int_{-1}^1 t dt = 0 \\
 f'(t) &\circ\text{---}\bullet j\omega 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Die Fourier Transformierte $S(\omega)$ der Sprungfunktion $\sigma(t)$ kann man wie folgt berechnen. Aus

$$f'(t) \circ\text{---}\bullet j\omega F(\omega)$$

folgt mit $f(t) = \sigma(t)$

$$\sigma'(t) \circ\text{---}\bullet j\omega S(\omega).$$

Da $\sigma'(t) = \delta(t)$ und $\delta(t) \circ\text{---}\bullet 1$ folgt

$$\sigma'(t) \circ\text{---}\bullet 1.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} j\omega S(\omega) &= 1 \\ S(\omega) &= \frac{1}{j\omega}. \end{aligned}$$

Dies kann jedoch nicht sein: Da $1/j\omega$ rein imaginär ist, müsste $\sigma(t)$ eine ungerade Funktion sein, was nicht stimmt. Finden Sie den Fehler, korrigieren Sie diesen und leiten Sie damit den korrekten Wert für $S(\omega)$ her.

Lösung von Aufgabe 4. Bei der Division durch ω muss man den Fall $\omega = 0$ ausschließen. Die Fourier Transformierte gibt an der Stelle $\omega = 0$ den Gleichanteil der Zeitbereichsfunktion an. Somit ist $1/j\omega$ die Fourier Transformierte von $\sigma(t)$ bis auf einen Gleichanteil, d.h. einen konstanten Summanden C . Damit gilt

$$\sigma(t) + C \circ\text{---}\bullet \frac{1}{j\omega}.$$

Die Konstante C muss nun so gewählt werden, dass $\sigma(t) + C$ tatsächlich eine ungerade Funktion ist. Dies führt zum Wert $C = -1/2$ bzw.

$$\sigma(t) - \frac{1}{2} \circ\text{---}\bullet \frac{1}{j\omega}.$$

Aus

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\circ\text{---}\bullet S(\omega) \\ -\frac{1}{2} &\circ\text{---}\bullet -\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

Folgt

$$\begin{aligned} S(\omega) - \pi\delta(\omega) &= \frac{1}{j\omega} \\ S(\omega) &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie man die Impulsantwort eines LTI Systems experimentell mit Hilfe der Fourier Transformation bestimmen kann. Sei

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos(\omega t) \\ f_2(t) &= \sin(\omega t) \\ f_3(t) &= e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Von einem LTI System S kann

$$S(f_1) = h_1$$

für beliebiges $\omega \in \mathbb{R}$ gemessen werden.

- Berechnen Sie $S(f_2)$ und $S(f_3)$ in Abhängigkeit von h_1 .
- Zeigen Sie, dass

$$S(e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} G(\omega)$$

wobei $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems S ist.

- Wie kann man hiermit die Impulsantwort von S berechnen? Beachten Sie, dass alle Funktionen von ω abhängig sind, obwohl nur die Abhängigkeit von t explizit genannt wird.

Lösung von Aufgabe 5. Aus

$$\sin(t) = \cos(t - \pi/2)$$

folgt

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2\omega}\omega\right) \\ &= \cos\left(\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right).$$

Da S zeitinvariant ist, folgt

$$h_2(t) = [S(f_2)](t) = [S(f_1)]\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) = h_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right).$$

Da

$$f_3(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) = (f_1 + j f_2)(t)$$

und S linear ist, folgt

$$h_3(t) = [S(f_3)](t) = [S(f_1 + j f_2)](t) = (h_1 + j h_2)(t).$$

Da S LTI ist, gilt

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} G(\omega) \\ &= h_3(t) \end{aligned}$$

wobei $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ von S ist. Damit ist

$$G(\omega) = e^{-j\omega t} h_3(t).$$

Folglich erhält man $g(t)$ durch inverse Fourier Transformation

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} h_3(t) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(t) d\omega. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass $h_3(t)$ von ω abhängig ist, d.h. kein konstanter Faktor ist.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und

$$F(\omega) = \begin{cases} e^{-j\varphi} e^{-a\omega} & \text{falls } \omega > 0 \\ e^{j\varphi} e^{a\omega} & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die inverse Fourier Transformierte $f(t)$ von $F(\omega)$. Hinweis: Es gilt $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, folglich ist $f(t)$ reell.
- Berechnen Sie dann für $t \neq 0$

$$g(t) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} f(t).$$

Dies ist die inverse Fourier Transformierte von

$$G(\omega) = \begin{cases} e^{-j\varphi} & \text{falls } \omega > 0 \\ e^{j\varphi} & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

Eine Faltung mit $g(t)$ bedeutet somit, dass alle im Signal enthaltenen Schwingungen unabhängig von ihrer Frequenz $\omega > 0$ die selbe Phasenverschiebung $-\varphi$ erfahren. Weiterhin gilt

$$G(\omega) + \overline{G(\omega)} = 2\text{re}(G(\omega)) = \begin{cases} 2 \cos(\varphi) & \text{für } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0. \end{cases}$$

Folglich gilt im Zeitbereich

$$g(t) + g(-t) = 2 \cos(\varphi) \delta(t).$$

Sie können damit verifizieren, dass $g(-t) = -g(t)$ für $t \neq 0$ gelten muss. An der Stelle $t = 0$ hat $g(t)$ jedoch einen Impuls $\cos(\varphi)\delta(t)$, den Sie auf die zuvor berechnete Funktion $g(t)$ addieren müssen, um die inverse Fourier Transformierte von $G(\omega)$ auch im Fall $t = 0$ zu erhalten.

Im Spezialfall $\varphi = 0$ werden die Schwingungen nicht verschoben und das Signal bleibt bei Faltung mit $g(t)$ unverändert. Folglich muss in diesem Fall $g(t) = \delta(t)$ sein.

Im Spezialfall $\varphi = \pi$ werden alle Schwingungen um Winkel π verschoben und somit wird das Signal negiert. In diesem Fall muss folglich $g(t) = -\delta(t)$ sein. Verifizieren Sie dies.

- Berechnen Sie schließlich die Funktion $h(t)$, die man aus $g(t)$ im Spezialfall $\varphi = \pi/2$ erhält. Dies ist dann die inverse Fourier Transformierte von

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \text{falls } \omega > 0 \\ j & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

Das LTI System mit Impulsantwort $h(t)$ heißt Hilbert Transformation und spielt in der Signalverarbeitung (Single Side Band Modulation) eine wichtige Rolle und wird u.a. in Ultraschallgeräten verwendet.

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 e^{j\varphi} e^{a\omega} e^{j\omega t} d\omega \right) \end{aligned}$$

Substituiert man im zweiten Integral ω durch $-\omega$ erhält man

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega + \int_\infty^0 e^{j\varphi} e^{-a\omega} e^{-j\omega t} (-d\omega) \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega + \int_0^\infty e^{j\varphi} e^{-a\omega} e^{-j\omega t} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega + \overline{\int_0^\infty e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left(\int_0^\infty e^{-j\varphi} e^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left(e^{-j\varphi} \int_0^\infty e^{\omega(-a+jt)} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left(e^{-j\varphi} \frac{1}{-a+jt} \left[e^{\omega(-a+jt)} \right]_0^\infty \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left(e^{-j\varphi} \frac{1}{-a+jt} (0-1) \right) \quad \text{da } a > 0 \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left(e^{-j\varphi} \frac{1}{a-jt} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi(a^2+t^2)} \operatorname{re}((\cos(\varphi) - j \sin(\varphi))(a+jt)) \\
 &= \frac{1}{\pi(a^2+t^2)} (a \cos(\varphi) + t \sin(\varphi)).
 \end{aligned}$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert $a \rightarrow 0^+$ erhält man mit $t \neq 0$

$$g(t) = \frac{1}{\pi t^2} (t \sin(\varphi)) = \frac{\sin(\varphi)}{\pi t}.$$

Die inverse Fourier Transformierte von $G(\omega)$ auch im Spezialfall $t = 0$ ist

$$g(t) = \frac{\sin(\varphi)}{\pi t} + \cos(\varphi) \delta(t).$$

Für $\varphi = 0$ erhält man

$$g(t) = \delta(t).$$

Für $\varphi = \pi$ erhält man

$$g(t) = -\delta(t).$$

Für $\varphi = \pi/2$ erhält man

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

Aufgabe 7. Sei $f(t)$ an der Stelle \hat{t} stetig und

$$\sigma(t - \hat{t}) f(t) \circ \bullet F(s).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t - \hat{t}) f'(t).$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}\sigma(t - \hat{t})f'(t) &\circ\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \hat{t})f'(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{\hat{t}}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_{\hat{t}}^{\infty} - \int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Da $\sigma(t - \hat{t})f(t)$ eine Laplace Transformierte hat, existiert das Integral

$$\int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

und damit ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0.$$

Folglich ist

$$[f(t)e^{-st}]_{\hat{t}}^{\infty} = -f(\hat{t})e^{-s\hat{t}}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma(t - \hat{t})f'(t) &\circ\bullet -f(\hat{t})e^{-s\hat{t}} + s \int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= s \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \hat{t})f(t)e^{-st} dt - f(\hat{t})e^{-s\hat{t}} \\ &= sF(s) - f(\hat{t})e^{-s\hat{t}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t) \frac{\cos(t)}{e^{t-1}}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}f(t) &= \sigma(t) \frac{\cos(t)}{e^{t-1}} \\ &= \cos(t)e^{-t+1} \\ &= e \cos(t)e^{-t}.\end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\cos(t) \circ\bullet \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Mit dem Dämpfungssatz

$$f(t)e^{-at} \circ\bullet F(s + a)$$

folgt für $a = 1$

$$\cos(t)e^{-t} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.$$

Mit der Linearität folgt

$$f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad e \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t-1) \sin(t-1)$$

und von

$$f(t) = \sigma(t) \sin(t-1).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Hinweis: Bei der zweiten Transformation müssen Sie die Sinus Funktion durch komplexe e -Funktionen darstellen und das Laplace Integral berechnen.

Lösung von Aufgabe 9. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t) \sin(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{s^2+1}.$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$\sigma(t-1) \sin(t-1) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

Die zweite Laplace Transformierte erhält man mit

$$\begin{aligned} \sin(t-1) &= \operatorname{im}(e^{j(t-1)}) \\ &= \frac{1}{2j} \left(e^{j(t-1)} - e^{-j(t-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(e^{jt} e^{-j} - e^{-jt} e^j \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) \sin(t-1) &\circ\text{---}\bullet \int_0^\infty \sin(t-1)e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{jt}e^{-j}e^{-st} - e^{-jt}e^je^{-st}) dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{(j-s)t}e^{-j} - e^{(-j-s)t}e^j) dt \\
 &= \frac{e^{-j}}{2j} \int_0^\infty e^{(j-s)t} dt - \frac{e^j}{2j} \int_0^\infty e^{(-j-s)t} dt \\
 &= \frac{e^{-j}}{2j} \frac{1}{j-s} [e^{(j-s)t}]_0^\infty + \frac{e^j}{2j} \frac{1}{j+s} [e^{(-j-s)t}]_0^\infty \\
 &= -\frac{e^{-j}}{2j(j-s)} - \frac{e^j}{2j(j+s)} \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{e^{-j}(j+s) + e^j(j-s)}{s^2+1} \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{(\cos(1) - j \sin(1))(j+s) + (\cos(1) + j \sin(1))(j-s)}{s^2+1} \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{2j \cos(1) - 2js \sin(1)}{s^2+1} \\
 &= \frac{\cos(1) - s \sin(1)}{s^2+1}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) = \frac{3+s}{e^{2s}(s^2-1)}.$$

Lösung von Aufgabe 10. Zunächst wird der Term

$$\frac{3+s}{s^2-1}$$

zurücktransformiert. Faktorisierung des Nenners und Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}
 \frac{3+s}{(s-1)(s+1)} &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s+1} \\
 3+s &= c_1(s+1) + c_2(s-1).
 \end{aligned}$$

Spezialfall $s = -1$

$$\begin{aligned}
 2 &= -2c_2 \\
 c_2 &= -1.
 \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 1$

$$\begin{aligned}
 4 &= 2c_1 \\
 c_1 &= 2.
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{3+s}{s^2-1} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

$$\bullet \circ \sigma(t) (2e^t - e^{-t}).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$\frac{3+s}{e^{2s}(s^2-1)} = e^{-2s} \frac{3+s}{s^2-1}$$

$$\bullet \circ \sigma(t-2) (2e^{t-2} - e^{2-t})$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie eine Folge f_k mit

$$(\sigma_k f_{k+1}) * f_k = f_k$$

$$f_0 = 3$$

$$f_k = 0 \quad \text{für } k < 0.$$

Lösung von Aufgabe 11. Da $f_k = 0$ für $k < 0$ gilt $\sigma_k f_k = f_k$ für alle k . Sei

$$\sigma_k f_k \circ \bullet F(z).$$

Dann gilt laut Formelsammlung

$$\sigma_k f_{k+1} \circ \bullet z(F(z) - f_0)$$

$$= z(F(z) - 3)$$

z -Transformation der Gleichung ergibt mit dem Faltungssatz

$$z(F(z) - 3)F(z) = F(z)$$

$$z(F(z) - 3) = 1$$

$$F(z) - 3 = z^{-1}$$

$$F(z) = 3 + z^{-1}$$

$$\bullet \circ 3\delta_k + \delta_{k-1}$$

$$= \langle 3, 1, 0, 0, \dots \rangle.$$

Aufgabe 12. Sei S ein Übertragungskanal, der das Eingangssignal f um einen Takt verzögert, d.h.

$$[S(f)]_k = f_{k-1},$$

bzw.

$$S(f) = f_{.-1}$$

oder

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \dots \rangle) = \langle 0, f_0, f_1, f_2, \dots \rangle$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S .

- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.
- Es ist technisch nicht möglich, diesen Kanal zu kompensieren da man dazu einen Takt in die Zukunft schauen müsste. Trotzdem gibt es eine Folge g so dass

$$S(f) * g = f$$

für alle Folgen f . Die Folge g ist allerdings nicht kausal, d.h. die Eigenschaft

$$g_k = 0 \text{ für } k < 0$$

ist *nicht* erfüllt. Bestimmen Sie diese Folge g_k .

Lösung von Aufgabe 12. Die Impulsantwort ist

$$\begin{aligned} [S(\delta)]_k &= \delta_{k-1} \\ S(\delta) &= \delta_{-1} \\ &= \langle 0, 1, 0, \dots \rangle. \end{aligned}$$

S ist linear, da

$$\begin{aligned} S(f+g)_k &= (f+g)_{k-1} \\ &= f_{k-1} + g_{k-1} \\ &= S(f)_k + S(g)_k \\ &= (S(f) + S(g))_k \\ S(af)_k &= (af)_{k-1} \\ &= af_{k-1} \\ &= aS(f)_k \\ &= (aS(f))_k \end{aligned}$$

S ist zeitinvariant. Zu zeigen ist

$$S(f_{-k}) = [S(f)]_{-k}$$

bzw.

$$S(f_{-k})_k = [S(f)]_{k-k} \text{ für alle } k.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} S(f_{-k})_k &= (f_{-k-1})_k \\ &= f_{k-k-1} \\ &= (f_{-1})_{k-k} \\ &= [S(f)]_{k-k} \end{aligned}$$

Die Folge g , mit der man den Kanal kompensieren kann, erfüllt

$$S(f) * g = f$$

für alle f bzw.

$$(S(f) * g)_k = f_k.$$

Mit der Definition der diskreten Faltung erhält man

$$\sum_{\ell} [S(f)]_{\ell} g_{k-\ell} = f_k.$$

Mit $[S(f)]_{\ell} = f_{\ell-1}$ erhält man

$$\sum_{\ell} f_{\ell-1} g_{k-\ell} = f_k.$$

Von der Summe darf also nur der Summand übrigbleiben mit $\ell - 1 = k$ bzw. $\ell = k + 1$. Der zugehörige Faktor von g ist in diesem Summanden

$$\begin{aligned} g_{k-\ell} &= g_{k-k+1} \\ &= g_{-1}. \end{aligned}$$

Es müssen also alle g_k Null sein außer g_{-1} , d.h.

$$g_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq -1 \\ 1 & \text{falls } k = -1 \end{cases}$$

Aufgabe 13. Sei

$$g_k = a^k.$$

Berechnen Sie eine Folge h_k so dass

$$(g * h)_k = \delta_{k-1}.$$

Lösung von Aufgabe 13. Aus

$$(g * h)_k = \delta_{k-1}$$

erhält man mit dem Faltungssatz der z -Transformation

$$G(z)H(z) = z^{-1}.$$

Mit

$$G(z) = \frac{z}{z-a}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-a}H(z) &= \frac{1}{z} \\ H(z) &= \frac{z-a}{z^2} \\ &= z^{-2}(z-a) \\ &= z^{-1} - az^{-2}. \end{aligned}$$

Inverse z -Transformation liefert

$$h_k = \delta_{k-1} - a\delta_{k-2}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die inverse z -Transformierte f_k der Funktion

$$F(z) = \frac{z}{(z-2)^3}$$

mit Partialbruchzerlegung und der Korrespondenz

$$a^{k-n} \binom{k-1}{n-1} \circ \bullet \frac{1}{(z-a)^n}.$$

Berechnen Sie dann f_0, f_1, f_2 und f_3 .

Lösung von Aufgabe 14. Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-2)^3} &= \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{(z-2)^2} + \frac{c_3}{(z-2)^3} \\ z &= c_1(z-2)^2 + c_2(z-2) + c_3. \end{aligned}$$

Für $z = 2$ erhält man

$$2 = c_3.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} z-2 &= c_1(z-2)^2 + c_2(z-2) \\ 1 &= c_1(z-2) + c_2. \end{aligned}$$

Für $z = 2$ erhält man

$$1 = c_2.$$

Einsetzen ergibt

$$0 = c_1(z-2)$$

und

$$c_1 = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{2}{(z-2)^3} \\ \bullet \circ & 2^{k-2} \binom{k-1}{1} + 2 \cdot 2^{k-3} \binom{k-1}{2} \\ &= 2^{k-2} \binom{k-1}{1} + 2^{k-2} \binom{k-1}{2} \\ &= 2^{k-2} \left(\binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Für spezielle Werte von k erhält man

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 0 \\ f_2 &= 2^0(1+0) = 1 \\ f_3 &= 2(2+1) = 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und f eine Folge mit

$$f_k = \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^n a_i f_{k-i} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge f_k ist durch diese Gleichung nicht eindeutig definiert. Es gibt jedoch genau eine solche Folge f_k , die eine z -Transformierte $F(z)$ hat. Berechnen Sie dieses $F(z)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine negativen Potenzen von z darin auftreten.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned} F(z) &= z + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} F(z) \\ &= z + F(z) \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \\ F(z) \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \right) &= z \\ F(z) &= \frac{z}{1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} \\ &= \frac{z^{n+1}}{z^n - \sum_{i=1}^n a_i z^{n-i}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $u \neq -1$,

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \leq 0 \\ 1 & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = (1-u)f_{k+1} + uf_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z -Transformierte $F(z)$ von f_k . Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k (1-u)f_{k+1} + \sigma_k u f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Für welche Werte von u hat die Folge f_k einen endlichen Grenzwert? Berechnen Sie diesen.

Lösung von Aufgabe 16. Sei

$$\sigma_k f_k = F(z).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma_k f_{k+1} &= z \left(F(z) - \sum_{k=0}^0 f_k z^{-k} \right) = zF(z) \\ \sigma_k f_{k+2} &= z^2 \left(F(z) - \sum_{k=0}^1 f_k z^{-k} \right) = z^2 F(z) - z.\end{aligned}$$

Damit hat man im Bildbereich

$$\begin{aligned}z^2 F(z) - z &= (1-u)zF(z) + uF(z) \\ z^2 F(z) - (1-u)zF(z) - uF(z) &= z \\ F(z)(z^2 + (u-1)z - u) &= z \\ F(z) &= \frac{z}{z^2 + (u-1)z - u}\end{aligned}$$

Faktorisierung des Nenners.

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= \frac{1-u \pm \sqrt{(u-1)^2 + 4u}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm \sqrt{u^2 + 2u + 1}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm \sqrt{(u+1)^2}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm |u+1|}{2} \\ &= \frac{1-u \pm (u+1)}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}z_1 &= 1 \\ z_2 &= -u.\end{aligned}$$

Da $u \neq -1$ hat man zwei einfache, reelle Nullstellen.

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{z}{(z-1)(z+u)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+u} \\ z &= c_1(z+u) + c_2(z-1).\end{aligned}$$

Spezialfall $z = 1$ ergibt

$$\begin{aligned}1 &= c_1(1+u) \\ c_1 &= \frac{1}{1+u}\end{aligned}$$

Spezialfall $z = -u$ ergibt

$$\begin{aligned}-u &= c_2(-u-1) \\ c_2 &= \frac{u}{1+u}\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(z) = \frac{1}{1+u} \frac{1}{z-1} + \frac{u}{1+u} \frac{1}{z+u}.$$

Rücktransformation ergibt

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_{k-1} \left(\frac{1}{1+u} 1^{k-1} + \frac{u}{1+u} (-u)^{k-1} \right) \\ &= \sigma_{k-1} \frac{1}{1+u} (1 + u(-u)^{k-1}) \\ &= \sigma_{k-1} \frac{1}{1+u} (1 - (-u)^k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ \frac{1}{1+u} (1 - (-u)^k) & \text{für } k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Folge ist konvergent falls $|-u| < 1$ bzw. $|u| < 1$. In diesem Fall ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \frac{1}{1+u}.$$

Aufgabe 17. Sei

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ a & \text{falls } k = 0 \\ b & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = \frac{1}{4} f_{k+1} + \frac{3}{4} f_k \quad \text{für } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z -Transformierte $F(z)$ von f_k . Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k \frac{1}{4} f_{k+1} + \sigma_k \frac{3}{4} f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Berechnen Sie den Grenzwert von f_k für $k \rightarrow \infty$.

Lösung von Aufgabe 17. Sei

$$\sigma_k f_k = F(z).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_k f_{k+1} &= z \left(F(z) - \sum_{k=0}^0 f_k z^{-k} \right) = zF(z) - za \\ \sigma_k f_{k+2} &= z^2 \left(F(z) - \sum_{k=0}^1 f_k z^{-k} \right) = z^2 F(z) - z^2 a - zb. \end{aligned}$$

Damit hat man im Bildbereich

$$\begin{aligned} z^2 F(z) - z^2 a - zb &= \frac{1}{4}(zF(z) - za) + \frac{3}{4}F(z) \\ z^2 F(z) - \frac{1}{4}zF(z) - \frac{3}{4}F(z) &= z^2 a + zb - \frac{1}{4}za \\ F(z)(4z^2 - z - 3) &= 4az^2 + (4b - a)z \\ F(z) &= \frac{4az^2 + (4b - a)z}{4z^2 - z - 3} \end{aligned}$$

Polynomdivision ergibt

$$F(z) = a + \frac{4bz + 3a}{4z^2 - z - 3}.$$

Nullstellen des Nenners.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8} \\ z_1 &= 1 \\ z_2 &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{4bz + 3a}{4z^2 - z - 3} &= \frac{4bz + 3a}{4(z - 1)(z + 3/4)} \\ &= \frac{bz + 3a/4}{(z - 1)(z + 3/4)} \\ &= \frac{c_1}{z - 1} + \frac{c_2}{z + 3/4} \\ bz + 3a/4 &= c_1(z + 3/4) + c_2(z - 1). \end{aligned}$$

Spezialfall $z = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} b + 3a/4 &= c_1(1 + 3/4) \\ 4b + 3a &= 7c_1 \\ c_1 &= \frac{4b + 3a}{7}. \end{aligned}$$

Spezialfall $z = -3/4$ ergibt

$$\begin{aligned} -3b/4 + 3a/4 &= c_2(-3/4 - 1) \\ -3b + 3a &= c_2(-7) \\ c_2 &= \frac{3b - 3a}{7} \end{aligned}$$

Damit ist

$$F(z) = a + \frac{4b + 3a}{7} \frac{1}{z - 1} + \frac{3b - 3a}{7} \frac{1}{z + 3/4}.$$

Mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{z - a} = z^{-1} \frac{z}{z - a} \bullet \circ \sigma_{k-1} a^{k-1}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 f_k &= a\delta(k) + \sigma_{k-1} \left(\frac{4b+3a}{7} 1^k + \frac{3b-3a}{7} (-3/4)^{k-1} \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ a & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{7} (4b+3a + 3(b-a)(-3/4)^{k-1}) & \text{für } k > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-3/4)^{k-1} = 0$$

folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \frac{4b+3a}{7}.$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie die inverse z -Transformierte von

$$F(z) = \frac{1+z^{-2}}{z^4+z^5}.$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned}
 \frac{1+z^{-2}}{z^4+z^5} &= \frac{1}{z^4+z^5} + \frac{1}{z^6+z^7} \\
 &= z^{-4} \frac{1}{z+1} + z^{-6} \frac{1}{z+1}
 \end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{z-a} &\bullet\text{---}\circ \sigma_k a^k \\
 \frac{z}{z+1} &\bullet\text{---}\circ \sigma_k (-1)^k \\
 \frac{1}{z+1} &\bullet\text{---}\circ \sigma_{k-1} (-1)^{k-1} \\
 z^{-4} \frac{1}{z+1} &\bullet\text{---}\circ \sigma_{k-5} (-1)^{k-5} = -\sigma_{k-5} (-1)^k \\
 z^{-6} \frac{1}{z+1} &\bullet\text{---}\circ \sigma_{k-7} (-1)^{k-7} = -\sigma_{k-7} (-1)^k.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$F(z) = -(\sigma_{k-5} + \sigma_{k-7})(-1)^k.$$

Alternativ hätte man die Aufgabe auch so lösen können:

$$\begin{aligned}
 \frac{1+z^{-2}}{z^4+z^5} &= \frac{z^2+1}{z^6+z^7} \\
 &= \frac{z^2+1}{z^6(1+z)} \\
 &= z^{-6} \frac{z^2+1}{z+1}.
 \end{aligned}$$

Polynomdivision.

$$\frac{z^2 + 1}{z + 1} = z - 1 + \frac{2}{z + 1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z^{-6} \frac{z^2 + 1}{z + 1} &= z^{-5} - z^{-6} + z^{-6} \frac{2}{z + 1} \\ &= z^{-5} - z^{-6} + 2z^{-7} \frac{z}{z + 1}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{z}{z + 1} \bullet \circ \sigma_k(-1)^k$$

folgt

$$\begin{aligned} f_k &= \delta_{k-5} - \delta_{k-6} + 2\sigma_{k-7}(-1)^{k-7} \\ &= \delta_{k-5} - \delta_{k-6} - 2\sigma_{k-7}(-1)^k \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 5 \\ 1 & \text{falls } k = 5 \\ -1 & \text{falls } k = 6 \\ -2(-1)^k & \text{falls } k > 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Mit dem Faltungssatz der Laplace Transformation erhält man

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) \circ \bullet \frac{1}{s^n}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t)t^{n-1} \circ \bullet \frac{(n-1)!}{s^n}.$$

Daraus folgt

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sigma(t)t^{n-1}.$$

Beweisen Sie dies nun durch Induktion im Zeitbereich (d.h. ohne Laplace Transformation).

Lösung von Aufgabe 19.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sigma(t) = \frac{1}{0!} \sigma(t)t^0.$$

- Induktionsannahme: Für ein festes n gelte

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sigma(t)t^{n-1}.$$

- Induktionsschritt. Zu zeigen:

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+1 \text{ Mal}}(t) = \frac{1}{n!} \sigma(t) t^n.$$

Da die Faltung mit σ eine Integration bewirkt, erhält man mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+1 \text{ Mal}}(t) &= \underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) \\ &= \left(\frac{1}{(n-1)!} \sigma(t) t^{n-1} \right) * \sigma(t) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) \tau^{n-1} d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sigma(t) \int_0^t \tau^{n-1} d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sigma(t) \frac{1}{n} [\tau^n]_0^t \\ &= \sigma(t) \frac{1}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. Das de Morgansche Gesetz

$$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$$

lässt sich auf $n \geq 2$ Variablen verallgemeinern:

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) = \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_n.$$

Beweisen Sie dies durch Induktion.

Lösung von Aufgabe 20.

- Induktionsanfang. Für $n = 2$ gilt das de Morgansche Gesetz

$$\neg(F_1 \wedge F_2) = \neg F_1 \vee \neg F_2.$$

- Induktionsannahme. Für ein festes $n \geq 2$ gelte

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) = \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_n.$$

- Induktionsschritt. Zu zeigen: Für dieses n gilt

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_{n+1}) = \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_{n+1}.$$

Mit der Induktionsannahme und dem Assoziativgesetz von \wedge und \vee gilt

$$\begin{aligned} \neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_{n+1}) &= \neg((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge F_{n+1}) \\ &= \neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \vee \neg F_{n+1} \\ &= (\neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_n) \vee \neg F_{n+1} \\ &= \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+1 \text{ mal}}_k = \binom{k+n}{n}.$$

Führen Sie den Beweis einmal mit z -Transformation unter Verwendung des Faltungssatzes, des Verschiebungssatzes und der Korrespondenz

$$a^{k-n} \binom{k-1}{n-1} \circ \bullet \frac{1}{(z-a)^n}$$

und einmal mit Induktion. Sie dürfen hierbei die Formel

$$\sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} = \binom{k+n+1}{n+1}$$

verwenden.

Lösung von Aufgabe 21. Beweis mit z -Transformation.

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+1 \text{ mal}}_k &\circ \bullet \left(\frac{z}{z-1} \right)^{n+1} \\ &= z^{n+1} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &\bullet \circ \left(1^{k-(n+1)} \binom{k-1}{n} \right)_{\cdot + n+1} \\ &= 1^k \binom{k+n}{n} \\ &= \binom{k+n}{n}. \end{aligned}$$

Beweis mit Induktion.

- Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} (\sigma * \sigma)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^k \sigma_\ell \sigma_{k-\ell} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k+1 \text{ Summanden}} = \sigma_k(k+1) \\ &= \binom{k+1}{1}. \end{aligned}$$

- Induktionsannahme. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+1 \text{ mal}}_k = \binom{k+n}{n}.$$

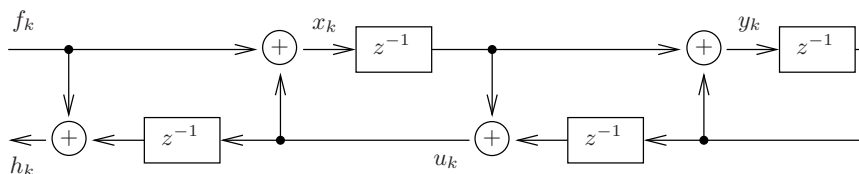
- Induktionsschritt. Zu zeigen: Für dieses n gilt

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n+2 \text{ mal}}_k = \binom{k+n+1}{n+1}.$$

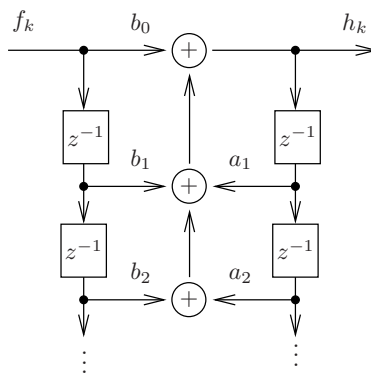
Unter Verwendung der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)_k}_{n+2\text{mal}} &= \sum_{\ell=-\infty}^k \underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)_\ell}_{n+1\text{mal}} \\
 &= \sum_{\ell=-\infty}^k \binom{\ell+n}{n} \\
 &= \sum_{\ell=0}^k \binom{\ell+n}{n} \\
 &= \binom{k+n+1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 22. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert.



Berechnen Sie Koeffizienten a_k, b_k so dass dieses System äquivalent zu folgendem System ist:



Hinweis:

- Stellen Sie unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k, u_k Differenzgleichungen auf.
- Transformieren Sie die Gleichungen unter Verwendung des Verschiebungssatzes in den Bildbereich.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, indem Sie im Bildbereich $X(z), Y(z), U(z)$ eliminieren. Es handelt sich um lineare Gleichungen mit den Unbekannten $F(z), H(z), X(z), Y(z), U(z)$ wobei die Koeffizienten rationale Funktionen in z^{-1} sind. Gehen Sie systematisch vor, sonst wird die Rechnung schnell unübersichtlich.

- Wenn Sie die Übertragungsfunktion als rationale Funktion in z^{-1} darstellen, können Sie die Koeffizienten a_k und b_k direkt ablesen.
- Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie aus den Filterkoeffizienten des äquivalenten Systems eine Differenzgleichung im Zeitbereich aufstellen und damit von beiden Systemen die ersten paar Glieder der Impulsantwort berechnen.

Lösung von Aufgabe 22. Differenzgleichungen im Zeitbereich.

$$\begin{aligned}x_k &= f_k + u_k \\y_k &= x_{k-1} + y_{k-1} \\u_k &= y_{k-2} + x_{k-1} \\h_k &= f_k + u_{k-1}\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}x_k &\circ\text{---}\bullet X(z) \\y_k &\circ\text{---}\bullet Y(z) \\u_k &\circ\text{---}\bullet U(z) \\h_k &\circ\text{---}\bullet H(z).\end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$\begin{aligned}x_{k-1} &\circ\text{---}\bullet z^{-1}X(z) \\y_{k-1} &\circ\text{---}\bullet z^{-1}Y(z) \\y_{k-2} &\circ\text{---}\bullet z^{-2}Y(z) \\u_{k-1} &\circ\text{---}\bullet z^{-1}U(z).\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber wird das Argument (z) weggelassen. Weiterhin sei $w = z^{-1}$. Damit erhält man im Bildbereich die Gleichungen

$$\begin{aligned}X &= F + U \\Y &= wX + wY \\U &= w^2Y + wX \\H &= F + wU\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}X - U &= F \\Y(1 - w) - wX &= 0 \\U - w^2Y - wX &= 0 \\H - wU &= F.\end{aligned}$$

Dies führt zu dem LGS

X	Y	U	H	
1	0	-1	0	F
$-w$	$1-w$	0	0	0
$-w$	$-w^2$	1	0	0
0	0	$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	$1-w$	$-w$	0	wF
	$-w^2$	$1-w$	0	wF
		$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	1	$\frac{w}{w-1}$	0	$\frac{w}{1-w}F$
	$-w^2$	$1-w$	0	wF
		$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	1	$\frac{w}{w-1}$	0	$\frac{w}{1-w}F$
		$1-w+\frac{w^3}{w-1}$	0	$wF+\frac{w^3}{1-w}F$
		$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	1	$\frac{w}{w-1}$	0	$\frac{w}{1-w}F$
		$\frac{1-2w+w^2-w^3}{1-w}$	0	$\frac{w-w^2+w^3}{1-w}F$
		$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	1	$\frac{w}{w-1}$	0	$\frac{w}{1-w}F$
		1	0	$\frac{w-w^2+w^3}{1-2w+w^2-w^3}F$
		$-w$	1	F
1	0	-1	0	F
	1	$\frac{w}{w-1}$	0	$\frac{w}{1-w}F$
		1	0	$\frac{w-w^2+w^3}{1-2w+w^2-w^3}F$
		1	1	$F+\frac{w^2-w^3+w^4}{1-2w+w^2-w^3}F$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1-2w+w^2-w^3+w^2-w^3+w^4}{1-2w+w^2-w^3}F \\
 &= \frac{1-2w+2w^2-2w^3+w^4}{1-2w+w^2-w^3}F \\
 &= \frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-2z^{-3}+z^{-4}}{1-2z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}}F.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= -2 \\
 b_2 &= 2 \\
 b_3 &= -2 \\
 b_4 &= 1 \\
 a_1 &= 2 \\
 a_2 &= -1 \\
 a_3 &= 1.
 \end{aligned}$$

Die Differenzgleichung im Zeitbereich ist

$$\begin{aligned}
 h_k &= f_k - 2f_{k-1} + 2f_{k-2} - 2f_{k-3} + f_{k-4} \\
 &+ 2h_{k-1} - h_{k-2} + h_{k-3}.
 \end{aligned}$$

Impulsantwort des gegebenen Systems.

f_k	$u_k =$ $y_{k-2} + x_{k-1}$	$x_k =$ $f_k + u_k$	$y_k =$ $x_{k-1} + y_{k-1}$	$h_k =$ $f_k + u_{k-1}$
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	2	1
0	2	2	3	1
0	4	4	5	2
0	7	7	9	4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Impulsantwort des äquivalenten Systems.

f_k	$h_k = f_k - 2f_{k-1} + 2f_{k-2} - 2f_{k-3} + f_{k-4} + 2h_{k-1} - h_{k-2} + h_{k-3}$
1	1
0	0
0	1
0	1
0	2
0	4
\vdots	\vdots

Aufgabe 23. Ein digitaler FIR Filter bildet eine Eingangsfolge f_k auf eine Ausgangsfolge

$$h_k = f_k - f_{k-1} + f_{k-2} - f_{k-3} + \dots - f_{k-n} = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell f_{k-\ell}$$

ab, wobei $n > 0$ eine ungerade Konstante ist.

Berechnen Sie die Impulsantwort g_k und die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Filters.

Formen Sie die Übertragungsfunktion so um, dass Sie daraus einen rekursiven Filter entwickeln können, der sich gleich verhält wie der o.g. FIR Filter, aber nur 2 Additionen pro Takt braucht. Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieses rekursiven Filters.

Lösung von Aufgabe 23. Für $f_k = \delta_k$ erhält man die Impulsantwort

$$g_k = \delta_k - \delta_{k-1} + \delta_{k-2} - \delta_{k-3} + \dots - \delta_{k-n}$$

mit Übertragungsfunktion

$$G(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + \dots - z^{-n}.$$

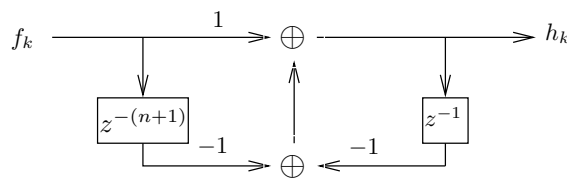
Umformen ergibt

$$\begin{aligned} z^{-1}G(z) &= z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + \dots - z^{-n-1} \\ G(z)(1 + z^{-1}) &= 1 - z^{-n-1} \\ G(z) &= \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 + z^{-1}} \end{aligned}$$

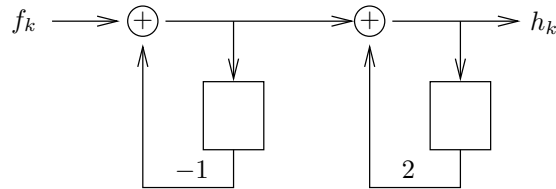
Hieraus ergeben sich die Gewichte b_k im Vorwärtszweig und a_k im Rückwärtszweig durch

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = -1, \quad a_1 = -1.$$

Damit sieht der Filter wie folgt aus:

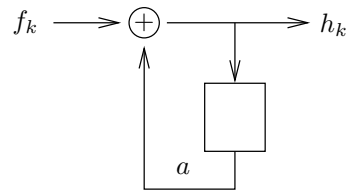


Aufgabe 24. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und einen Term für die Impulsantwort g_k des folgenden Filters. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.



Die Kästen bedeuten hierbei Verzögerungsglieder, die Zahlen an den Verbindungen stehen für Multiplikationen.

Lösung von Aufgabe 24. Der Filter besteht aus einer Hintereinanderschaltung von zwei einfacheren Filtern der Art



für $a = -1$ bzw. $a = 2$. Die Filtergleichung ist hier

$$\begin{aligned} h_k &= f_k + ah_{k-1} \\ h_k - ah_{k-1} &= f_k \\ H(z)(1 - az^{-1}) &= F(z) \\ H(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}}F(z) = \frac{z}{z - a}F(z). \end{aligned}$$

Dieser Filter hat die Übertragungsfunktion

$$G_a(z) = \frac{z}{z - a}.$$

Das Gesamtsystem hat daher die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= G_{-1}(z)G_2(z) \\ &= \frac{z}{z + 1} \frac{z}{z - 2} \\ &= \frac{z^2}{(z + 1)(z - 2)} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - z - 2}. \end{aligned}$$

Polynomdivision ergibt

$$G(z) = 1 + \frac{z + 2}{(z + 1)(z - 2)}.$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{(z+1)(z-2)} &= \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{z-2} \\ z+2 &= c_1(z-2) + c_2(z+1).\end{aligned}$$

Spezialfall $z = -1$ ergibt

$$\begin{aligned}1 &= -3c_1 \\ c_1 &= -1/3.\end{aligned}$$

Spezialfall $z = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}4 &= 3c_2 \\ c_2 &= 4/3.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}G(z) &= 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{z+1} + \frac{4}{3} \frac{1}{z-2} \\ \bullet \circ \delta_k - \frac{1}{3} \sigma_{k-1} (-1)^{k-1} + \frac{4}{3} \sigma_{k-1} 2^{k-1} \\ &= \delta_k + \frac{1}{3} \sigma_{k-1} ((-1)^k + 2^{k+1}) \\ &= \frac{1}{3} \sigma_k ((-1)^k + 2^{k+1}).\end{aligned}$$

Aufgabe 25. Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 25.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) - 3(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 5) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4)\end{aligned}$$

Damit ist ein Eigenwert

$$\lambda_1 = 1.$$

Die anderen beiden erhält man mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 1 + \sqrt{5} \\ \lambda_3 &= 1 - \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Aufgabe 26. Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Funktion f heißt Eigenfunktion eines LTI Systems S mit Eigenwert λ wenn

$$\begin{aligned}S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)](t) &= \lambda f(t) \quad \text{für alle } t.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die komplexe Schwingung

$$f(t) = e^{j\hat{\omega}t}$$

mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ Eigenfunktion von S ist mit Eigenwert

$$\lambda = G(\hat{\omega})$$

wobei $G(\omega)$ die Übertragungsfunktion des Systems ist.

Hinweis: Da S LTI ist, gilt $S(f) = f * g$ wobei g die Impulsantwort des Systems ist. Die Übertragungsfunktion $G(\omega)$ des Systems ist die Fourier Transformierte von $g(t)$:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Berechnen Sie

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

und formen Sie so lange um, bis Sie bei $G(\omega)f(t)$ herauskommen. Der Rechenweg ist sehr kurz.

Lösung von Aufgabe 26. Sei S ein LTI System mit Impulsantwort $g(t)$. Für die Funktion $f(t) = e^{j\hat{\omega}t}$ erhält man

$$\begin{aligned}[S(f)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\hat{\omega}(t - \tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\hat{\omega}t} e^{-j\hat{\omega}\tau} d\tau \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\hat{\omega}\tau} d\tau \right)}_{G(\hat{\omega})} e^{j\hat{\omega}t} \\ &= G(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega}t} \\ &= G(\hat{\omega}) f(t).\end{aligned}$$

Dies gilt für alle t , folglich ist

$$S(f) = G(\hat{\omega})f$$

und somit ist f Eigenfunktion von S mit Eigenwert $G(\hat{\omega})$.

Aufgabe 27. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
- Nennen Sie von jedem Eigenwert seine geometrische und seine algebraische Vielfachheit.

Lösung von Aufgabe 27.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= -\lambda((1 - \lambda)^2 - 1) \\ &= -\lambda(-2\lambda + \lambda^2) \\ &= \lambda^2(2 - \lambda). \end{aligned}$$

Damit hat man zwei Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 && \text{Algebraische Vielfachheit } 2 \\ \lambda_2 &= 2 && \text{Algebraische Vielfachheit } 1. \end{aligned}$$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} z &= x \\ -2y + z &= 0 \\ y &= z/2 \\ &= x/2. \end{aligned}$$

Eigenvektoren

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ x \end{pmatrix}$$

Basis

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit haben beide Eigenwerte geometrische Vielfachheit 1.

Aufgabe 28. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A . Berechnen Sie dann eine Basis für den Vektorraum der *reellen* Lösungsfunktionen des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Lösung von Aufgabe 28. Eigenwerte.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)^2 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= 1 \pm 2j. \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1 + 2j$.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -2j & -2 \\ 2 & -2j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2j & -2 \\ 2 & -2j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -2jx - 2y &= 0 \\ y &= -jx \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} x \\ -jx \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2j \\ E_{1+2j} &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \\ \lambda_2 &= 1 - 2j \\ E_{1-2j} &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Eine komplexe Basislösung des DGL Systems ist

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{(1+2j)t} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} (\cos(2t) + j \sin(2t)) \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + j \sin(2t) \\ \sin(2t) - j \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sind reelle Basislösungen

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \operatorname{re}(\vec{x}(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \\ \vec{x}_2(t) &= \operatorname{im}(\vec{x}(t)) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie die Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

Lösung von Aufgabe 29. Vektorielle Notation

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Laplace Transformation

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= A\vec{X}(s) \\ (sE - A)\vec{X}(s) &= \vec{x}(0) \\ \vec{X}(s) &= (sE - A)^{-1}\vec{x}(0). \end{aligned}$$

Matrix Inversion.

$$\begin{aligned} (sE - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} s-1 & -3 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1) - 3} \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - 4} \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösung im Bildbereich und Rücktransformation.

$$\begin{aligned} (sE - A)^{-1}\vec{x}(0) &= \frac{1}{s^2 - 4} \begin{pmatrix} s-2 \\ -s+2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - 4} (s-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\bullet\text{---}\circ \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 30. Gegeben sei das DGL System

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Versuchen Sie, die allgemeine Lösung mit der Eigenwertmethode zu berechnen. Sie erhalten hierbei nur zwei Basislösungen, d.h. nicht alle Lösungen des DGL Systems.
- Zeigen Sie, dass z.B. auch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t$$

eine Lösungsfunktion ist.

- Berechnen Sie dann alle Lösungen mit der Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 30.

- Eigenwert Methode. Ansatz:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{v}e^{\lambda t} \\ \vec{x}'(t) &= \lambda\vec{v}e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}\lambda\vec{v}e^{\lambda t} &= A\vec{v}e^{\lambda t} \\ \lambda\vec{v} &= A\vec{v} \\ (A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Berechnung der Eigenwerte von A .

$$\begin{aligned}A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)^3.\end{aligned}$$

Damit hat A nur einen Eigenwert $\lambda = 1$ mit Vielfachheit 3.
Berechnung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus dem LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$x = 0, \quad y, z \text{ beliebig.}$$

Eine Basis des Lösungsraums besteht somit aus den beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Da nur zwei Basislösungen gefunden wurden, müssen weitere Lösungsfunktionen existieren.

- Sei

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{x}'(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix} e^t\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}A\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix} e^t \\ &= \vec{x}'(t).\end{aligned}$$

- Lösung mit Laplace Transformation.

$$\begin{aligned}\vec{x}'(t) &= A\vec{x}(t) \\ s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= A\vec{X}(s) \\ (sE - A)\vec{X}(s) &= \vec{x}(0).\end{aligned}$$

Um die Inversion der 3×3 Matrix $sE - A$ zu vermeiden, kann man $\vec{X}(s)$ auch durch Lösen eines LGS berechnen. Mit

$$sE - A = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1 & s-1 & 0 \\ -1 & 0 & s-1 \end{pmatrix}$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}(s-1)X_1(s) &= x_1(0) \\ -X_1(s) + (s-1)X_2(s) &= x_2(0) \\ -X_1(s) + (s-1)X_3(s) &= x_3(0).\end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}X_1(s) &= \frac{1}{s-1}x_1(0) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s-1}(x_2(0) + X_1(s)) \\ &= \frac{1}{s-1}x_2(0) + \frac{1}{(s-1)^2}x_1(0) \\ X_3(s) &= \frac{1}{s-1}(x_3(0) + X_1(s)) \\ &= \frac{1}{s-1}x_3(0) + \frac{1}{(s-1)^2}x_1(0).\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{array}{l} \frac{1}{s-1} \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^t \\ \frac{1}{(s-1)^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad te^t \end{array}$$

erhält man

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^t \\ x_2(t) &= x_2(0)e^t + x_1(0)te^t \\ x_3(t) &= x_3(0)e^t + x_1(0)te^t. \end{aligned}$$

In vektorieller Notation ist dies

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(0) \\ x_1(0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31. Gegeben sei das DGL System

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$.

- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit der Eigenwertmethode.
- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 31.

Lösung mit der Eigenwertmethode. Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3-\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)((5-\lambda)^2 - 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 3 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = 5 \pm 1 \\ \lambda_2 &= 4 \\ \lambda_3 &= 6.\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor ist z.B.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor ist z.B.

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor ist z.B.

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Basislösungen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Anfangswerte

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1.$$

Lösung mit Anfangswerten.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{6t} \\ e^{3t} \\ -e^{4t} + e^{6t} \end{pmatrix}$$

Lösung mit Laplace Transformation.

$$s\vec{X}(s) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{X}(s)$$
$$\begin{pmatrix} s-5 & 0 & -1 \\ 0 & s-3 & 0 \\ -1 & 0 & s-5 \end{pmatrix} \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des LGS

$$X_1(s) = \frac{2(s-5)}{(s-4)(s-6)}$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s-3}$$
$$X_3(s) = \frac{2}{(s-4)(s-6)}.$$

Rücktransformation von $X_1(s)$.

$$\frac{2(s-5)}{(s-4)(s-6)} = \frac{c_1}{s-4} + \frac{c_2}{s-6}$$
$$2(s-5) = c_1(s-6) + c_2(s-4)$$

Mit $s = 4$ folgt

$$-2 = -2c_1$$
$$c_1 = 1$$

Mit $s = 6$ folgt

$$2 = 2c_2$$
$$c_2 = 1$$

Damit ist

$$X_1(s) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s-6}$$

•—○ $e^{4t} + e^{6t}$

Rücktransformation von $X_2(s)$

$$X_2(s) = \frac{1}{s-3}$$

●—○ e^{3t}

Rücktransformation von $X_3(s)$

$$\frac{2}{(s-4)(s-6)} = \frac{c_1}{s-4} + \frac{c_2}{s-6}$$
$$2 = c_1(s-6) + c_2(s-4)$$

Mit $s = 4$ folgt

$$2 = -2c_1$$
$$c_1 = -1$$

Mit $s = 6$ folgt

$$2 = 2c_2$$
$$c_2 = 1$$

Damit ist

$$X_2(s) = \frac{-1}{s-4} + \frac{1}{s-6}$$

●—○ $-e^{4t} + e^{6t}$

Die Lösung des DGL Systems ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{6t} \\ e^{3t} \\ -e^{4t} + e^{6t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 32. Gegeben sei die lineare homogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0.$$

Formen Sie diese DGL so um, dass ein DGL System erster Ordnung der Form

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

entsteht. Benutzen Sie die Substitution

$$x_1(t) = f(t)$$
$$x_2(t) = x_1'(t).$$

Lösung von Aufgabe 32. Mit der gegebenen Substitution wird aus der DGL

$$x_2'(t) + 2x_2(t) + x_1(t) = 0$$
$$x_2(t) = x_1'(t).$$

Auflösen nach $x_1'(t)$ und $x_2'(t)$.

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t) \\x_2'(t) &= -x_1(t) - 2x_2(t).\end{aligned}$$

Matrix Darstellung

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Aufgabe 33. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung

$$f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = 0.$$

Die DGL zweiter Ordnung kann in ein DGL System erster Ordnung umgeformt werden mit der Substitution

$$\begin{aligned}x_1(t) &= f(t) \\x_2(t) &= f'(t).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}f(t) &= x_1(t) \\f'(t) &= x_2(t) \\f''(t) &= x_2'(t)\end{aligned}$$

und man erhält das DGL System

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t) \\x_2'(t) &= -4x_1(t) + 4x_2(t)\end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Versuchen Sie, die allgemeine Lösung dieses DGL System mit der Eigenvektormethode zu bestimmen. Vergleichen Sie die Lösung des DGL Systems mit der Lösung der DGL zweiter Ordnung.

Lösung von Aufgabe 33. Lösung der DGL zweiter Ordnung. Ansatz

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 4\lambda e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0.$$

Charakteristisches Polynom.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Doppelte Nullstelle.

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Basislösungen.

$$\begin{aligned}f_1(t) &= e^{2t} \\f_2(t) &= te^{2t}.\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung.

$$f(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

Lösung des DGL Systems mit der Eigenvektormethode. Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{v} e^{\lambda t}.$$

Einsetzen.

$$\lambda \vec{v} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \vec{v} e^{\lambda t}.$$

Eigenwertproblem.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_A \vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4\end{aligned}$$

Doppelte Nullstelle

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Eigenvektoren zu $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung $y = 2x$. Ein Eigenvektor ist somit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Basislösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Die zweite Basislösung kann mit der Eigenvektormethode nicht ermittelt werden. Rücksubstitution würde hier nur eine Basislösung ergeben:

$$f(t) = x_1(t) = e^{2t}$$