Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Lösung von Aufgabe 1. Es handelt sich um eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Lösungsansatz

$$y = e^{\lambda x}$$

erhält man durch Einsetzen

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0.$$

Nach Kürzen mit $e^{\lambda x}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2,$$

d.h. es handelt sich um eine doppelte reelle Nullstelle. Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Aufgabe 2. Sei y_P eine partikuläre Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = r(x),$$

wobei alle Koeffizienten a_i reell sind und $r(x)$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{y_P(x)}$ eine Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = \overline{r(x)}$$

ist.

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$y_P(x) = y_{\text{re}}(x) + j y_{\text{im}}(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\overline{y_P^{(i)}(x)} &= \overline{(y_{\mathrm{re}}(x) + jy_{\mathrm{im}}(x))^{(i)}} \\
&= \overline{y_{\mathrm{re}}^{(i)}(x) + jy_{\mathrm{im}}^{(i)}(x)} \quad \text{Summenregel der Ableitung} \\
&= y_{\mathrm{re}}^{(i)}(x) - jy_{\mathrm{im}}^{(i)}(x) \\
&= (y_{\mathrm{re}}(x) - jy_{\mathrm{im}}(x))^{(i)} \quad \text{Summenregel der Ableitung} \\
&= \overline{y_P(x)}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\overline{y_P(x)}$ in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{y_P(x)}^{(i)} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{y_P^{(i)}(x)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i y_P^{(i)}(x)} \quad \text{da } a\overline{z} = \overline{az} \text{ wenn } a \text{ reell} \\
&= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i y_P^{(i)}(x)} \quad \text{da } \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2} \\
&= \overline{r(x)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + 2\sin(x)\cos(x)y = e^{\cos^2(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 3. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' + 2\sin(x)\cos(x)y = 0$$

durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -2\sin(x)\cos(x)y \\
\frac{1}{y}dy &= -2\sin(x)\cos(x)dx.
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten:

$$\ln(|y|) = \cos^2(x) + C.$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{\cos^2(x)+C} \\
&= Ke^{\cos^2(x)}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y_H &= Ke^{\cos^2(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Durch Variation der Konstanten erhält man den Ansatz

$$\begin{aligned}
y &= k(x)e^{\cos^2(x)} \\
y' &= k'(x)e^{\cos^2(x)} - k(x)e^{\cos^2(x)} 2\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned} k'(x)e^{\cos^2(x)} - k(x)e^{\cos^2(x)}2\cos(x)\sin(x) + \\ 2\sin(x)\cos(x)k(x)e^{\cos^2(x)} &= e^{\cos^2(x)} \\ k'(x)e^{\cos^2(x)} &= e^{\cos^2(x)} \\ k'(x) &= 1 \\ k(x) &= x + C. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$y(x) = (x + C)e^{\cos^2(x)}.$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + xy\cos(x^2) = x\cos(x^2).$$

Lösung von Aufgabe 4. Umformen ergibt

$$y' = x\cos(x^2)(1-y)$$

Es handelt sich um eine separierbare DGL erster Ordnung. Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y}dy &= x\cos(x^2)dx \\ \frac{1}{y-1}dy &= -x\cos(x^2)dx \end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned} \ln|y-1| &= -\frac{1}{2}\sin(x^2) + C \\ |y-1| &= Ke^{-\sin(x^2)/2}, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\ y-1 &= Ke^{-\sin(x^2)/2}, \qquad K \in \mathbb{R} \\ y &= 1 + Ke^{-\sin(x^2)/2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausale Funktionen, d.h.

$$f(t) = g(t) = 0 \qquad \text{für alle } t < 0.$$

- Zeigen Sie, dass $f * g$ eine kausale Funktion ist.
- Zeigen Sie, dass $(f * g)(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 5.

- Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausal.

  $$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

  Für $t < 0$ integriert man über negative τ und in diesem Bereich ist $f(\tau) = 0$. Daher ist

  $$(f * g)(t) = 0 \qquad \text{für alle } t < 0.$$

- Für $t = 0$ erstreckt sich das Integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

nur über einen Punkt $\tau = 0$. Da $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionswerte endlich und somit ist die Fläche Null, d.h.

$$(f * g)(0) = 0.$$

Aufgabe 6. Für $a > 0$ bezeichne der Index a die Stauchung einer Funktion um Faktor a, d.h.

$$f_a(t) = f(at).$$

Zeigen Sie, dass

$$f_a * g_a = \frac{1}{a}(f * g)_a.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}(f_a * g_a)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(\tau)g_a(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(a(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(at-a\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Substitution.

$$u = a\tau, \quad \frac{du}{d\tau} = a, \quad d\tau = \frac{1}{a}du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau)g(at-a\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(at-u)\frac{1}{a}du \\ &= \frac{1}{a}(f * g)(at) \\ &= \frac{1}{a}(f * g)_a(t).\end{aligned}$$

Dies gilt für alle t, folglich ist

$$f_a * g_a = \frac{1}{a}(f * g)_a.$$

Aufgabe 7. Sei

$$\begin{aligned}f(t) &= 1 + \cos(t) \\ g(t) &= \begin{cases} 1/2\pi & \text{für } 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anschaulich, was der Mittelwert einer cos-Funktion und einer konstanten Funktion über ein Intervall der Länge 2π ist.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos(t-\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\tau - \sin(t-\tau)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}(2\pi - \sin(t-2\pi) + \sin(t)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(2\pi - \sin(t) + \sin(t)) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. In ihrer einfachsten Form lautet die Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

Sie gilt jedoch nur wenn $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ stetig ist. Das Rechnen mit $\delta(t)$ dient ähnlich wie mit Differentialen vor allem der Vereinfachung der Notation. Statt dx kann man auch mit einer kleinen, endlichen Zahl Δx rechnen und "am Ende" den Grenzübergang $\lim_{\Delta x \to 0}$ durchführen.

Genauso kann man statt $\delta(t)$ mit einem schmalen Impuls $g_\varepsilon(t)$ rechnen und "am Ende" einen Grenzübergang $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ durchführen. Von $g_\varepsilon(t)$ wird lediglich verlangt, dass

$$\begin{aligned}
g_\varepsilon(t) &\geq 0 \text{ für alle } t \\
g_\varepsilon(t) &= 0 \text{ für } t \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \\
\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt &= 1.
\end{aligned}$$

Außerdem soll $g_\varepsilon(t)$ unendlich oft differenzierbar sein. Ansonsten darf die "Form" von $g_\varepsilon(t)$ keine Rolle spielen. Die Ausblendeigenschaft ist dann

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\varepsilon(t)dt = f(0).$$

Intuitiv lässt sich das begründen durch

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\varepsilon(t)dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)g_\varepsilon(t)dt \\
&\approx \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(0)g_\varepsilon(t)dt \\
&= f(0) \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)dt \\
&= f(0) \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 1 \\
&= f(0).
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde ausgenutzt, dass $f(t) \approx f(0)$ falls $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ und ε sehr klein.

Wo kommt also die Einschränkung her, dass $f(t)$ bei $t = 0$ stetig sein muss? Sei

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t < 0 \\ 3 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

eine Funktion, die bei $t = 0$ einen Sprung macht. Berechnen Sie hierfür

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\varepsilon(t) dt$$

einmal mit

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und einmal mit

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & \text{für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 8. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t < 0 \\ 3 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\varepsilon(t) dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{0}^{\varepsilon} f(t) g_\varepsilon(t) dt \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{0}^{\varepsilon} 3 g_\varepsilon(t) dt \\ &= 3 \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{0}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) dt \\ &= 3 \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Für

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & \text{für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\varepsilon(t) dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t) g_\varepsilon(t) dt \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t) g_\varepsilon(t) dt + \int_{0}^{\varepsilon} f(t) g_\varepsilon(t) dt \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2 \int_{-\varepsilon}^{0} f(t) g_\varepsilon(t) dt + 3 \int_{0}^{\varepsilon} f(t) g_\varepsilon(t) dt \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $t \neq 0$ stetig ist, aber an der Stelle $t = 0$ einen Sprung haben kann und

$$
g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t \in [-\varepsilon, 0] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Zeigen Sie, dass dann

$$
\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\varepsilon(t) dt = f(0^-).
$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\varepsilon(t) dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t) g_\varepsilon(t) dt \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t) dt \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} [F(t)]_{-\varepsilon}^{0} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{F(0) - F(-\varepsilon)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F'(-\varepsilon) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(-\varepsilon) \\
&= f(0^-).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10. Sei f eine beliebige Funktion und g eine T-periodische Funktion.

- Zeigen Sie, dass dann $f * g$ ebenfalls T-periodisch ist.
- Seien z_k die Fourier Koeffizienten von g, d.h.

$$
g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j\omega_k t}, \qquad \omega_k = k\frac{2\pi}{T}.
$$

Zeigen Sie, dass die Fourier Koeffizienten von $f * g$ dann

$$z_k F(\omega_k)$$

sind, wobei $F(\omega)$ die Fourier Transformierte von f ist.

Hinweis: Beginnen Sie mit

$$(f * g)(t) \quad = \quad f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j\omega_k t}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass mit $f(t)$ und $e^{j\omega_k t}$ keine Zahlen sondern Funktionen von t gemeint sind. Nutzen Sie dann die Linearität der Faltung. Durch Umformen kommen Sie auf einen Teilterm

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega_k \tau} d\tau.$$

Dies ist bereits die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wobei ω durch ω_k ersetzt ist. Dass die Integrationsvariable τ und nicht t heißt, ist ja egal.

Lösung von Aufgabe 10. Zu zeigen: $f * g$ ist T-periodisch, d.h.

$$(f * g)(t + T) \quad = \quad (f * g)(t).$$

Da g eine T-periodische Funktion ist, gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(t + T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t + T - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

Fourier Koeffizienten von $f * g$.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j\omega_k} t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k f(t) * e^{j\omega_k t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) * e^{j\omega_k (t-\tau)} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j\omega_k t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega_k \tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k F(\omega_k) e^{j\omega_k t}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Fourier Reihe mit Fourier Koeffizienten $z_k F(\omega_k)$. Alternativ hätte man die Fourier Koeffizienten von $f * g$ auch wie folgt berechnen können:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T (f*g)(t)e^{-jk\omega t}dt &= \frac{1}{T}\int_{t=0}^T \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) e^{-jk\omega t}dt \\ &= \int_{t=0}^T \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} f(\tau)g(t-\tau)e^{-jk\omega t}d\tau dt \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=0}^T \frac{1}{T} f(\tau)g(t-\tau)e^{-jk\omega t}dt d\tau \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_{t=0}^T g(t-\tau)e^{-jk\omega t}dt\right)d\tau.\end{aligned}$$

Substitution im inneren Integral:

$$\begin{aligned}u &= t-\tau \\ \frac{du}{dt} &= 1 \\ dt &= du.\end{aligned}$$

Damit rechnet man weiter

$$\begin{aligned}&\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_{u=-\tau}^{T-\tau} g(u)e^{-jk\omega(u+\tau)}du\right)d\tau \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_{u=0}^{T} g(u)e^{-jk\omega u}e^{-jk\omega\tau}du\right)d\tau \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)z_k e^{-jk\omega\tau}d\tau \\ &= z_k\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-jk\omega\tau}d\tau \\ &= z_k F(\omega_k).\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t) & \text{falls } t \geq 0 \\ e^{t}\cos(t) & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(t)$ eine gerade Funktion ist, d.h. $f(-t) = f(t)$. Folglich ist $F(\omega)$ reell.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}f(-t) &= \begin{cases} e^{t}\cos(-t) & \text{falls } -t \geq 0 \\ e^{-t}\cos(-t) & \text{falls } -t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{t}\cos(t) & \text{falls } t \leq 0 \\ e^{-t}\cos(t) & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ &= f(t).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{\infty}^{0} f(-t)e^{j\omega t}(-dt) + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \overline{\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt} + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= 2\mathrm{re}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right).
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung.

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-t}\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-(1-j+j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j+j\omega)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-j+j\omega}\left[e^{-(1-j+j\omega)t}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{1+j+j\omega}\left[e^{-(1+j+j\omega)t}\right]_0^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j(\omega-1)} + \frac{1}{1+j(\omega+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-j(\omega-1)}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1-j(\omega+1)}{1+(\omega+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
2\mathrm{re}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right) = \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{1+(\omega+1)^2}
$$

Einfacher wäre es gegangen, wenn man zuerst zeigt, dass

$$
f(t) = e^{-|t|}\cos(t).
$$

Dann zeigt man, dass

$$
e^{-|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{\omega^2+1}.
$$

Mit dem Modulationssatz

$$
f(t)\cos(\hat{\omega}t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega-\hat{\omega})+F(\omega+\hat{\omega}))
$$

folgt dann

$$
e^{-|t|}\cos(t) = \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{1+(\omega+1)^2}.
$$

Aufgabe 12. Die Sprungfunktion $\sigma(t)$ ist definiert durch

$$\sigma(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Sei

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)e^{-t} \quad = \quad \begin{cases} e^{-t} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

und

$$g(t) \quad = \quad \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(t + \ell T).$$

Damit ist $g(t)$ eine T-periodische Funktion. Für sehr große T geht $g(t)$ in die (nicht-periodische) Funktion $f(t)$ über.

- Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k von $g(t)$.
- Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$.
- Sei $\omega_k = k2\pi/T$ die Frequenz, die dem Fourier Koeffizienten z_k entspricht. Zeigen Sie, dass dann

$$F(\omega_k) \quad = \quad z_k T.$$

Hinweis: Für $|a| < 1$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a^{\ell} \quad = \quad \frac{1}{1-a}.$$

Lösung von Aufgabe 12.

- Fourier Koeffizienten von $g(t)$.

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(t+\ell T)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma(t+\ell T)e^{-(t+\ell T)}e^{-jk\omega t}dt. \end{aligned}$$

Da t im Integrationsbereich zwischen 0 und T liegt, ist

$$\sigma(t+\ell T) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } \ell \geq 0 \\ 0 & \text{falls } \ell < 0. \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(t+\ell T)}e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\ell T}e^{-t}e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\ell T}e^{-(1+jk\omega)t}dt. \end{aligned}$$

Mit o.g. Summenformel gilt für $a = e^{-T}$

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\ell T} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(e^{-T}\right)^{\ell} \\ &= \frac{1}{1-e^{-T}}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}z_k &= \frac{1}{T(1-e^{-T})} \int_0^T e^{-(1+jk\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{T(1-e^{-T})} \frac{1}{-(1+jk\omega)} \left[e^{-(1+jk\omega)t}\right]_0^T \\ &= -\frac{1}{T(1-e^{-T})(1+jk\omega)} \left(e^{-(1+jk\omega)T} - 1\right) \\ &= \frac{1-e^{-(T+2\pi jk)}}{T(1-e^{-T})(1+jk\omega)} \\ &= \frac{1-e^{-T}}{T(1-e^{-T})(1+jk\omega)} \\ &= \frac{1}{T(1+jk\omega)}.\end{aligned}$$

- Fourier Transformierte von $f(t)$.

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} \left[e^{-(1+j\omega)t}\right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{1+j\omega}(0-1) \\ &= \frac{1}{1+j\omega}.\end{aligned}$$

- Damit gilt

$$\begin{aligned}F(\omega_k) &= \frac{1}{1+j\omega_k} \\ z_k T &= \frac{1}{1+jk\omega} \\ &= \frac{1}{1+j\omega_k}.\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ ist definiert durch

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ihre Fourier Transformierte ist

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)e^{jt}.$$

Hinweis: Der Faktor e^{jt} im Zeitbereich entspricht einer Verschiebung um $\hat{\omega} = 1$ im Frequenzbereich. Berechnen Sie dann aus der Fourier Transformierten von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)e^{jt}$$

die Fourier Transformierte von $f(-t)$. Da

$$e^{j|t|} \quad = \quad f(t) + f(-t), \qquad t \neq 0$$

können Sie nun einfach die Fourier Transformierte von $e^{j|t|}$ bestimmen. Nun gilt

$$\begin{aligned} e^{j|t|} &= \cos(|t|) + j\sin(|t|) \\ &= \cos(t) + j\sin(|t|) \\ \sin(|t|) &= -j\left(e^{j|t|} - \cos(t)\right). \end{aligned}$$

Die Fourier Transformierte der Cosinus Funktion findet man in der Tabelle:

$$\cos(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)).$$

Berechnen Sie damit die Fourier Transformierte von $\sin(|t|)$.

Lösung von Aufgabe 13. Aus

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

folgt mit der Verschiebung im Frequenzbereich um $\hat{\omega} = 1$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{jt} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j(\omega-1)} + \pi\delta(\omega-1). \end{aligned}$$

Da

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega)$$

gilt

$$\begin{aligned} f(-t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j(-\omega-1)} + \pi\delta(-\omega-1) \\ &= \quad -\frac{1}{j(\omega+1)} + \pi\delta(\omega+1) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} e^{j|t|} \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j(\omega-1)} - \frac{1}{j(\omega+1)} + \pi\delta(\omega-1) + \pi\delta(\omega+1) \\ &= \quad \frac{2j}{1-\omega^2} + \pi\delta(\omega-1) + \pi\delta(\omega+1) \end{aligned}$$

Da

$$\sin(|t|) \quad = \quad -j\left(e^{j|t|} - \cos(t)\right)$$

erhält man die Fourier Transformierte von $\sin(|t|)$ aus der Differenz der Fourier Transformierten von $e^{j|t|}$ und $\cos(t)$ multipliziert mit $-j$:

$$\begin{aligned} &\sin(|t|) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad (-j)\left(\frac{2j}{1-\omega^2} - \pi\delta(\omega-1) - \pi\delta(\omega+1) + \pi\delta(\omega+1) + \pi\delta(\omega-1)\right) \\ &= \quad \frac{2}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass

$$S(f_1 * f_2) \; = \; S(f_1) * f_2 \; = \; f_1 * S(f_2).$$

Lösung von Aufgabe 14. Da S ein LTI System ist, ist

$$S(f) \quad = \quad f * g$$

für alle f, wobei g die Impulsantwort von S ist. Damit gilt

$$S(f_1 * f_2) \quad = \quad (f_1 * f_2) * g.$$

Unter Verwendung der Kommutativität und Assoziativität der Faltung folgt hieraus

$$\begin{aligned} S(f_1 * f_2) \quad &= \quad (f_1 * f_2) * g \\ &= \quad g * (f_1 * f_2) \\ &= \quad (g * f_1) * f_2 \\ &= \quad (f_1 * g) * f_2 \\ &= \quad S(f_1) * f_2 \\ S(f_1 * f_2) \quad &= \quad (f_1 * f_2) * g \\ &= \quad f_1 * (f_2 * g) \\ &= \quad f_1 * S(f_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Auf einen reibungsfrei gelagerten Wagen der Masse m wirkt eine Kraft $F(t)$. Diese bewirkt, dass sich der Wagen mit Geschwindigkeit $v(t)$ bewegt. Wir haben somit ein System mit Eingangsgröße $F(t)$ und Ausgangsgröße $v(t)$. Zeigen Sie, dass dieses System LTI ist und berechnen

Sie die Impulsantwort. Hinweis: Aus der Beschleunigung $a(t)$ lässt sich die Geschwindigkeit $v(t)$ durch Integration berechnen:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Weiterhin gilt

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t).$$

Sei nun die Ausgangsgröße nicht mehr $v(t)$ sondern die zurückgelegte Strecke $s(t)$. Wie sieht nun die Impulsantwort aus?

Lösung von Aufgabe 15. Nach dem Trägheitssatz gilt

$$F(t) = ma(t)$$

bzw.

$$a(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

Damit ist die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{t} a(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}F(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Als System betrachtet erhält man somit

$$\left[S(F)\right](t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}F(\tau)d\tau.$$

Das System ist linear:

$$\begin{aligned} \left[S(F_1+F_2)\right](t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}(F_1+F_2)(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}(F_1(\tau)+F_2(\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}F_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}F_2(\tau)d\tau \\ &= \left[S(F_1)\right](t) + \left[S(F_2)\right](t) \\ &= \left[S(F_1)+S(F_2)\right](t) \\ \left[S(uF)\right](t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}(uF)(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}uF(\tau)d\tau \\ &= u\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m}F(\tau)d\tau \\ &= u\left[S(F)\right](t) \end{aligned}$$

Das System ist zeitinvariant:

$$\begin{aligned}
\left[S(F_{\hat{t}})\right](t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m} F_{\hat{t}}(\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m} F(\tau - \hat{t}) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t-\hat{t}} \frac{1}{m} F(u) du \\
&= \left[S(F)\right](t - \hat{t}) \\
&= \left[S(F)_{\hat{t}}\right](t).
\end{aligned}$$

Für $F(t) = \delta(t)$ erhält man die Impulsantwort

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m} \delta(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{m} \sigma(t).
\end{aligned}$$

Für die zurückgelegte Strecke $s(t)$ gilt

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{m} F(u) du}_{v(\tau)} \, d\tau.
\end{aligned}$$

Für $F(t) = \delta(t)$ erhält man die Impulsantwort

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{m} \delta(u) du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\tau} \delta(u) du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m} \sigma(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{m} \sigma(t) \int_{0}^{t} 1 \, d\tau \\
&= \frac{1}{m} \sigma(t) \left[\tau\right]_0^t \\
&= \frac{1}{m} \sigma(t) t.
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei f die Stromstärke in Autos pro Sekunde auf der A8 in Heibronn und h die Stromstärke in Ludwigsburg.

- Warum ist der Zusammenhang nur näherungsweise linear?
- Warum ist der Zusammenhang nur näherungsweise zeitinvariant?
- Wie würde die Impulsantwort der Autobahn zwischen Heilbronn und Ludwigsburg aussehen im Vergleich zur Impulsantwort des längeren Abschnitts zwischen Heilbronn und Stuttgart?

Lösung von Aufgabe 16.

- Die Autos behindern sich auf der Autobahn gegenseitig, was z.B. bei Elektronen in einem idealen Leiter oder Schall in einem Raum nicht der Fall ist. Bei hoher Stromstärke kommt es zu Staus und die Verweildauer der Autos im System nimmt zu.
- Wenn z.B. auf der Autobahn zu einer bestimmten Zeit eine Baustelle eröffnet wird, verändert sich das System.
- Die Impulsantwort zwischen Heilbronn und Stuttgart beginnt später, ist breiter und flacher als zwischen Heilbronn und Ludwigsburg.

Aufgabe 17. Sei $G_\varepsilon(t)$ eine Stammfunktion von $g_\varepsilon(t)$ und

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} a & \text{falls } t < \hat{t} \\ b & \text{falls } t \geq \hat{t}. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass

  $$(f * g_\varepsilon)(t) \quad = \quad G_\varepsilon(t - \hat{t})(b - a) + aG_\varepsilon(\infty) - bG_\varepsilon(-\infty).$$

  Hinweis: Sie müssen das Faltungsintegral in zwei Teile zerlegen, wobei f in jedem Teil konstant a bzw. b ist.
- Sei nun $g_\varepsilon(t)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit

  $$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &\geq 0 \quad \text{für alle } t \\ g_\varepsilon(t) &= 0 \quad \text{für } t \notin [0, \varepsilon] \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt &= 1. \end{aligned}$$

  Zeigen Sie, dass dann

  $$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * g_\varepsilon)'(t) \quad = \quad \delta(t - \hat{t})(b - a).$$

  Sie haben damit gezeigt, dass für die verallgemeinerte Ableitung von $f(t)$ gilt

  $$f'(t) \quad = \quad \delta(t - \hat{t})(b - a).$$

- Zeigen Sie durch Fallunterscheidung, dass

  $$f(t) \quad = \quad a + \sigma(t - \hat{t})(b - a) \qquad \text{für alle } t.$$

  Berechnen Sie dann die verallgemeinerte Ableitung von $f(t)$ unter Verwendung der Produktregel und $\sigma'(t) = \delta(t)$.

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{aligned}
(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_\varepsilon(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\hat{t}} a g_\varepsilon(t-\tau) d\tau + \int_{\hat{t}}^{\infty} b g_\varepsilon(t-\tau) d\tau \\
&= a \left[-G_\varepsilon(t-\tau)\right]_{-\infty}^{\hat{t}} + b \left[-G_\varepsilon(t-\tau)\right]_{\hat{t}}^{\infty} \\
&= -a(G_\varepsilon(t-\hat{t}) - G_\varepsilon(\infty)) - b(G_\varepsilon(-\infty) - G_\varepsilon(t-\hat{t})) \\
&= G_\varepsilon(t-\hat{t})(b-a) + aG_\varepsilon(\infty) - bG_\varepsilon(-\infty) \\
(f * g_\varepsilon)'(t) &= G'_\varepsilon(t-\hat{t})(b-a) \\
&= g_\varepsilon(t-\hat{t})(b-a) \\
\lim_{\varepsilon \to 0} (f * g_\varepsilon)'(t) &= \delta(t-\hat{t})(b-a).
\end{aligned}$$

Für $t < \hat{t}$ ist $\sigma(t-\hat{t}) = 0$ und somit

$$\begin{aligned}
a + \sigma(t-\hat{t})(b-a) &= a \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Für $t \geq \hat{t}$ ist $\sigma(t-\hat{t}) = 1$ und somit

$$\begin{aligned}
a + \sigma(t-\hat{t})(b-a) &= a + (b-a) \\
&= b \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \big(a + \sigma(t-\hat{t})(b-a)\big)' \\
&= \sigma'(t-\hat{t})(b-a) \\
&= \delta(t-\hat{t})(b-a).
\end{aligned}$$