Heilbronn, den 24.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 3

Aufgabe 1. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$2y'' + 4y' + 12y \quad = \quad e^{1-x}\cos(2x+1).$$

Lösung von Aufgabe 1. Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} r(x) &= e^{1-x}\mathrm{re}\Big(e^{j(2x+1)}\Big) \\ &= \mathrm{re}\big(e^1 e^{-x} e^{2jx} e^j\big) \\ &= \mathrm{re}\Big(e^{1+j} e^{(-1+2j)x}\Big). \end{aligned}$$

Zunächst wird die DGL

$$2y'' + 4y' + 12y \quad = \quad e^{\mu x}, \qquad \mu = -1+2j$$

gelöst. Ansatz:

$$y \quad = \quad ce^{\mu x}.$$

Einsetzen in die DGL und Division mit $e^{\mu x}$ ergibt

$$\begin{aligned} c(2\mu^2 + 4\mu + 12) &= 1 \\ c &= \frac{1}{2\mu^2 + 4\mu + 12} \\ &= \frac{1}{2(-1+2j)^2 + 4(-1+2j) + 12} \\ &= \frac{1}{2(1-4j-4) - 4 + 8j + 12} \\ &= \frac{1}{2(-3-4j) + 8 + 8j} \\ &= \frac{1}{-6-8j+8+8j} \\ &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2}e^{\mu x} \quad = \quad \frac{1}{2}e^{(-1+2j)x}. \end{aligned}$$

Damit ist eine partikuläre Lösung der DGL

$$\begin{aligned} 2y'' + 4y' + 12y &= e^{1+j}e^{\mu x} \\ y &= \big(e^{1+j}\big)\frac{1}{2}e^{\mu x} \quad = \quad \frac{1}{2}e^{1+j}e^{(-1+2j)x}. \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der gegebenen DGL ist somit

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{re}\left(\frac{1}{2}e^{1+j}e^{(-1+2j)x}\right) \\ &= \operatorname{re}\left(\frac{1}{2}e^{1}e^{j}e^{-x}e^{2jx}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{1-x}\operatorname{re}\left(e^{j(1+2x)}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{1-x}\cos(1+2x) \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen kann man die Lösung auch wie folgt darstellen:

$$y = \frac{1}{2}e^{1-x}((\cos(1)\cos(2x) - \sin(1)\sin(2x)).$$

Aufgabe 2. Sei S ein *bijektives* LTI System, d.h. zu jeder Funktion h existiert genau eine Funktion f mit

$$S(f) = h.$$

Damit existiert das inverse System S^{-1}, das jeder Funktion h diese Funktion f zuordnet, d.h.

$$S^{-1}(h) = f.$$

Ist S^{-1} linear und zeitinvariant? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Vor nicht allzu langer Zeit wurde gezeigt, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven linearen Funktion wieder linear ist.

Lösung von Aufgabe 2. Seien h, h_1, h_2 beliebige Funktionen und $u, \hat{t} \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} S^{-1}(h_1 + h_2) &= S^{-1}(h_1) + S^{-1}(h_2) \\ S^{-1}(uh) &= uS^{-1}(h) \\ S^{-1}(h_{\hat{t}}) &= S^{-1}(h)_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

Seien f, f_1, f_2 die Funktionswerte von S^{-1} bei f, f_1, f_2, d.h.

$$\begin{aligned} S^{-1}(h) &= f \\ S^{-1}(h_1) &= f_1 \\ S^{-1}(h_2) &= f_2. \end{aligned}$$

Da S Inverses System von S^{-1} ist, gilt

$$\begin{aligned} S(f) &= h \\ S(f_1) &= h_1 \\ S(f_2) &= h_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{array}{rcll} S^{-1}(h_1+h_2) &=& S^{-1}(S(f_1)+S(f_2)) & \\ &=& S^{-1}(S(f_1+f_2)) & \text{Linearität von } S \\ &=& f_1+f_2 & S^{-1} \text{ ist Umkehrsystem von } S \\ &=& S^{-1}(h_1)+S^{-1}(h_2) & \\ S^{-1}(uh) &=& S^{-1}(uS(f)) & \\ &=& S^{-1}(S(uf)) & \text{Linearität von } S \\ &=& uf & S^{-1} \text{ ist Umkehrsystem von } S \\ &=& uS^{-1}(h) & \\ S^{-1}(h_{\hat{t}}) &=& S^{-1}(S(f)_{\hat{t}}) & \\ &=& S^{-1}(S(f_{\hat{t}})) & \text{Zeitinvarianz von } S \\ &=& f_{\hat{t}} & S^{-1} \text{ ist Umkehrsystem von } S \\ &=& S^{-1}(h)_{\hat{t}} & \end{array}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sqrt{t^2+1}\,\delta(t-1).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Ausblendeigenschaft des Dirac Impulses und vereinfachen Sie dadurch das Fourier Integral.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{array}{rcl} F(\omega) &=& \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{t^2+1}\delta(t-1)e^{-j\omega t}dt \\ &=& \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\delta(t-1)e^{-j\omega}dt \\ &=& \sqrt{2}e^{-j\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)dt \\ &=& \sqrt{2}e^{-j\omega}. \end{array}$$

Aufgabe 4. Sei $f(t)$ eine Funktion mit

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-(\omega^2)}.$$

Sei $g(t) = \cos(t)$ und

$$h(t) \quad = \quad (f_{\hat{t}} * g)(t)$$

wobei $f_{\hat{t}}(t) = f(t-\hat{t})$.

- Berechnen Sie $H(\omega)$ mit Hilfe des Faltungssatzes. Vereinfachen Sie das Ergebnis, indem Sie die Eigenschaften des Dirac Impulses verwenden.
- Berechnen Sie dann $h(t)$ durch inverse Fourier Transformation. Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass kein j mehr darin auftritt.

Lösung von Aufgabe 4. Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$f_{\hat{t}}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}}e^{-(\omega^2)}.$$

Mit dem Faltungssatz gilt

$$\begin{aligned}
(f_{\hat{t}} * g)(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega\hat{t}}e^{-(\omega^2)}(\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)) \\
&= \quad \pi e^{-j\omega\hat{t}}e^{-(\omega^2)}\delta(\omega-1)+\pi e^{-j\omega\hat{t}}e^{-(\omega^2)}\delta(\omega+1) \\
&= \quad \pi e^{-j\hat{t}}e^{-1}\delta(\omega-1)+\pi e^{j\hat{t}}e^{-1}\delta(\omega+1) \\
&= \quad \frac{\pi}{e}(e^{-j\hat{t}}\delta(\omega-1)+e^{j\hat{t}}\delta(\omega+1))
\end{aligned}$$

Aus

$$e^{j\hat{\omega}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi\delta(\omega-\hat{\omega})$$

folgt für $\hat{\omega} = \pm 1$

$$\begin{aligned}
2\pi\delta(\omega-1) \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{jt} \\
2\pi\delta(\omega+1) \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{-jt}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2e}(e^{-j\hat{t}}e^{jt}+e^{j\hat{t}}e^{-jt}) \\
&= \frac{1}{e}\mathrm{re}(e^{j(t-\hat{t})}) \\
&= \frac{1}{e}\cos(t-\hat{t}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ te^t & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{für } t \ge 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ und geben Sie an für welche Werte von s diese existiert.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 te^te^{-st}dt + \int_1^\infty e^{-st}dt \\
\int_0^1 te^te^{-st}dt &= \int_0^1 te^{t(1-s)}dt \\
&= \left[t\frac{1}{1-s}e^{t(1-s)}\right]_0^1 - \frac{1}{1-s}\int_0^1 e^{t(1-s)}dt \\
&= \frac{1}{1-s}e^{1-s} - \frac{1}{(1-s)^2}\left[e^{t(1-s)}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1-s}e^{1-s} - \frac{1}{(1-s)^2}(e^{1-s}-1) \\
&= \frac{(1-s)e^{1-s} - e^{1-s} + 1}{(1-s)^2} \\
&= \frac{1-se^{1-s}}{(1-s)^2} \\
\int_1^\infty e^{-st}dt &= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_1^\infty \\
&= -\frac{1}{s}(0-e^{-s}) \qquad \text{falls } \mathrm{re}(s) > 0 \\
&= \frac{e^{-s}}{s}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(s) = \frac{1-se^{1-s}}{(1-s)^2} + \frac{e^{-s}}{s}$$

falls $\mathrm{re}(s) > 0$.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Integrale sofern sie existieren.

$$\int_0^\infty \cos(t)e^t dt, \qquad \int_{-\infty}^0 \cos(t)e^t dt.$$

Lösung von Aufgabe 6. Berechnung einer Stammfunktion.

$$\begin{aligned}
\int \cos(t)e^t dt &= \frac{1}{2}\int (e^{jt}+e^{-jt})e^t dt \\
&= \frac{1}{2}\int (e^{(1+j)t}+e^{(1-j)t}) dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j}e^{(1+j)t}+\frac{1}{1-j}e^{(1-j)t}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((1-j)e^{(1+j)t}+(1+j)e^{(1-j)t}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^t\left((1-j)e^{jt}+(1+j)e^{-jt}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^t \mathrm{re}((1-j)e^{jt}) \\
&= \frac{1}{2}e^t(\cos(t)+\sin(t)).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(t)e^t dt &= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[e^t(\cos(t)+\sin(t))\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} e^T(\cos(T)+\sin(T))-1.
\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \cos(t)e^t dt &= \frac{1}{2}\lim_{T\to-\infty}\left[e^t(\cos(t)+\sin(t))\right]_T^0 \\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to-\infty} 1-e^T(\cos(T)+\sin(T)) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = (\sigma(t)-\sigma(t-1))e^t.$$

Hinweis: Zeichnen Sie zuerst $\sigma(t-1)$ und $\sigma(t)$.

Lösung von Aufgabe 7. Es gilt

$$\sigma(t)-\sigma(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 e^t e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 e^{t(1-s)}dt \\
&= \frac{1}{1-s}\left[e^{t(1-s)}\right]_0^1 \\
&= \frac{e^{(1-s)}-1}{1-s}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = \sigma(t)\frac{\sin(\omega t)}{e^{at}}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Mit der Korrespondenz

$$e^{-at}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a)$$

und

$$\sigma(t)\sin(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma(t)\frac{\sin(\omega t)}{e^{at}} &= e^{-at}\sigma(t)\sin(\omega t) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Ohne Korrespondenz für die Verschiebung im Bildbereich würde die Lösung wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \sigma(t)\frac{\sin(\omega t)}{e^{at}} &= \sigma(t)\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-at} \\ &= \sigma(t)\frac{1}{2j}\left(e^{(-a+j\omega)t} - e^{(-a-j\omega)t}\right). \end{aligned}$$

Aus der Korrespondenz

$$\sigma(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-a} \qquad \text{falls } \mathrm{re}(s) > \mathrm{re}(a)$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma(t)e^{(-a+j\omega)t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{s-(-a+j\omega)} \\ = \quad & \frac{1}{s+a-j\omega} \end{aligned}$$

falls

$$\mathrm{re}(s) > \mathrm{re}(-a+j\omega)$$

bzw.

$$\mathrm{re}(s) > -\mathrm{re}(a).$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \sigma(t)e^{(-a-j\omega)t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{s-(-a-j\omega)} \\ = \quad & \frac{1}{s+a+j\omega} \end{aligned}$$

falls

$$\mathrm{re}(s) > \mathrm{re}(-a - j\omega)$$

bzw.

$$\mathrm{re}(s) > -\mathrm{re}(a).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(t)\frac{1}{2j}\left(e^{(-a+j\omega)t} - e^{(-a-j\omega)t}\right) & \\
\circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s+a-j\omega} - \frac{1}{s+a+j\omega}\right) \\
= \quad & \frac{1}{2j((s+a)^2+\omega^2)}(s+a+j\omega) - (s+a-j\omega)) \\
= \quad & \frac{2j\omega}{2j((s+a)^2+\omega^2)} \\
= \quad & \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

falls $\mathrm{re}(s) > -\mathrm{re}(a)$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)^4 e^s}.$$

Sie dürfen die Formelsammlung im Skript verwenden.

Lösung von Aufgabe 9. Umformen ergibt

$$F(s) = e^{-s}\frac{4}{(s-1)^4}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t)t^n e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Für $n = 3$ und $a = 1$ folgt

$$\sigma(t)t^3 e^t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{6}{(s-1)^4}.$$

Mit der Linearität folgt

$$\sigma(t)\frac{2}{3}t^3 e^t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{4}{(s-1)^4}.$$

Mit dem Verschiebungssatz und $\hat{t} = 1$ gilt damit

$$\sigma(t-1)\frac{2}{3}(t-1)^3 e^{t-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}\frac{4}{(s-1)^4}.$$

Die gesuchte Funktion ist somit

$$f(t) = \sigma(t-1)\frac{2}{3}(t-1)^3 e^{t-1}.$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie für beliebiges $t > 0$ das bestimmte Integral

$$g(t) = \int_0^t \delta(\tau - 1) d\tau.$$

Lösung von Aufgabe 10. Die Funktion $\delta(\tau - 1)$ ist ein Dirac Impuls an der Stelle $\tau = 1$. Integriert man diese Funktion von 0 bis t, muss man eine Fallunterscheidung machen:

- Ist $t < 1$, d.h. der Impuls ist außerhalb des Intervalls, über das integriert wird, dann ist
$$g(t) = 0.$$
- Ist $t \geq 1$, d.h. der Impuls ist in dem Intervall, über das integriert wird, dann ist
$$g(t) = 1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 1 \\ 1 & \text{falls } t \geq 1 \end{cases} \\ &= \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Einfacher wäre es gegangen, wenn man ausnutzt, dass $\sigma(\tau)$ eine Stammfunktion von $\delta(\tau)$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta(\tau - 1) d\tau &= [\sigma(\tau - 1)]_0^t \\ &= \sigma(t-1) - \sigma(-1) \\ &= \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie eine Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s+1}{s^2+s-2}.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung. Bei der Rücktransformation der Partialbrüche hilft die Korrespondenz

$$\frac{1}{s-a} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{at}.$$

Lösung von Aufgabe 11. Faktorisierung des Nenners.

$$\begin{aligned} s^2+s-2 &= 0 \\ s_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{2} \\ s_1 &= 1 \\ s_2 &= -2 \\ s^2+s-2 &= (s-1)(s+2). \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{s+1}{(s-1)(s+2)} &= \frac{c_1}{s-1}+\frac{c_2}{s+2}\\ s+1 &= c_1(s+2)+c_2(s-1)\end{aligned}$$

Spezialfall $s=1$.

$$\begin{aligned}2 &= 3c_1\\ c_1 &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Spezialfall $s=-2$.

$$\begin{aligned}-1 &= -3c_2\\ c_2 &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{s+1}{s^2+s-2} = \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}.$$

Mit

$$\sigma(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-a}$$

folgt für $a=1$ bzw. $a=-2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{t}\\ \frac{1}{s+2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{-2t}.\end{aligned}$$

Mit der Linearität folgt damit

$$\frac{s+1}{s^2+s-2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{2}{3}\sigma(t)e^{t}+\frac{1}{3}\sigma(t)e^{-2t}.$$

Aufgabe 12. Sei

$$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f''(t)$, $(\sigma(t)f'(t))'$ und $(\sigma(t)f(t))''$.

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned}\sigma(t)f'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s)-f(0^-)\\ \sigma(t)f''(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)\\ (\sigma(t)f'(t))' &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2F(s)-sf(0^-)\\ (\sigma(t)f(t))'' &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2F(s).\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t-2)\cos(t-2)$$
$$\sigma(t)\cos(t-2)$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned}\sigma(t)\cos(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+1}\\ \sigma(t-2)\cos(t-2) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-2s}\frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Die schnellste Möglichkeit um $\sigma(t)\cos(t-2)$ zu transformieren ist die Verwendung der Additionstheoreme.

$$\begin{aligned}\sigma(t)\cos(t-2) &= \sigma(t)(\cos(t)\cos(2)+\sin(t)\sin(2))\\ &= \sigma(t)\cos(2)\cos(t)+\sigma(t)\sin(2)\sin(t)\\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \cos(2)\frac{s}{s^2+1}+\sin(2)\frac{1}{s^2+1}\\ &= \frac{s\cos(2)+\sin(2)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Ein anderer Rechenweg führt über komplexe e-Funktionen.

$$\begin{aligned}\sigma(t)\cos(t-2) &= \frac{1}{2}\sigma(t)(e^{j(t-2)}+e^{-j(t-2)})\\ &= \frac{1}{2}\sigma(t)(e^{-2j}e^{jt}+e^{2j}e^{-jt})\\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2j}}{s-j}+\frac{e^{2j}}{s+j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{-2j}(s+j)+e^{2j}(s-j)}{s^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{s(e^{-2j}+e^{2j})+j(e^{-2j}-e^{2j})}{s^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{s\ 2\mathrm{re}(e^{-2j})+j\ 2j\mathrm{im}(e^{-2j})}{s^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2s\cos(-2)-2\sin(-2)}{s^2+1}\\ &= \frac{s\cos(2)+\sin(2)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Der Dämpfungssatz der Laplace Trasformation besagt, dass

$$e^{-at}f(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s+a).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformiert von $\sigma(t)e^t\cos(\omega t)$ und von $\sigma(t)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$. Stellen Sie dazu die Sinus Funktion als Summe zweier komplexer e-Funktionen dar.

Lösung von Aufgabe 14. Der Dämpfungssatz für $a=-1$ besagt

$$e^t f(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s-1).$$

Mit

$$\sigma(t)\cos(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

gilt somit

$$\sigma(t)e^t\cos(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s-1}{(s-1)^2+\omega^2}.$$

Für die Sinus Funktion gilt

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right).$$

Damit ist

$$\sigma(t)\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(\sigma(t)e^{j\omega t}\cos(\omega t) - \sigma(t)e^{-j\omega t}\cos(\omega t)\right).$$

Der Dämpfungssatz besagt für $a = -j\omega$ bzw. $a = j\omega$

$$\begin{aligned} e^{j\omega t}f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s-j\omega) \\ e^{-j\omega t}f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+j\omega). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sigma(t)e^{j\omega t}\cos(\omega t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s-j\omega}{(s-j\omega)^2+\omega^2} \\ &= \frac{s-j\omega}{s(s-2j\omega)} \\ \sigma(t)e^{-j\omega t}\cos(\omega t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s+j\omega}{(s+j\omega)^2+\omega^2} \\ &= \frac{s+j\omega}{s(s+2j\omega)}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sigma(t)\sin(\omega t)\cos(\omega t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2js}\left(\frac{s-j\omega}{s-2j\omega} - \frac{s+j\omega}{s+2j\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+4\omega^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)\sqrt{e^t}.$$

Sie dürfen alle Korrespondenzen im Anhang des Skripts benutzen.

Lösung von Aufgabe 15. Da

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)\sqrt{e^t} \\ &= \sigma(t)e^{t/2} \end{aligned}$$

folgt mit der Korrespondenz

$$\sigma(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-a}$$

dass

$$\sigma(t)e^{t/2} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-1/2}.$$

Aufgabe 16. Vereinfachen Sie den Term

$$\delta(t-1)\int_0^t e^u du$$

so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 16. Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac Impulses gilt

$$\begin{aligned}\delta(t-1)\int_0^t e^u du &= \delta(t-1)\int_0^1 e^u du \\ &= \delta(t-1)\left[e^u\right]_0^1 \\ &= \delta(t-1)(e-1).\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Skizzieren Sie die Funktion

$$f(t) = \sigma(t)\cos(t)$$

und die Funktionen

$$\begin{aligned}g(t) &= f(t-2\pi) \\ h(t) &= f(t) - g(t).\end{aligned}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte von $h(t)$.

Lösung von Aufgabe 17. Es gilt

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $g(t)$ sieht gleich aus wie $f(t)$, jedoch um 2π nach rechts verschoben, d.h.

$$g(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } t \geq 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $h(t)$ überall Null, außer im Intervall $[0, 2\pi[$.

$$h(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laplace Transformierte berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
h(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0}^{2\pi} \cos(t) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left(e^{jt} + e^{-jt}\right) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left(e^{(-s+j)t} + e^{(-s-j)t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-s+j} \left[e^{(-s+j)t}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{-s-j} \left[e^{(-s-j)t}\right]_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(-s+j)2\pi} - 1}{-s+j} + \frac{e^{(-s-j)2\pi} - 1}{-s-j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2\pi s} - 1}{-s+j} + \frac{e^{-2\pi s} - 1}{-s-j} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2\pi s} - 1}{s-j} + \frac{e^{-2\pi s} - 1}{s+j} \right) \\
&= -\frac{e^{-2\pi s} - 1}{2} \left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j} \right) \\
&= \frac{1 - e^{-2\pi s}}{2(s^2+1)} (s + j + s - j) \\
&= \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$

ein Impulszug. Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Hinweis. Für $|a| < 1$ lässt sich die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

wie folgt in geschlossener Form berechnen. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
aS &= a \sum_{k=0}^{\infty} a^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} \\
&= a^1 + a^2 + a^3 + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a^k.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
S - aS &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=1}^{\infty} a^k \\
&= a^0 \\
&= 1 \\
S(1-a) &= 1 \\
S &= \frac{1}{1-a}.
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k) \\
&\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k) e^{-st} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t-k) e^{-st} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t-k) e^{-sk} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \int_0^{\infty} \delta(t-k) dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \qquad \text{falls } \operatorname{re}(s) > 1.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \\
e^{-s} F(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s} e^{-sk} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} \\
F(s)(1 - e^{-s}) &= 1 \\
F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \\
&= \frac{e^s}{e^s - 1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t) \cos(at + b).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit, dass keine komplexen e-Funktionen darin auftreten.

Lösung von Aufgabe 19.

$$
\begin{aligned}
\sigma(t)\cos(at+b) &= \sigma(t)\frac{1}{2}\left(e^{j(at+b)} + e^{-j(at+b)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma(t)e^{jat}e^{jb} + \sigma(t)e^{-jat}e^{-jb}\right) \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja}e^{jb} + \frac{1}{s+ja}e^{-jb}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jb}(s+ja) + e^{-jb}(s-ja)}{s^2+a^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s(e^{jb}+e^{-jb}) + ja(e^{jb}-e^{-jb})}{s^2+a^2}\right) \\
&= \frac{s\cos(b) - a\sin(b)}{s^2+a^2}
\end{aligned}
$$