

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ beliebig. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t - a) = e^{\mu t}$$

mit dem Ansatz $f(t) = ce^{\mu t}$.

Den Spezialfall $\mu + e^{-\mu a} = 0$ dürfen Sie ausschließen.

Lösung von Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= ce^{\mu t} \\ f'(t) &= c\mu e^{\mu t} \\ f(t - a) &= ce^{\mu(t-a)} = ce^{\mu t} e^{-\mu a}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} c\mu e^{\mu t} + ce^{\mu t} e^{-\mu a} &= e^{\mu t} \\ c\mu + ce^{-\mu a} &= 1 \\ c(\mu + e^{-\mu a}) &= 1 \\ c &= \frac{1}{\mu + e^{-\mu a}}. \end{aligned}$$

Damit ist eine Lösung der DGL

$$f(t) = \frac{1}{\mu + e^{-\mu a}} e^{\mu t}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = x - \frac{y}{x}$$

für $x > 0$.

Lösung von Aufgabe 2. Umformen ergibt

$$y' + \frac{1}{x}y = x.$$

Es handelt sich also um eine lineare DGL erster Ordnung.

- Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{x}y &= 0 \\
\frac{1}{y}y' &= -\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx \\
\ln(|y|) &= -\ln(|x|) + C \\
|y| &= K\frac{1}{|x|}, \quad K > 0 \\
y &= K\frac{1}{|x|}, \quad K \in \mathbb{R} \\
y &= K\frac{1}{x}, \text{ da } x > 0.
\end{aligned}$$

- Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x)\frac{1}{x} \\
y' &= k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$\begin{aligned}
k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + k(x)\frac{1}{x^2} &= x \\
k'(x)\frac{1}{x} &= x \\
k'(x) &= x^2 \\
k(x) &= x^3/3 + C.
\end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^3/3 + C}{x} \\
&= \frac{1}{3}x^2 + C\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)^3}$$

Lösung von Aufgabe 3. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$y^3 dy = x^2 dx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Auflösen nach y ergibt

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[4]{\frac{4x^3}{3} + 4C} \\ &= \sqrt[4]{\frac{4x^3}{3} + K}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Die 4-periodische Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-2)$$

falls $0 \leq t < 4$ und $f(t+4) = f(t)$ für alle t .

Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

Geben Sie dann z_0, z_1, z_2 und z_3 in kartesischen Koordinaten an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 (\delta(t-1) + 2\delta(t-2)) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 \delta(t-1) e^{-jk\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^4 \delta(t-2) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 \delta(t-1) e^{-jk\omega} dt + \frac{1}{2} \int_0^4 \delta(t-2) e^{-2jk\omega} dt \\ &= \frac{1}{4} e^{-jk\omega} \int_0^4 \delta(t-1) dt + \frac{1}{2} e^{-2jk\omega} \int_0^4 \delta(t-2) dt \\ &= \frac{1}{4} e^{-2\pi jk/4} + \frac{1}{2} e^{-4\pi jk/4} \\ &= \frac{1}{4} e^{-jk\pi/2} + \frac{1}{2} e^{-jk\pi} \\ &= \begin{cases} 3/4 & \text{falls } k = 4n \\ -1/2 - j/4 & \text{falls } k = 4n + 1 \\ 1/4 & \text{falls } k = 4n + 2 \\ -1/2 + j/4 & \text{falls } k = 4n + 3 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $g_\varepsilon(t)$ eine stetige Funktion mit

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &\geq 0 \quad \text{für alle } t \\ g_\varepsilon(t) &= 0 \quad \text{für } t \notin [0, \varepsilon] \end{aligned}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Weiter sei

$$G_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t g_\varepsilon(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $g_\varepsilon(t)$.

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t) g_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} G_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) d\tau = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} G_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{-\infty} g_\varepsilon(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration erhält man damit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t) g_\varepsilon(t) dt &= [G_\varepsilon(t) G_\varepsilon(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) G_\varepsilon(t) dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t) g_\varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t) g_\varepsilon(t) dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t) g_\varepsilon(t) dt &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \sin(t) \\ g(t) &= -\sigma(t) \sin(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$. Beachten Sie, dass $(f * g)(t) = 0$ für $t < 0$ sein muss!

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)\sin(\tau)\sin(t-\tau)d\tau \\
 &= -\sigma(t) \int_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)d\tau \\
 &= \frac{\sigma(t)}{4} \int_0^t (e^{j\tau} - e^{-j\tau})(e^{j(t-\tau)} - e^{-j(t-\tau)})d\tau \\
 &= \frac{\sigma(t)}{4} \int_0^t (e^{jt} - e^{-jt+2j\tau} - e^{jt-2j\tau} + e^{-jt})d\tau \\
 &= \frac{\sigma(t)}{4} \int_0^t (e^{jt} + e^{-jt} - (e^{j(2\tau-t)} + e^{-j(2\tau-t)}))d\tau \\
 &= \frac{\sigma(t)}{4} \int_0^t (2\cos(t) - 2\cos(2\tau-t))d\tau \\
 &= \frac{\sigma(t)}{2} [\cos(t)\tau - \sin(2\tau-t)/2]_0^t \\
 &= \frac{\sigma(t)}{2} (t\cos(t) - \sin(t)/2 + \sin(-t)/2) \\
 &= \frac{\sigma(t)}{2} (t\cos(t) - \sin(t))
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t-a) = \cos(t)$$

mit Fourier Transformation. Vereinfachen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Ausblendeigenschaft.

Warum würde hier die Lösung mit Laplace Transformation nicht funktionieren?

Lösung von Aufgabe 7. Um die DGL mit Laplace Transformation zu lösen, müsste man zuerst beide Seiten mit $\sigma(t)$ multiplizieren. Die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f(t-a)$ lässt sich jedoch nicht einfach mit der Laplace Transformierten von $\sigma(t)f(t)$ ausdrücken.

Sei

$$\begin{aligned}
 f(t) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet F(\omega) \\
 f'(t) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet j\omega F(\omega) \\
 f(t-a) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet e^{-j\omega a}F(\omega) \\
 \cos(t) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)).
 \end{aligned}$$

Damit ist die DGL im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 j\omega F(\omega) + e^{-j\omega a} F(\omega) &= \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) \\
 F(\omega)(j\omega + e^{-j\omega a}) &= \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) \\
 F(\omega) &= \pi\delta(\omega - 1) \frac{1}{j\omega + e^{-j\omega a}} + \pi\delta(\omega + 1) \frac{1}{j\omega + e^{-j\omega a}} \\
 F(\omega) &= \pi\delta(\omega - 1) \frac{1}{j + e^{-ja}} + \pi\delta(\omega + 1) \frac{1}{-j + e^{ja}}.
 \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned}
 \delta(\omega) &\bullet \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \\
 \delta(\omega - 1) &\bullet \longrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{jt} \\
 \delta(\omega + 1) &\bullet \longrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-jt}.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &\bullet \longrightarrow \frac{1}{2} e^{jt} \frac{1}{j + e^{-ja}} + \frac{1}{2} e^{-jt} \frac{1}{-j + e^{ja}} \\
 &= \operatorname{re} \left(e^{jt} \frac{1}{j + e^{-ja}} \right) \\
 &= \operatorname{re} \left(e^{jt} \frac{1}{\cos(a) - j \sin(a) + j} \right) \\
 &= \operatorname{re} \left(e^{jt} \frac{1}{\cos(a) + j(1 - \sin(a))} \right) \\
 &= \operatorname{re} \left(e^{jt} \frac{\cos(a) - j(1 - \sin(a))}{\cos^2(a) + (1 - \sin(a))^2} \right) \\
 &= \operatorname{re} \left(e^{jt} \frac{\cos(a) - j(1 - \sin(a))}{\cos^2(a) + \sin^2(a) + 1 - 2\sin(a)} \right) \\
 &= \frac{1}{2 - 2\sin(a)} \operatorname{re}((\cos(t) + j \sin(t))(\cos(a) - j(1 - \sin(a)))) \\
 &= \frac{\cos(t) \cos(a) + \sin(t)(1 - \sin(a))}{2 - 2\sin(a)} \\
 &= \frac{\cos(t) \cos(a)}{2 - 2\sin(a)} + \frac{\sin(t)}{2}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Sei $g(t)$ eine Funktion mit Laplace Transformierter $G(s)$. Weiterhin sei $f(t)$ definiert durch

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t - kT)$$

für ein $T > 0$. Zeigen Sie, dass für die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ gilt

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst einen Term für $f(t-T)$, wenden Sie den Verschiebungssatz der Laplace Transformation an und überlegen Sie sich, was

$$f(t) - f(t-T)$$

ist.

Lösung von Aufgabe 8. Verschiebt man $f(t)$ um T nach rechts, erhält man

$$\begin{aligned} f(t-T) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-T-kT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-(k+1)T) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f(t) - f(t-T) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT) - \sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT) \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Der Verschiebungssatz der Laplace Transformation besagt

$$f(t-T) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad e^{-sT} F(s).$$

Aus

$$f(t) - f(t-T) = g(t)$$

erhält man somit

$$F(s) - e^{-sT} F(s) = G(s)$$

bzw.

$$F(s)(1 - e^{-sT}) = G(s)$$

und damit

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

Aufgabe 9. Sei

$$f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte $H(s)$ von

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t-3} f(\tau) d\tau.$$

Berechnen Sie weiterhin eine Funktion $g(t)$ so dass

$$h(t) = (f * g)(t).$$

Lösung von Aufgabe 9. Sei

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Dann ist

$$U(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

Da

$$h(t) = u(t-3)$$

folgt mit dem Verschiebungssatz

$$H(s) = e^{-3s} U(s) = \frac{e^{-3s}}{s} F(s).$$

Für

$$G(s) = \frac{e^{-3s}}{s}$$

gilt

$$H(s) = F(s)G(s).$$

Mit dem Faltungssatz ist somit

$$h(t) = (f * g)(t).$$

Da

$$\begin{array}{l} \frac{1}{s} \quad \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t) \\ e^{-3s} \frac{1}{s} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \sigma(t-3) \end{array}$$

ist

$$g(t) = \sigma(t-3).$$

Aufgabe 10. Transformieren Sie die Funktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{(s+1)^3}$$

in den Zeitbereich.

Lösung von Aufgabe 10. Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + 1}{(s+1)^3} &= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3} \\ s^2 + 1 &= c_1(s+1)^2 + c_2(s+1) + c_3 \\ &= s^2 c_1 + s(2c_1 + c_2) + c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Gleichungen:

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\2c_1 + c_2 &= 0 \\c_1 + c_2 + c_3 &= 1\end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\c_2 &= -2 \\c_3 &= 2\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Mit

$$\begin{aligned}\sigma(t) &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{1}{s} \\ \sigma(t)t &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{1}{s^2} \\ \sigma(t)t^2 &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

und dem Dämpfungssatz

$$e^{-t}f(t) \circ\!\!\!-\!\!\!\bullet F(s+1)$$

folgt

$$\begin{aligned}\sigma(t)e^{-t} &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{1}{s+1} \\ \sigma(t)te^{-t} &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{1}{(s+1)^2} \\ \sigma(t)t^2e^{-t} &\circ\!\!\!-\!\!\!\bullet \frac{2}{(s+1)^3}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}f(t) &= \sigma(t)e^{-t}(1-2t+t^2) \\ &= \sigma(t)e^{-t}(t-1)^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Transformieren Sie die Funktion

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)e^s}$$

in den Zeitbereich. Lösen Sie die Aufgabe auf mehrere Weisen.

Lösung von Aufgabe 11. Die Funktion $F(s)$ kann als Produkt dargestellt werden:

$$F(s) = e^{-s} \frac{1}{s+1}.$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten.

- Mit dem Verschiebungssatz

$$e^{-s\hat{t}}F(s) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t - \hat{t})$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} & \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t)e^{-t} \\ e^{-s}\frac{1}{s+1} & \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t-1)e^{-(t-1)} \\ & = \quad \sigma(t-1)e^{1-t}. \end{aligned}$$

- Mit

$$\begin{aligned} \delta(t-1) & \circ \text{---} \bullet \quad e^{-s} \\ \sigma(t)e^{-t} & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

und dem Faltungssatz

$$(f * g)(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s)G(s)$$

folgt

$$\begin{aligned} e^{-s}\frac{1}{s+1} & \bullet \text{---} \circ \quad \delta(t-1) * \sigma(t)e^{-t} \\ & = \quad \sigma(t-1)e^{1-t}. \end{aligned}$$

- Umformen ergibt

$$F(s) = \frac{e}{(s+1)e^{s+1}}.$$

Mit

$$G(s) = \frac{1}{se^s}$$

gilt $F(s) = eG(s+1)$. Zuerst wird nun $G(s)$ in den Zeitbereich transformiert.

$$\begin{aligned} G(s) & \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t) * \delta(t-1) \\ & = \quad \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz im Bildbereich

$$e^{-at}g(t) \quad \bullet \text{---} \circ \quad G(s+a)$$

gilt für $a = 1$

$$e^{-t}\sigma(t-1) \quad \circ \text{---} \bullet \quad G(s+1)$$

und

$$e^{1-t}\sigma(t-1) \quad \circ \text{---} \bullet \quad eG(s+1) = F(s).$$

Aufgabe 12. Sei $f(t)$ an der Stelle $\hat{t}$ stetig und

$$\sigma(t - \hat{t})f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t - \hat{t})f'(t).$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} \sigma(t - \hat{t})f'(t) &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \hat{t})f'(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{\hat{t}}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_{\hat{t}}^{\infty} - \int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Da $\sigma(t - \hat{t})f(t)$ eine Laplace Transformierte hat, existiert das Integral

$$\int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

und damit ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0.$$

Folglich ist

$$[f(t)e^{-st}]_{\hat{t}}^{\infty} = -f(\hat{t})e^{-s\hat{t}}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma(t - \hat{t})f'(t) &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad -f(\hat{t})e^{-s\hat{t}} + s \int_{\hat{t}}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= s \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \hat{t})f(t)e^{-st} dt - f(\hat{t})e^{-s\hat{t}} \\ &= sF(s) - f(\hat{t})e^{-s\hat{t}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei

$$f(t) = t + 1.$$

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f(t)$.
- Berechnen Sie $(\sigma(t)f(t))'$ und $\sigma(t)f'(t)$ sowie die Laplace Transformierte von beiden Funktionen.
- Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass wenn

$$\sigma(t)f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(s)$$

gilt

$$\sigma(t)f'(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f(t) &= \sigma(t)t + \sigma(t) \\
 &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\
 \sigma(t)f(t) &= \begin{cases} t+1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
 (\sigma(t)f(t))' &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ \delta(t) & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
 &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s} + 1 \\
 \sigma(t)f'(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\
 &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Mit

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

und

$$f(0^-) = 1$$

ist

$$\begin{aligned}
 sF(s) - f(0^-) &= \frac{1}{s} + 1 - 1 \\
 &= \frac{1}{s} \\
 &\bullet\text{---}\circ \sigma(t)f'(t).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'(t) + 3f(t) = \sin(2t), \quad f(0^-) = 1$$

für $t \geq 0$ durch Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 14. Laplace Transformation

$$\begin{aligned}
 sF(s) - 1 + 3F(s) &= \frac{2}{s^2 + 4} \\
 F(s)(s+3) &= \frac{2}{s^2 + 4} + 1 \\
 F(s) &= \frac{2}{(s+3)(s^2+4)} + \frac{1}{s+3}.
 \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(s+3)(s^2+4)} &= \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_2s+c_3}{s^2+4} \\
 1 &= c_1(s^2+4) + (c_2s+c_3)(s+3) \\
 1 &= s^2(c_1+c_2) + s(3c_2+c_3) + 4c_1+3c_3
 \end{aligned}$$

Gleichungen

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 0 \\3c_2 + c_3 &= 0 \\4c_1 + 3c_3 &= 1\end{aligned}$$

Lösungen

$$\begin{aligned}c_1 &= 1/13 \\c_2 &= -1/13 \\c_3 &= 3/13\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+3)(s^2+4)} &= \frac{1}{13} \left(\frac{1}{s+3} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+4} \right) \\&= \frac{1}{13} \left(\frac{1}{s+3} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{2} \frac{2}{s^2+4} \right) \\&\bullet \longrightarrow \frac{1}{13} \left(e^{-3t} - \cos(2t) + \frac{3}{2} \sin(2t) \right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}F(s) &\bullet \longrightarrow \frac{2}{13} \left(e^{-3t} - \cos(2t) + \frac{3}{2} \sin(2t) \right) + e^{-3t} \\&= \frac{15}{13} e^{-3t} - \frac{2}{13} \cos(2t) + \frac{3}{13} \sin(2t).\end{aligned}$$

Mit einer vollständigen (komplexen) Partialbruchzerlegung wäre der Rechenweg etwas länger gewesen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+3)(s-2j)(s+2j)} &= \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_2}{s-2j} + \frac{c_3}{s+2j} \\1 &= c_1(s^2+4) + c_2(s+3)(s+2j) + c_3(s+3)(s-2j)\end{aligned}$$

Spezialfall $s = -3$

$$\begin{aligned}1 &= 13c_1 \\c_1 &= 1/13.\end{aligned}$$

Spezialfall $s = 2j$

$$\begin{aligned}1 &= c_2(2j+3)4j = c_2(-8+12j) \\c_2 &= \frac{1}{-8+12j} = \frac{-8-12j}{208} = \frac{-2-3j}{52}\end{aligned}$$

Spezialfall $s = -2j$

$$\begin{aligned}1 &= c_3(-2j+3)(-4j) = c_3(-8-12j) \\c_3 &= \frac{1}{-8-12j} = \frac{-8+12j}{208} = \frac{-2+3j}{52} = \overline{c_2}\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(s+3)(s^2+4)} &= \frac{1}{13} \frac{1}{s+3} + \frac{-2-3j}{52} \frac{1}{s-2j} + \frac{-2+3j}{52} \frac{1}{s+2j} \\
 &\bullet \longrightarrow \frac{1}{13} e^{-3t} + \underbrace{\frac{-2-3j}{52} e^{2jt} + \frac{-2+3j}{52} e^{-2jt}}_{\text{konjugiert komplex}} \\
 &= \frac{1}{13} e^{-3t} + 2 \operatorname{re} \left(\frac{-2-3j}{52} e^{2jt} \right) \\
 &= \frac{1}{13} e^{-3t} - \frac{1}{26} \operatorname{re}((2+3j)(\cos(2t) + j \sin(2t))) \\
 &= \frac{1}{13} e^{-3t} - \frac{1}{26} (2 \cos(2t) - 3 \sin(2t)) \\
 &= \frac{1}{13} e^{-3t} - \frac{1}{13} \cos(2t) + \frac{3}{26} \sin(2t)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Lösen Sie die DGL

$$f'(t) + f(t) = t, \quad f(0^-) = 0$$

einmal im Zeitbereich und einmal mit Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis.

Lösung von Aufgabe 15.

- Lösung im Zeitbereich. Homogene DGL

$$f'(t) + f(t) = 0.$$

Ansatz:

$$f(t) = e^{\lambda t}.$$

Charakteristisches Polynom.

$$\begin{aligned}
 \lambda + 1 &= 0 \\
 \lambda &= -1.
 \end{aligned}$$

Basislösung.

$$f(t) = e^{-t}$$

Allgemeine homogene Lösung.

$$f(t) = C e^{-t}.$$

Partikuläre inhomogene Lösung. Ansatz:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= at + b \\
 f'(t) &= a.
 \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL.

$$\begin{aligned}a + at + b &= t \\a &= 1 \\b &= -1.\end{aligned}$$

Partikuläre inhomogene Lösung.

$$f(t) = t - 1.$$

Allgemeine inhomogene Lösung.

$$f(t) = t - 1 + Ce^{-t}.$$

Startwert.

$$\begin{aligned}f(0^-) &= -1 + C \\&= 0 \\C &= 1.\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung mit gegebenem Startwert.

$$f(t) = t - 1 + e^{-t}.$$

- Lösung mit Laplace Transformation. Mit

$$\begin{aligned}\sigma(t)f(t) &\circ\!\!\!\bullet F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\circ\!\!\!\bullet sF(s) - f(0^-) \\ &= sF(s)\end{aligned}$$

wird aus der DGL im Bildbereich

$$\begin{aligned}sF(s) + F(s) &= \frac{1}{s^2} \\ F(s)(s+1) &= \frac{1}{s^2} \\ F(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)}.\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s+1} \\ 1 &= c_1s(s+1) + c_2(s+1) + c_3s^2.\end{aligned}$$

Aus $s = 0$ folgt $c_2 = 1$. Aus $s = -1$ folgt $c_3 = 1$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}1 &= c_1s(s+1) + s + 1 + s^2 \\ c_1s(s+1) + s(s+1) &= 0 \\ c_1 &= -1.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \\ \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t)(-1+t+e^{-t}) \\ &= \sigma(t)f(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(t) = t - 1 + e^{-t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Mit Laplace Transformation erhält man die Lösungsfunktion $f(t)$ nur im Bereich $t \geq 0$. Dort stimmt die Lösung mit der im Zeitbereich ermittelten überein.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$f'(t) - f(t) = t \cos(t)$$

für $t \geq 0$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die allgemeine homogene Lösung mit dem $e^{\lambda t}$ Ansatz. Eine partikuläre inhomogene Lösung liefert die Laplace Transformation wenn man z.B. den Startwert $f(0^-) = 0$ wählt.

Lösung von Aufgabe 16. Die homogene DGL ist

$$f'(t) - f(t) = 0.$$

Mit dem Ansatz $f(t) = e^{\lambda t}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \lambda - 1 &= 0 \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine homogene Lösung

$$f(t) = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre inhomogene Lösung erhält man, indem man den Startwert $f(0^-) = 0$ vorgibt. Da nur der Bereich $t \geq 0$ interessiert, kann man beide Seiten mit $\sigma(t)$ multiplizieren so dass die Laplace Transformierte der rechten Seite existiert.

$$\begin{aligned} \sigma(t)f'(t) - \sigma(t)f(t) &= \sigma(t)t \cos(t) \\ &= \operatorname{re}(\sigma(t)te^{jt}). \end{aligned}$$

Zunächst wird die DGL

$$\sigma(t)f'(t) - \sigma(t)f(t) = \sigma(t)te^{jt}$$

gelöst. Mit

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &\text{---} \bullet \quad F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\text{---} \bullet \quad sF(s) - f(0^-) \\ \sigma(t)e^{jt} &\text{---} \bullet \quad \frac{1}{s-j} \\ \sigma(t)te^{jt} &\text{---} \bullet \quad -\left(\frac{1}{s-j}\right)' \\ &= \frac{1}{(s-j)^2} \end{aligned}$$

ist die DGL im Bildbereich

$$\begin{aligned} F(s)(s-1) &= \frac{1}{(s-j)^2} \\ F(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-j)^2}. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s-j)^2} &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-j} + \frac{c_3}{(s-j)^2} \\ 1 &= c_1(s-j)^2 + c_2(s-1)(s-j) + c_3(s-1) \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= c_1(1-j)^2 \\ &= c_1(1-2j-1) \\ &= -2jc_1 \\ c_1 &= -\frac{1}{2j} \\ &= \frac{j}{2} \end{aligned}$$

Spezialfall $s = j$.

$$\begin{aligned} 1 &= c_3(j-1) \\ c_3 &= \frac{1}{j-1} \\ &= \frac{-j-1}{2} \\ &= -\frac{1+j}{2} \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{j}{2}(-j)^2 + c_2j - \frac{1+j}{2}(-1) \\ &= -\frac{j}{2} + c_2j + \frac{1+j}{2} \\ &= c_2j + \frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{1}{j}(1 - \frac{1}{2}) \\ &= -\frac{j}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung der DGL mit rechter Seite $\sigma(t)te^{jt}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{j}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{j}{2} \frac{1}{s-j} - \frac{1+j}{2} \frac{1}{(s-j)^2} \\ \bullet \longrightarrow \sigma(t) &\left(\frac{j}{2}e^t - \frac{j}{2}e^{jt} - \frac{1+j}{2}te^{jt} \right). \end{aligned}$$

Der Realteil hiervon ist

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) \operatorname{re} \left(\frac{j}{2} e^t - \frac{j}{2} e^{jt} - \frac{1+j}{2} t e^{jt} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma(t) \operatorname{re} (-j(\cos(t) + j \sin(t)) - (1+j)t(\cos(t) + j \sin(t))) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma(t) (\sin(t) - t \cos(t) + t \sin(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma(t) ((1+t) \sin(t) - t \cos(t)).
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sigma(t)f(t) = \frac{1}{2} \sigma(t) ((1+t) \sin(t) - t \cos(t))$$

und folglich

$$f(t) = \frac{(1+t) \sin(t) - t \cos(t)}{2}$$

für $t \geq 0$. Zusammen mit der allgemeinen homogenen Lösung erhält man damit

$$f(t) = C e^t + \frac{(1+t) \sin(t) - t \cos(t)}{2}.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t) = \sigma(t) + \delta(t), \quad f(0^-) = -1$$

für $t \geq 0$.

Lösung von Aufgabe 17. Sei

$$\sigma(t)f(t) \circ \bullet F(s).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0^-) \\
 &= sF(s) + 1.
 \end{aligned}$$

Multiplikation der DGL mit $\sigma(t)$ und Laplace Transformation ergibt

$$\begin{aligned}
 \sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) &= \sigma(t) + \delta(t) \\
 sF(s) + 1 + F(s) &= \frac{1}{s} + 1 \\
 F(s)(s+1) &= \frac{1}{s} \\
 F(s) &= \frac{1}{s(s+1)}.
 \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} \\
 1 &= c_1(s+1) + c_2s
 \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$ ergibt $c_1 = 1$. Spezialfall $s = -1$ ergibt $c_2 = -1$. Damit ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\ &\bullet \text{---} \circ \sigma(t) - \sigma(t)e^{-t} \\ &= \sigma(t)(1 - e^{-t}). \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Aufgabe 18. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte von $\sqrt{t}$.

Lösung von Aufgabe 18. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \\ F(s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi} s^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt{t} &= t \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &\circ \text{---} \bullet \quad -\frac{d}{ds} F(s) \\ &= -\sqrt{\pi}(-1/2)s^{-3/2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}} \end{aligned}$$