Heilbronn, den 7.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 5

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{|t|} \\ g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass $f(t)$ bei $t = 0$ nicht differenzierbar ist.
- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$.
- (Freiwillig) Zeigen Sie, dass $(f * g_\varepsilon)(t)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist.

Lösung von Aufgabe 1.

- Sekantensteigung von $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = \Delta t$.

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} \\ &= \frac{\sqrt{|\Delta t|}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Rechtsseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0}} s(\Delta t) &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0}} \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0}} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Linksseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t < 0}} s(\Delta t) &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t < 0}} \frac{\sqrt{|\Delta t|}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t < 0}} -\frac{\sqrt{|\Delta t|}}{|\Delta t|} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t < 0}} -\frac{1}{\sqrt{|\Delta t|}} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Damit hat $s(\Delta t)$ keinen Grenzwert bei $\Delta t = 0$ und somit ist $f(t)$ bei $t = 0$ nicht differenzierbar.

- Faltung.

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \sqrt{|t-\tau|} d\tau.\end{aligned}$$

  - Wenn $t < 0$ ist $|t-\tau| = \tau - t$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \sqrt{|t-\tau|} d\tau &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (\tau - t)^{1/2} d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{3/2}(\tau - t)^{3/2}\right]_0^\varepsilon \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}((\varepsilon - t)^{3/2} - (-t)^{3/2}).\end{aligned}$$

  - Wenn $t > \varepsilon$ ist $|t-\tau| = t - \tau$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \sqrt{|t-\tau|} d\tau &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (t - \tau)^{1/2} d\tau \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{3/2}(t - \tau)^{3/2}\right]_0^\varepsilon \\ &= -\frac{2}{3\varepsilon}((t - \varepsilon)^{3/2} - t^{3/2}) \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}(t^{3/2} - (t-\varepsilon)^{3/2}).\end{aligned}$$

  - Wenn $0 \le t \le \varepsilon$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \sqrt{|t-\tau|} d\tau &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t \sqrt{|t-\tau|} d\tau + \int_t^\varepsilon \sqrt{|t-\tau|} d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t \sqrt{t-\tau} d\tau + \int_t^\varepsilon \sqrt{\tau - t} d\tau\right) \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}\left(-\left[(t-\tau)^{3/2}\right]_0^t + \left[(\tau - t)^{3/2}\right]_t^\varepsilon\right) \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}\left(t^{3/2} + (\varepsilon - t)^{3/2}\right)\end{aligned}$$

  Damit ist

$$(f * g_\varepsilon)(t) = \begin{cases} {}^2/_{3\varepsilon}((\varepsilon - t)^{3/2} - (-t)^{3/2}) & \text{falls } t < 0 \\ {}^2/_{3\varepsilon}(t^{3/2} - (t-\varepsilon)^{3/2}) & \text{falls } t > \varepsilon \\ {}^2/_{3\varepsilon}\left(t^{3/2} + (\varepsilon - t)^{3/2}\right) & \text{falls } 0 \le t \le \varepsilon. \end{cases}$$

- Sei $0 < \Delta t < \varepsilon$. Sekantensteigung von $(f * g_\varepsilon)(t)$ zwischen $t = 0$ und

$t = \Delta t$.

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \frac{(f * g_\varepsilon)(\Delta t) - (f * g_\varepsilon)(0)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\frac{2}{3\varepsilon}\left(\Delta t^{3/2} + (\varepsilon - \Delta t)^{3/2} - \varepsilon^{3/2}\right) \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}\left(\frac{\Delta t^{3/2}}{\Delta t} - \frac{\varepsilon^{3/2} - (\varepsilon - \Delta t)^{3/2}}{\Delta t}\right) \\ &\underset{\Delta t \to 0}{=} -\frac{2}{3\varepsilon}\left(\varepsilon^{3/2}\right)' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^{1/2} \\ &= -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Sekantensteigung von $(f * g_\varepsilon)(t)$ zwischen $t = -\Delta t$ und $t = 0$.

$$\begin{aligned} s(-\Delta t) &= \frac{(f * g_\varepsilon)(0) - (f * g_\varepsilon)(-\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\frac{2}{3\varepsilon}\left(\varepsilon^{3/2} - (\varepsilon + \Delta t)^{3/2} + \Delta t^{3/2}\right) \\ &= \frac{2}{3\varepsilon}\left(\frac{\Delta t^{3/2}}{\Delta t} - \frac{(\varepsilon + \Delta t)^{3/2} - \varepsilon^{3/2}}{\Delta t}\right) \\ &\underset{\Delta t \to 0}{=} -\frac{2}{3\varepsilon}\left(\varepsilon^{3/2}\right)' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^{1/2} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Damit existiert der links- und rechtsseitige Grenzwert der Sekantensteigung und beide sind gleich. Folglich ist $(f * g_\varepsilon)(t)$ an der Stelle $t = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 2. Auf einer Straße von A nach B steht eine Messstelle für Schadstoffe. Aufgrund einer besonders schlauen Umweltschutzverordnung müssen Dieselfahrzeuge diese Messstelle weitläufig umfahren. Die Fahrzeit für den direkten Weg von A nach B sei 10 Sekunden, die Fahrzeit über den Umweg sei 50 Sekunden. Vereinfachend wird angenommen, dass alle Autos gleich schnell fahren. Weiterhin fährt die Hälfte aller Fahrzeuge mit Diesel. Sei $f(t)$ die Stromstärke bei A und $h(t)$ die Stromstärke bei B.

- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$h(t) = (f * g)(t)$$

  für alle t.
- Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = \sin^2(\pi t) + 1.$$

  Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = c,$$

d.h. die Stromstärke bei A ist konstant.

Lösung von Aufgabe 2.

- Aus

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}f(t-10)+\frac{1}{2}f(t-50) \\ &= \frac{1}{2}(f*\delta)(t-10)+\frac{1}{2}(f*\delta)(t-50) \\ &= \frac{1}{2}(f*\delta_{10})(t)+\frac{1}{2}(f*\delta_{50})(t) \\ &= \left(f*\frac{\delta_{10}+\delta_{50}}{2}\right)(t) \end{aligned}$$

  folgt

$$g(t) = \frac{\delta_{10}+\delta_{50}}{2}.$$

- Für

$$f(t) = \sin^2(\pi t)+1$$

  ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\sin^2(\pi(t-10))+1+\sin^2(\pi(t-50))+1}{2} \\ &= \frac{\sin^2(\pi t-10\pi)+\sin^2(\pi t-50\pi)}{2}+1 \\ &= \frac{\sin^2(\pi t)+\sin^2(\pi t)}{2}+1 \\ &= \sin^2(\pi t)+1 \\ &= f(t). \end{aligned}$$

- Für $f(t)=c$ ist auch $h(t)=c$.

Aufgabe 3. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) = f(3t).$$

Entscheiden Sie ob S linear und zeitinvariant ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Schreiben Sie zunächst hin, was Sie zeigen müssen.

Lösung von Aufgabe 3. S ist linear. Zu zeigen:

$$\begin{aligned} S(f+g) &= S(f)+S(g) \\ S(uf) &= uS(f). \end{aligned}$$

Zwei Funktionen sind gleich wenn Sie die selben Funktionswerte für alle t

haben.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)](t) &= (f+g)(3t) \\
&= f(3t)+g(3t) \\
&= [S(f)](t)+[S(g)](t) \\
&= [S(f)+S(g)](t) \\
[S(uf)](t) &= (uf)(3t) \\
&= uf(3t) \\
&= u[S(f)](t) \\
&= [uS(f)](t).
\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant. Die Eigenschaft

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}$$

ist nicht erfüllt.

$$\begin{aligned}
[S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(3t) \\
&= f(3t-\hat{t}) \\
[S(f)_{\hat{t}})](t) &= [S(f)](t-\hat{t}) \\
&= f(3(t-\hat{t})) \\
&= f(3t-3\hat{t})
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei S ein System, das ein Inputsignal f in ein Outputsignal h transformiert, wobei

$$h(t) = f(t)+\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 4. Man kann die Aufgabe auf zwei Weisen lösen.

- Zeige, dass es eine Funktion g gibt so dass

  $$h = f*g.$$

  Mit

  $$\begin{aligned}
  f(t) &= (\delta*f)(t) \\
  \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)f(\tau)d\tau \\
  &= (\sigma*f)(t)
  \end{aligned}$$

  gilt aufgrund der Linearität der Faltung

  $$\begin{aligned}
  h(t) &= (\delta*f)(t)+(\sigma*f)(t) \\
  &= ((\delta+\sigma)*f)(t).
  \end{aligned}$$

  Damit ist

  $$S(f) = (\delta+\sigma)*f.$$

  Das System S lässt sich somit durch Faltung mit der Impulsantwort $g=\delta+\sigma$ beschreiben und ist daher LTI.

- Zeige die Linearität und Zeitinvarianz

$$\begin{aligned} S(f+g) &= S(f)+S(g) \\ S(uf) &= uS(f) \\ S(f_{\hat t}) &= S(f)_{\hat t}. \end{aligned}$$

Linearität.

$$\begin{aligned} [S(f+g)](t) &= (f+g)(t)+\int_{-\infty}^{t}(f+g)(\tau)d\tau \\ &= f(t)+g(t)+\int_{-\infty}^{t}(f(\tau)+g(\tau))d\tau \\ &= f(t)+\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau+g(t)+\int_{-\infty}^{t}g(\tau)d\tau \\ &= [S(f)](t)+[S(g)](t) \\ &= [S(f)+S(g)](t) \\ [S(uf)](t) &= (uf)(t)+\int_{-\infty}^{t}(uf)(\tau)d\tau \\ &= uf(t)+\int_{-\infty}^{t}uf(\tau)d\tau \\ &= u\left(f(t)+\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right) \\ &= u\,[S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t). \end{aligned}$$

Zeitinvarianz.

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat t})](t) &= f_{\hat t}(t)+\int_{-\infty}^{t}f_{\hat t}(\tau)d\tau \\ &= f(t-\hat t)+\int_{-\infty}^{t}f(\tau-\hat t)d\tau. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \tau-\hat t \\ du &= d\tau \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t-\hat t)+\int_{-\infty}^{t}f(\tau-\hat t)d\tau &= f(t-\hat t)+\int_{-\infty}^{t-\hat t}f(u)du \\ &= f(t-\hat t)+\int_{-\infty}^{t-\hat t}f(\tau)d\tau \\ &= [S(f)](t-\hat t) \\ &= [S(f)_{\hat t}](t). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) \quad = \quad \frac{s}{e^s(s-1)^2}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Umformen ergibt

$$F(s) \quad = \quad e^{-s}\frac{s}{(s-1)^2}.$$

Zunächst wird die inverse Laplace Transformierte von

$$\frac{s}{(s-1)^2}$$

berechnet. Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{s}{(s-1)^2} &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{(s-1)^2} \\
s &= c_1(s-1) + c_2 \\
c_1 &= 1 \\
c_2 &= 1 \\
\frac{s}{(s-1)^2} &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

Aus der Tabelle entnimmt man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s-1} &\quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad e^t \\
\frac{1}{s^2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad t.
\end{aligned}$$

Mit dem Dämpfungssatz

$$F(s+a) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad e^{-at}f(t)$$

folgt für $a=-1$

$$\frac{1}{(s-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad te^t.$$

Damit ist

$$\frac{s}{(s-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^t(1+t).$$

Mit dem Verschiebungssatz

$$e^{-s\hat{t}}F(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad f(t-\hat{t})$$

folgt mit $\hat{t}=1$

$$\begin{aligned}
e^{-s}\frac{s}{(s-1)^2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)e^{(}t-1)(1+t-1) \\
&\quad = \quad \sigma(t-1)te^{t-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei

$$f(t) \quad = \quad \mathrm{sign}(t)e^{-t},$$

wobei $\mathrm{sign}(t)$ das Vorzeichen von t ist Beachten Sie, dass diese Funktion einen Sprung bei $t = 0$ hat.

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $\sigma(t)f(t)$.
- Berechnen Sie $\sigma(t)f'(t)$ indem Sie $f(t)$ im Zeitbereich ableiten.
- Verifizieren Sie für dieses Beispiel, dass

$$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Lösung von Aufgabe 6. Für $t > 0$ ist

$$f(t) \quad = \quad e^{-t}.$$

Da der Funktionswert an der Stelle $t = 0$ für die Laplace Transformation keine Rolle spielt, ist für $t \neq 0$

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &= \sigma(t)e^{-t} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \; \frac{1}{s+1} \quad = \quad F(s). \end{aligned}$$

Für $t > 0$ ist

$$f'(t) \quad = \quad -e^{-t}.$$

Da f an der Stelle $t = 0$ einen Sprung von -1 auf 1 macht, ist

$$\begin{aligned} \sigma(t)f'(t) &= 2\delta(t) - e^{-t} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \; 2 - \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{2(s+1)-1}{s+1} \\ &= \frac{2s+1}{s+1}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0^-) &= \frac{s}{s+1} - (-1) \\ &= \frac{s}{s+1} + \frac{s+1}{s+1} \\ &= \frac{2s+1}{s+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die partikuläre Lösung $f(t)$ der DGL

$$f'(t-1) + f(t-1) \quad = \quad \delta(t+1),$$

für die eine Laplace Transformierte $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ existiert.

Lösung von Aufgabe 7. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ f'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) \\ f'(t-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}sF(s) \\ f(t-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}F(s). \end{aligned}$$

Damit ist die DGL im Bildbereich

$$\begin{aligned} e^{-s}sF(s) + e^{-s}F(s) &= e^{s} \\ F(s)e^{-s}(s+1) &= e^{s} \\ F(s) &= e^{2s}\frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{-t}$$

folgt mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned} e^{2s}\frac{1}{s+1} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t+2)e^{-(t+2)} \\ &= \quad \sigma(t+2)e^{-t-2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(t) = \sigma(t+2)e^{-t-2}.$$

Aufgabe 8. Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte von $tf'(t)$.

Verifizieren Sie diese allgemeine Formel am Beispiel $f(t) = \sigma(t)t$ ohne Verwendung von Korrespondenzen.

Lösung von Aufgabe 8. Mit der Ableitung im Zeitbereich gilt

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s).$$

Mit der Ableitung im Bildbereich gilt

$$\begin{aligned} tf'(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{d}{ds}sF(s) \\ &= \quad -(F(s) + sF'(s)) \\ &= \quad -F(s) - sF'(s). \end{aligned}$$

Sei $f(t) = \sigma(t)t$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2} \\ F'(s) &= -\frac{2}{s^3} \\ sF'(s) &= -\frac{2}{s^2} \\ -F(s) - sF'(s) &= -\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

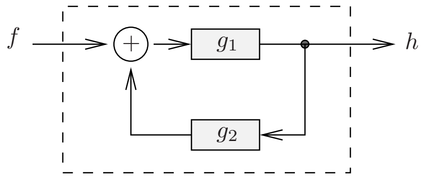
Weiterhin ist mit der Ausblendeigenschaft

$$tf'(t) \quad = \quad t(\delta(t)t + \sigma(t)) \quad = \quad \sigma(t)t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s^2}.$$

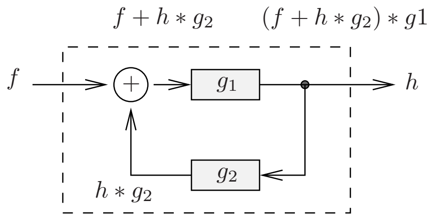
Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des folgenden Systems, d.h. die Funktion $G(s)$ so dass

$$H(s) \quad = \quad F(s)G(s).$$

Die Blöcke g_1 bzw. g_2 bedeuten hierbei jeweils die Faltung mit g_1 bzw. g_2.



Lösung von Aufgabe 9. Zunächst werden in das Diagramm Hilfsgrößen eingezeichnet:



Hieraus wird die Gleichung

$$h \quad = \quad (f + h * g_2) * g_1$$

ersichtlich. Laplace Transformation mit Faltungssatz ergibt

$$H(s) \quad = \quad (F(s) + H(s)G_2(s))G_1(s).$$

Auflösen nach $H(s)$ ergibt

$$\begin{aligned} H(s) &= F(s)G_1(s) + H(s)G_2(s)G_1(s) \\ H(s)(1 - G_2(s)G_1(s)) &= F(s)G_1(s) \\ H(s) &= \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}F(s). \end{aligned}$$

Die gesuchte Übertragungsfunktion ist somit

$$G(s) \quad = \quad \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}.$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ der Laplace Transformierten

$$F(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)^2}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösung von Aufgabe 10. Partialbruchzerlegung von $F(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{2s+1}{(s+1)^2} &= \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2}\\ 2s+1 &= c(s+1)+d\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c = 2, \quad d = -1.$$

Damit ist

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Aus

$$\begin{aligned}1 &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\\ t &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

und dem Dämpfungssatz

$$e^{-at}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a)$$

folgt

$$\begin{aligned}e^{-t} &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+1}\\ te^{-t} &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

Damit gilt

$$F(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2e^{-t} - te^{-t}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)t^2e^{-3t}.$$

Lösung von Aufgabe 11. Es gilt

$$\sigma(t)t^2 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{s^3}.$$

Mit dem Dämpfungssatz (Verschiebung im Frequenzbereich)

$$e^{-at}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a)$$

folgt

$$\sigma(t)t^2e^{-3t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{(s+3)^3}.$$

Aufgabe 12. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f(t) + f'(t) \;=\; \sigma(t-1), \qquad f(0^-) \;=\; 0$$

für $t \geq 0$. Prüfen Sie Ihr Ergebnis indem Sie die Lösungsfunktion $f(t)$ in die DGL einsetzen. Achten Sie darauf, dass Sie die Faktoren $\sigma(t)$ nicht vergessen.

Lösung von Aufgabe 12. Multipliziert man beide Seiten mit $\sigma(t)$ erhält man

$$\sigma(t)f(t) + \sigma(t)f'(t) \;=\; \sigma(t-1).$$

Sei

$$\begin{aligned} \sigma(t)f(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \\ \sigma(t)f'(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0^-) \\ &= sF(s). \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \\ \sigma(t-1) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Aus der DGL wird im Bildbereich

$$\begin{aligned} F(s)(s+1) &= \frac{e^{-s}}{s} \\ F(s) &= e^{-s}\frac{1}{s(s+1)}. \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} \\ 1 &= c_1(s+1) + c_2 s \end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$ liefert

$$c_1 = 1.$$

Spezialfall $s = -1$ liefert

$$c_2 = -1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\ &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma(t) - \sigma(t)e^{-t} \\ &= \sigma(t)(1-e^{-t}). \end{aligned}$$

Verschiebung im Zeitbereich liefert

$$e^{-s}\frac{1}{s(s+1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)(1-e^{1-t})$$

Damit ist

$$\sigma(t)f(t) \quad = \quad \sigma(t-1)(1-e^{1-t})$$

bzw.

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t-1)(1-e^{1-t}) \text{ für } t \geq 0.$$

Einsetzen in die DGL.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t-1)(1-e^{1-t}) + \sigma(t-1)(-e^{1-t})(-1) \\ &= \delta(t-1)(1-e^{0}) + \sigma(t-1)e^{1-t} \\ &= \sigma(t-1)e^{1-t}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(t) + f'(t) &= \sigma(t-1)(1-e^{1-t}) + \sigma(t-1)e^{1-t} \\ &= \sigma(t-1)(1-e^{1-t}+e^{1-t}) \\ &= \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 13. In einem System bestehe folgender Zusammenhang zwischen Eingangsfunktion $f(t)$ und Ausgangsfunktion $h(t)$:

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad h'(t) - h(t).$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) \quad = \quad \frac{H(s)}{F(s)}$$

und die Impulsantwort $g(t)$ des Systems. Sie dürfen dabei annehmen, dass f und h eine Laplace Transformierte haben.

Lösung von Aufgabe 13. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ h(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) \\ h'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sH(s). \end{aligned}$$

Aus der DGL wird somit im Bildbereich

$$F(s)(s+1) \quad = \quad H(s)(s-1).$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{H(s)}{F(s)} \\ &= \frac{s+1}{s-1}. \end{aligned}$$

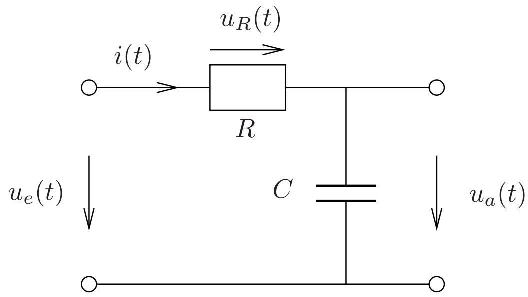
Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s-1} &= \frac{(s-1)+2}{s-1} \\ &= 1 + \frac{2}{s-1}. \end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt

$$g(t) = \delta(t) + 2\sigma(t)e^t.$$

Aufgabe 14. Gegeben sei folgender Vierpol, der aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator C besteht:



- Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, in der R, C, $u_e(t)$, $u_a(t)$ und $u_a'(t)$ auftreten.
- Berechnen Sie $U_a(s)$ in Abhängigkeit von $U_e(s)$. Zum Zeitpunkt $t = 0^-$ sei der Kondensator hierbei entladen.
- Berechnen Sie $u_a(t)$ wenn $u_e(t) = \delta(t)$ für $t \geq 0$.
- Berechnen Sie $u_a(t)$ wenn $u_e(t) = \sigma(t)$ für $t \geq 0$.

Lösung von Aufgabe 14.

- Für die Spannung am Widerstand gilt

$$u_R(t) = Ri(t).$$

Die Ladung des Kondensators ist

$$q(t) = Cu_a(t).$$

Ableiten ergibt

$$i(t) = Cu_a'(t).$$

Aus der Maschenregel folgt

$$\begin{aligned} u_e(t) &= u_R(t) + u_a(t) \\ &= RCu_a'(t) + u_a(t). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist somit

$$u_e(t) = RCu_a'(t) + u_a(t).$$

- Multipliziert man die DGL mit $\sigma(t)$, erhält man

  $$\sigma(t)u_e(t) = RC\sigma(t)u_a'(t) + \sigma(t)u_a(t).$$

  Sei

  $$\begin{aligned} \sigma(t)u_e(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_e(s) \\ \sigma(t)u_a(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_a(s). \end{aligned}$$

  Dann ist

  $$\begin{aligned} \sigma(t)u_a'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & sU_a(s) - u_a(0^-) \\ = \quad & sU_a(s) \end{aligned}$$

  da $u_a(0^-) = 0$. Laplace Transformation der DGL ergibt somit

  $$\begin{aligned} U_e(s) &= RCsU_a(s) + U_a(s) \\ &= U_a(s)(RCs + 1). \end{aligned}$$

  Damit gilt

  $$U_a(s) = \frac{1}{RCs + 1}U_e(s).$$

- Für $u_e(t) = \delta(t)$ gilt

  $$U_e(s) = 1.$$

  Damit ist

  $$\begin{aligned} U_a(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \\ &= \frac{1}{RC}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}. \end{aligned}$$

  Aus der Korrespondenz

  $$\frac{1}{s - a} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sigma(t)e^{at}$$

  folgt

  $$\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sigma(t)e^{-t/RC}$$

bzw.

$$\frac{1}{RC}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sigma(t)\frac{1}{RC}e^{-t/RC}.$$

Damit ist

$$\sigma(t)u_a(t) \quad = \quad \sigma(t)\frac{1}{RC}e^{-t/RC}$$

bzw.

$$u_a(t) \quad = \quad \frac{1}{RC}e^{-t/RC} \qquad \text{für } t \geq 0.$$

- Für $u_e(t) = \sigma(t)$ gilt

$$U_e(s) \quad = \quad \frac{1}{s}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} U_a(s) &= \frac{1}{s(RCs+1)} \\ &= \frac{1/RC}{s(s+1/RC)}. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1/RC}{s(s+1/RC)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1/RC} \\ \frac{1}{RC} &= c_1\left(s+\frac{1}{RC}\right) + c_2 s \\ &= s(c_1+c_2) + c_1\frac{1}{RC}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1.$$

Einsetzen ergibt

$$U_a(s) \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}.$$

Mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t) \\ \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{-t/RC} \end{aligned}$$

folgt

$$\sigma(t)u_a(t) \quad = \quad \sigma(t)\left(1-e^{-t/RC}\right).$$

bzw.

$$u_a(t) \quad = \quad 1-e^{-t/RC} \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Aufgabe 15. Skizzieren Sie die Funktion

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k).$$

Diese Funktion heißt Impulszug und spielt in der digitalen Signalverarbeitung eine ganz zentrale Rolle.

Sei $f(t)$ eine beliebige Funktion und

$$f_p(t) = f(t)p(t).$$

Skizzieren Sie auch die Funktion $f_p(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Ausblendeigenschaft, dass

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t-k)$$

wobei

$$f_k = f(k)$$

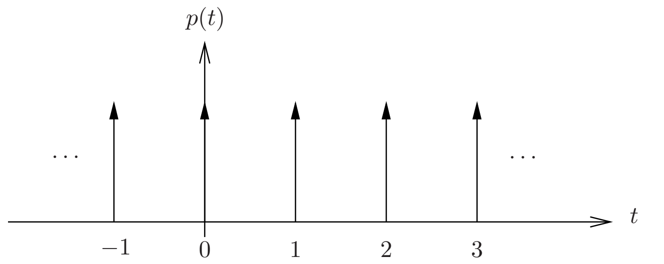
die Abtastwerte von $f(t)$ bei ganzzahligen Zeitpunkten $t = k$ sind.

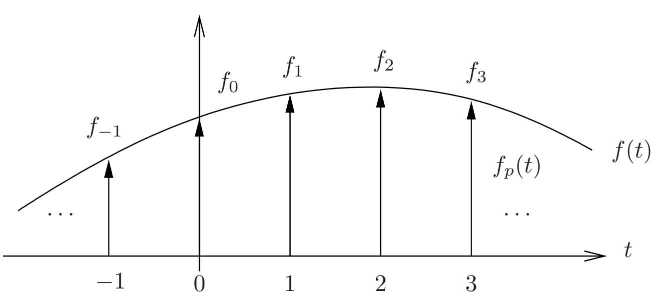
Zeigen Sie dann, dass

$$f_p(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-sk}.$$

Im wesentlichen benötigen Sie hierfür nur Linearität.

Lösung von Aufgabe 15.





$$\begin{aligned}
f_p(t) &= f(t)p(t) \\
&= f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(t-k) \qquad \text{Ausblendeigenschaft} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\delta(t-k).
\end{aligned}$$

Laplace Transformation. Aus

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

folgt mit dem Verschiebungssatz

$$\delta(t-k) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-sk}.$$

Mit Linearität folgt

$$\begin{aligned}
f_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\delta(t-k) \\
&\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-sk}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \begin{cases} 3 & \text{falls } k = 2 \\ 7 & \text{falls } k = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich, d.h. es sollen keine negativen Exponenten von z auftreten und die Brüche sollen auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\
&= 3z^{-2} + 7z^{-3} \\
&= \frac{3}{z^2} + \frac{7}{z^3} \\
&= \frac{3z+7}{z^3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Die Funktion

$$f(t) \quad = \quad \sin(t) + t^2$$

wird mit Abtastintervall $\Delta t = 0.1$ abgetastet.

- Berechnen Sie die Abtastwerte f_k.
- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$, die mit Abtastintervall $\Delta t = 0.3$ abgetastet die gleichen Abtastwerte f_k liefert.
- Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(t)$ und Konstanten $\Delta t_1, \Delta t_2 \neq 0$ die Funktion $g(t)$ mit

  $$f(k\Delta t_1) \quad = \quad g(k\Delta t_2)$$

  für alle k.

Lösung von Aufgabe 17.

- Abtastwerte.

  $$\begin{aligned} f_k &= f(0.1k) \\ &= \sin(0.1k) + (0.1k)^2 \\ &= \sin(0.1k) + 0.01k^2. \end{aligned}$$

- Durch Stauchung von $f(t)$ um Faktor

  $$\frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

  erhält man

  $$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\frac{1}{3}t\right) \\ &= \sin(t/3) + (t/3)^2 \\ &= \sin(t/3) + t^2/9. \end{aligned}$$

  Abtastung von $g(t)$ mit Abtastinterval $\Delta t = 0.3$ liefert

  $$\begin{aligned} g_k &= g(0.3k) \\ &= \sin(0.1k) + (0.3k)^2/9 \\ &= \sin(0.1k) + 0.09/9k^2 \\ &= \sin(0.1k) + 0.01k^2 \\ &= f_k. \end{aligned}$$

- Aus

  $$f(k\Delta t_1) \quad = \quad g(k\Delta t_2)$$

  folgt durch Substitution

  $$\begin{aligned} t &= k\Delta t_2 \\ k &= t/\Delta t_2 \end{aligned}$$

und Einsetzen

$$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\frac{t}{\Delta t_2}\Delta t_1\right) \\ &= f\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} t\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei $f(t)$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und $\Delta t > 0$ beliebig. Sei

$$g(t) = \int_{t-\Delta t}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Zeigen Sie, dass

$$g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s} F(s).$$

Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Weisen.

- Verwenden Sie den Rechteckimpuls

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } t < \Delta t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Stellen Sie $g(t)$ im Zeitbereich als Faltungsintegral dar und verwenden Sie den Faltungssatz.

- Verwenden Sie eine Stammfunktion von $f(t)$ um das Integral im Zeitbereich umzuformen. Um Verwechslungen mit der Laplace Transformierten zu vermeiden, ist es sinnvoll, diese Stammfunktion z.B. mit $\hat{f}$ zu bezeichnen. Verwenden Sie dann die Korrespondenzen der Laplace Transformation für Integration im Zeitbereich und den Verschiebungssatz.

Lösung von Aufgabe 18.

- Lösung mit Faltungssatz.

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } t < \Delta t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Dann ist

$$\begin{aligned} r(t-\tau) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t-\tau \geq 0 \text{ und } t-\tau < \Delta t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau \leq t \text{ und } \tau > t-\Delta t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

  Damit ist

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{t-\Delta t}^{t} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} r(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ &= (r * f)(t) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \; R(s)F(s). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} r(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \int_0^\infty r(t)e^{-st}dt \\ = \quad & \int_0^{\Delta t} e^{-st}dt \\ = \quad & -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\Delta t} \\ = \quad & -\frac{1}{s}\left(e^{-s\Delta t}-1\right) \\ = \quad & \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s} \end{aligned}$$

gilt damit

$$g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s}F(s).$$

- Lösung mit Stammfunktion. Sei $\hat{f}(t)$ eine Stammfuntion von $f(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(t) \quad = \quad & \int_{t-\Delta t}^{t} f(\tau)d\tau \\ = \quad & \hat{f}(t)-\hat{f}(t-\Delta t). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{F(s)}{s} \\ \hat{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \hat{F}(s) \\ \hat{f}(t-\Delta t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & e^{-s\Delta t}\hat{F}(s) \\ = \quad & e^{-s\Delta t}\frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} G(s) \quad = \quad & \frac{F(s)}{s} - e^{-s\Delta t}\frac{F(s)}{s} \\ = \quad & \left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s\Delta t}}{s}\right)F(s) \\ = \quad & \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s}F(s). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass die z-Transformation linear ist.

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned}
f_k + g_k \quad & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=0}^{\infty}(f_k + g_k)z^{-k} \\
& = \quad \sum_{k=0}^{\infty}(f_k z^{-k} + g_k z^{-k}) \\
& = \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}) \\
& = \quad F(z) + G(z) \\
a f_k \quad & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=0}^{\infty} a f_k z^{-k} \\
& = \quad a \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\
& = \quad aF(z)
\end{aligned}$$