Heilbronn, den 14.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 6

Aufgabe 1. Sei

$$[S(f)](t) \quad = \quad \sin(f(t+1)).$$

Zeigen Sie, dass S zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 1. Zu zeigen ist, dass

$$S(f_{\hat{t}}) \quad = \quad S(f)_{\hat{t}}$$

bzw.

$$[S(f_{\hat{t}})](t) \quad = \quad [S(f)]_{\hat{t}}(t)$$

für alle t.

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= \sin(f_{\hat{t}}(t+1)) \\ &= \sin(f(t-\hat{t}+1)) \\ &= [S(f)](t-\hat{t}) \\ &= [S(f)]_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $S(f) = h$ wobei h die Lösung eines der folgenden Anfangswertprobleme mit rechter Seite f ist.

- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(0) = 5.$$

  Zeigen Sie, dass S nicht linear ist.
- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(0) = 0.$$

  Zeigen Sie, dass S linear aber nicht zeitinvariant ist.
- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(-\infty) = 0.$$

  Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$\begin{aligned} S(f) &= h \\ S(f_1) &= h_1 \\ S(f_2) &= h_2. \end{aligned}$$

Linearität und Zeitinvarianz bedeutet

$$\begin{aligned} S(f_1+f_2) &= S(f_1)+S(f_2) \\ &= h_1+h_2 \\ S(uf) &= uS(f) \\ &= uh \\ S(f_{\hat{t}}) &= S(f)_{\hat{t}} \\ &= h_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

- Aus der Annahme $S(f)=h$ folgt

  $$h'+ah=f, \qquad h(0)=5.$$

  Wäre die Bedingung $S(uf)=uh$ erfüllt, würde gelten

  $$(uh)'+a(uh)=uf, \qquad (uh)(0)=5.$$

  Da aber $h(0)=5$ ist, ist $(uh)(0)=5u\neq 5$.
- Aus der Annahme folgt

  $$\begin{aligned} h'+ah &= f, & h(0)&=0 \\ h_1'+ah_1 &= f_1, & h_1(0)&=0 \\ h_2'+ah_2 &= f_2, & h_2(0)&=0. \end{aligned}$$

  Zu zeigen:

  $$\begin{aligned} S(f_1+f_2) &= h_1+h_2 \\ S(uf) &= uh \end{aligned}$$

  bzw.

  $$\begin{aligned} (h_1+h_2)'+a(h_1+h_2) &= f_1+f_2, & (h_1+h_2)(0)&=0 \\ (uh)'+a(uh) &= uf, & (uh)(0)&=0. \end{aligned}$$

  Dies folgt direkt aus den Ableitungsregeln. Zeitinvarianz würde heißen

  $$S(f_{\hat{t}}) = h_{\hat{t}}$$

  bzw.

  $$h_{\hat{t}}'+ah_{\hat{t}} = f_{\hat{t}}, \qquad h_{\hat{t}}(0)=0.$$

  Da $h_{\hat{t}}(0)=h(-\hat{t})$ ist, ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt.
- Die Linearität zeigt man wie im vorigen Beispiel. Zeitinvarianz bedeutet hier

  $$(h_{\hat{t}})'+ah_{\hat{t}} = f_{\hat{t}}, \qquad h_{\hat{t}}(-\infty)=0.$$

  Da $S(f)=h$ gilt

  $$h'(t)+ah(t) = f(t)$$

für alle t. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} h'(t-\hat{t}) + ah(t-\hat{t}) &= f(t-\hat{t}) \\ h(t-\hat{t})' + ah(t-\hat{t}) &= f(t-\hat{t}) \\ (h_{\hat{t}})'(t) + ah_{\hat{t}}(t) &= f(t-\hat{t}) \\ (h_{\hat{t}})' + ah_{\hat{t}} &= f_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} h_{\hat{t}}(-\infty) &= h(-\infty-\hat{t}) \\ &= h(-\infty) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei S ein System mit

$$[S(f)]\,(t) = tf(t).$$

Entscheiden Sie, ob S linear bzw. zeitinvariant ist und geben Sie jeweils eine Begründung. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie zeigen müssen.

Lösung von Aufgabe 3. Linearität. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} S(f+g) &= S(f) + S(g) \\ S(uf) &= uS(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S(f+g)]\,(t) &= t(f+g)(t) \\ &= t(f(t)+g(t)) \\ &= tf(t) + tg(t) \\ &= [S(f)]\,(t) + [S(g)]\,(t) \\ &= [S(f)+S(g)]\,(t) \\ [S(uf)]\,(t) &= t(uf)(t) \\ &= tuf(t) \\ &= utf(t) \\ &= u\,[S(f)]\,(t) \\ &= [uS(f)]\,(t) \end{aligned}$$

Zeitinvarianz. Zu zeigen ist

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}.$$

Dies ist hier nicht der Fall:

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})]\,(t) &= tf_{\hat{t}}(t) \\ &= tf(t-\hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}\,(t) &= [S(f)]\,(t-\hat{t}) \\ &= (t-\hat{t})f(t-\hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Die Stromstärke am Ein- bzw. Ausgang eines Wasserrohrs sei $f(t)$ bzw. $h(t)$. Das Rohr ist ein lineares, zeitinvariants System, d.h.

$$h(t) \quad = \quad (f * g)(t)$$

wobei $g(t)$ die Impulsantwort ist. Angenommen, das Rohr ist verlustfrei, d.h. das gesamte Wasser, das in das Rohr hineinfließt, kommt auch am anderen Ende irgendwann wieder heraus. Welche Eigenschaft folgt daraus für die Impulsantwort?

Lösung von Aufgabe 4. Die ins Rohr geflossene Wassermenge ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$$

Da kein Wasser verloren geht, muss dies gleich der Wassermenge am Ausgang sein, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)dt.$$

Für den Spezialfall $f(t) = \delta(t)$ gilt damit

$$1 \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.$$

Die Fläche unter der Impulsantwort muss folglich 1 sein.

Aufgabe 5. Sei $g(t)$ eine beliebige Funktion und

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT).$$

Damit setzt sich $f(t)$ aus unendlich vielen Kopien von $g(t)$ zusammen, die jeweils um T nach rechts verschoben sind.

Zeigen Sie zunächst, dass für alle t gilt

$$f(t) - f(t - T) = g(t).$$

Führen Sie dann auf beiden Seiten dieser Gleichung die Laplace Transformation durch und leiten Sie dadurch eine Formel her, wie man die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ berechnen kann in Abhängikeit der Laplace Transformierten $G(s)$ von $g(t)$.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
f(t) - f(t - T) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT) - \sum_{n=0}^{\infty} g(t - T - nT) \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT) - \sum_{n=0}^{\infty} g(t - (n + 1)T) \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT) - \sum_{n=1}^{\infty} g(t - nT) \\
&= \quad g(t).
\end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$f(t-T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-sT}F(s).$$

Aus der Gleichung

$$f(t) - f(t-T) = g(t)$$

wird nach der Laplace Transformation auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} F(s) - e^{-sT}F(s) &= G(s) \\ F(s)(1-e^{-sT}) &= G(s) \\ F(s) &= \frac{G(s)}{1-e^{-sT}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. In einem System mit Eingangsfunktion f und Ausgangsfunktion h bestehe folgender Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau + h'(t) = \int_{-\infty}^{t-1} f(\tau)d\tau$$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Impulsantwort $g(t)$ dieses Systems.
- Prüfen Sie Ihr Ergebnis nach, indem Sie die Gleichung verifzieren für $f(t) = \delta(t)$ und $h(t) = g(t)$.

Sie dürfen davon ausgehen, dass f und h eine Laplace Transformierte hat.

Lösung von Aufgabe 6. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ h(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sH(s) \\ \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}H(s) \\ \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s) \\ \int_{-\infty}^{t-1} f(\tau)d\tau &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{e^{-s}}{s}F(s). \end{aligned}$$

Im Bildbereich erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}H(s) + sH(s) &= \frac{e^{-s}}{s}F(s) \\ H(s) + s^2H(s) &= e^{-s}F(s) \\ H(s) &= e^{-s}\frac{1}{1+s^2}F(s) \end{aligned}$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) \quad = \quad e^{-s}\frac{1}{1+s^2}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\frac{1}{1+s^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)\sin(t)$$

und mit dem Verschiebungssatz erhält man die Impulsantwort

$$g(t) \quad = \quad \sigma(t-1)\sin(t-1).$$

Sei $f(t) = \delta(t)$ und $h(t) = g(t)$. Dann ist die rechte Seite der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{t-1} f(\tau) \quad = \quad \sigma(t-1)$$

und die linke Seite

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau + h'(t) \\
&= \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau-1)\sin(\tau-1)d\tau + \delta(t-1)\sin(t-1) + \sigma(t-1)\cos(t-1) \\
&= \sigma(t-1)\int_{1}^{t} \sin(\tau-1)d\tau + \sigma(t-1)\cos(t-1) \\
&= \sigma(t-1)\Big([-\cos(\tau-1)]_1^t + \cos(t-1)\Big) \\
&= \sigma(t-1)(-\cos(t-1) + 1 + \cos(t-1)) \\
&= \sigma(t-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Für Funktionen $f(t)$, die an der Stelle $t = 0$ einen Sprung haben, gilt für die Ableitung im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
\sigma(t)f(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\
\sigma(t)f'(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$

wobei $f(0^-)$ der linksseitige Grenzwert von $f(t)$ bei $t = 0$ ist, d.h.

$$f(0^-) \quad = \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(-\varepsilon).$$

Lesen Sie die Begründung im Skript nach! Berechnnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad \delta(t), \quad f(0^-) = 5$$

mit Hilfe der Laplace Transformation für $t \geq 0$. Überlegen Sie sich, wie eine Lösungsfunktion der DGL auf ganz $\mathbb{R}$ aussehen muss. Setzen Sie Ihre Lösungsfunktion in die DGL ein und verifzieren Sie das Ergebnis.

Lösung von Aufgabe 7. Multiplikation der DGL mit $\sigma(t)$ auf beiden Seiten ergibt

$$\sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) \quad = \quad \delta(t).$$

Sei

$$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Durch Laplace Transformation wird aus der DGL

$$\begin{aligned} sF(s) - 5 + F(s) &= 1 \\ F(s)(s+1) &= 6 \\ F(s) &= \frac{6}{s+1}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{s-a} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{at}$$

gilt im Spezialfall $a = -1$

$$\frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)e^{-t}.$$

Mit der Linearität gilt

$$\frac{6}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 6\sigma(t)e^{-t}$$

Damit ist

$$\sigma(t)f(t) \quad = \quad 6\sigma(t)e^{-t}.$$

Da $f(0^-) = 5$ und $f(0) = 6$, hat die Funktion an der Stelle $t = 0$ einen Sprung von 5 auf 6, was zu einem Impuls bei $f'(t)$ bei $t = 0$ führt. Die Lösungsfunktion, die für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist somit

$$f(t) \quad = \quad (5 + \sigma(t))e^{-t}.$$

Verifikation.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t)e^{-t} - (5 + \sigma(t))e^{-t} \\ &= \delta(t) - (5 + \sigma(t))e^{-t} \\ f'(t) + f(t) &= \delta(t) - (5 + \sigma(t))e^{-t} + (5 + \sigma(t))e^{-t} \\ &= \delta(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 8. In dieser Aufgabe wird der Zusammenhang zwischen analoger und diskreter Faltung hergestellt. Durch Multiplikation von f und g mit der Kammfunktion erhält man die Impulszüge von Abtastwerten

$$\begin{aligned} f_p(t) &= f(t)p(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \delta(t - \ell) \\ g_p(t) &= g(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t - k) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Faltung dieser Impulszüge wieder ein Impulszug ergibt, dessen Impulse durch diskrete Faltung der Abstastwerte von f und g berechnet werden können, d.h.

$$(f_p * g_p)(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-k)$$

wobei

$$h_k \quad = \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell}$$

die diskrete Faltung der Abtastwerte von f und g ist.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
f_p, g_p \arrow[r, "\text{analoge Faltung}"] \arrow[d, swap, "\begin{array}{c}\text{Stärke des}\\ k\text{-ten Impulses}\end{array}"] & f_p * g_p \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{Stärke des}\\ k\text{-ten Impulses}\end{array}"] \\
f_k, g_k \arrow[r, swap, "\text{diskrete Faltung}"] & (f * g)_k
\end{tikzcd}$$

Hinweis: Sie müssen im Beweis die Linearität der Faltung nutzen. Weiterhin bewirkt die Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls eine Verschiebung. Konkret gilt

$$\delta(t-\ell) * \delta(t-k) \quad = \quad \delta(t-k-\ell).$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$(f_p * g_p)(t) \quad = \quad \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \delta(t-\ell) \right) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t-k) \right).$$

Linearität der Faltung ergibt

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \delta(t-\ell) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t-k) \right).$$

Nochmalige Anwendung der Linearität ergibt

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_\ell \delta(t-\ell)) * (g_k \delta(t-k)).$$

Da f_ℓ und g_k konstante Faktoren in der Faltung sind, erhält man

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\ell g_k (\delta(t-\ell) * \delta(t-k)).$$

Die Faltung der beiden verschobenen Dirac Impulse lässt sich vereinfachen:

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\ell g_k \delta(t-k-\ell) \quad = \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\ell g_k \delta(t-(k+\ell)).$$

Substitution in der inneren Summe.

$$u = k + \ell, \quad k = u - \ell.$$

Damit erhält man

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{u=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{u-\ell} \delta(t-u)$$

Substitution $u = k$ ergibt

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell} \delta(t-k).$$

Vertauschung der Reihenfolge der Summen ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell} \delta(t-k) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell} \right) \delta(t-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-k). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} = 0.$$

Gehen Sie von

$$S = e^{2\pi j0/n} + e^{2\pi j1/n} + \ldots + e^{2\pi j(n-1)/n}$$

aus, multiplizieren Sie beide Seiten mit $e^{2\pi j/n}$, subtrahieren Sie die Gleichungen und lösen Sie nach S auf.

Lösung von Aufgabe 9. Multipliziert man beide Seiten mit $e^{2\pi j/n}$ erhält man

$$\begin{aligned} S &= e^{2\pi j0/n} + e^{2\pi j1/n} + e^{2\pi j2/n} + \ldots + e^{2\pi j(n-1)/n} \\ e^{2\pi j/n} S &= \phantom{e^{2\pi j0/n} + {}} e^{2\pi j1/n} + e^{2\pi j2/n} + \ldots + e^{2\pi j(n-1)/n} + e^{2\pi jn/n}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} S - e^{2\pi j/n} S &= e^{2\pi j0/n} - e^{2\pi jn/n} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ S(1 - e^{2\pi j/n}) &= 0. \end{aligned}$$

Aus $n > 1$ folgt $e^{2\pi j/n} \neq 1$ und folglich $S = 0$.

Aufgabe 10. Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ die z-Transformierte von

$$f_k = \sigma_k a^{2k+1}.$$

Lösung von Aufgabe 10. Ausgehend von der bekannten Korrespondenz

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

folgt mit dem Dämpfungssatz

$$\begin{aligned}\sigma_k a^{2k} &= \sigma_k a^k\, a^k \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z/a}{z/a-a} \\ &= \frac{z}{z-a^2}.\end{aligned}$$

Mit der Linearität gilt

$$\begin{aligned}\sigma_k a^{2k+1} &= a\,\sigma_k a^{2k} \\ &= \frac{az}{z-a^2}.\end{aligned}$$

Man hätte die Aufgabe auch ohne Dämpfungssatz lösen können:

$$\begin{aligned}\sigma_k a^{2k+1} &= a\,\sigma_k (a^2)^k \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\frac{z}{z-a^2} \\ &= \frac{az}{z-a^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k.$$

Sie dürfen die Existenz der Summe voraussetzen. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$S - aS = \sum_{k=1}^{\infty} a^k.$$

Lösung von Aufgabe 11. Aus

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k$$

folgt

$$\begin{aligned}aS &= a\sum_{k=0}^{\infty} k a^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k a^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) a^k.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} S - aS &= \sum_{k=0}^{\infty} k a^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) a^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-(k-1)) a^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a^k. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$S = \frac{1}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} a^k.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{\infty} a^k \\ aT &= \sum_{k=2}^{\infty} a^k \\ T(1-a) &= a \\ T &= \frac{a}{1-a}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-a} \frac{a}{1-a} \\ &= \frac{a}{(1-a)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \langle 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots \rangle,$$

d.h.

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_2 = f_3 = 0, \quad f_{k+4} = f_k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\ &= z^{-0} + z^{-1} \\ &+ z^{-4} + z^{-5} \\ &+ z^{-8} + z^{-9} \\ &+ \ldots \\ &= (1 + z^{-1}) \underbrace{(1 + z^{-4} + z^{-8} + \ldots)}_{S}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} S &= 1 + z^{-4} + z^{-8} + \dots \\ z^{-4}S &= \phantom{1 + {}} z^{-4} + z^{-8} + \dots \\ S(1 - z^{-4}) &= 1 \\ S &= \frac{1}{1 - z^{-4}} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-4}} \\ &= \frac{z^4 + z^3}{z^4 - 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Die Folge f_k sei definiert durch

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 3 \\ f_{k+2} &= f_{k+1} - f_k \qquad \text{für } k \geq 0 \end{aligned}$$

und $f_k = 0$ für $k < 0$.

- Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k anhand der gegebenen Rekursionsgleichung mit Hilfe des Verschiebungssatzes.
- Berechnet man die ersten Werte für f_k stellt man fest, dass es sich um eine periodische Folge handelt. Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k mit Hilfe der Formel für periodische Formeln.
- Die beiden Ergebnisse sehen zunächst unterschiedlich aus. Wie kann man verifizieren, dass beide Ergebnisse gleich sind? Sie müssen das nicht "von Hand" machen sondern können auch einen Rechner verwenden.

Lösung von Aufgabe 13. Aus der Rekursionsgleichung folgt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k f_{k+1} - \sigma_k f_k \qquad \text{für alle } k.$$

Sei

$$\sigma_k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma_k f_{k+1} &= z(F(z) - f_0) &&= zF(z) - z \\ \sigma_k f_{k+2} &= z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) &&= z^2 F(z) - z^2 - 3z. \end{aligned}$$

Im Bildbereich gilt damit

$$\begin{aligned} z^2 F(z) - z^2 - 3z &= zF(z) - z - F(z) \\ F(z)(z^2 - z + 1) &= z^2 + 2z \\ F(z) &= \frac{z^2 + 2z}{z^2 - z + 1}. \end{aligned}$$

Berechnet man die ersten Abtastwerte von f_k erhält man die periodische Folge

$$f_k = \langle 1, 3, 2, -1, -3, -2, \; 1, 3, 2, \ldots \rangle$$

mit z-Tansformierter

$$F(z) = \frac{z^6 + 3z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 - 2z}{z^6 - 1}.$$

Um die Ergebnisse zu verifizieren, muss man zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{z^6 + 3z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 - 2z}{z^6 - 1} &= \frac{z^2 + 2z}{z^2 - z + 1} \\ \frac{z^5 + 3z^4 + 2z^3 - z^2 - 3z^1 - 2}{z^6 - 1} &= \frac{z + 2}{z^2 - z + 1} \end{aligned}$$

bzw.

$$(z^5 + 3z^4 + 2z^3 - z^2 - 3z^1 - 2)(z^2 - z + 1) = (z + 2)(z^6 - 1)$$

Die naheliegende Möglichkeit ist, die Polynome auszumultiplizieren und die Koeffizienten zu vergleichen. Da es sich um Polynome vom Grad 7 handelt, könnte man aber auch Funktionswerte auf beiden Seiten vergleichen. Stimmen zwei Polynome vom Grad 7 an 8 verschiedenen Stellen überein, müssen sie gleich sein.

Beim Polynom auf der rechten Seite erkennt man reelle Nullstellen bei $z = -2, 1, -1$. Spaltet man diese mit Polynomdivision ab, erhält man

$$(z + 2)(z^6 - 1) = (z + 2)(z - 1)(z + 1)(z^4 + z^2 + 1).$$

Da die linke Seite die selben Nullstellen haben muss, kann man auch hier mit Polynomdivision abspalten und erhält

$$\begin{aligned} &(z^5 + 3z^4 + 2z^3 - z^2 - 3z^1 - 2)(z^2 - z + 1) \\ &= (z + 2)(z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1). \end{aligned}$$

Kürzt man die Linearfaktoren auf beiden Seiten, bleibt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) &= z^4 + z^2 + 1 \\ (z^2 + 1 + z)(z^2 + 1 - z) &= z^4 + z^2 + 1 \\ (z^2 + 1)^2 - z^2 &= z^4 + z^2 + 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die dritte Binomische Formel angewandt. Nun muss man die linke Seite nur noch mit der ersten Binomischen Formel ausmultiplizieren.

Aufgabe 14. Sei f_k eine n-periodische Folge, d.h.

$$f_{k+n} = f_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes dass dann

$$F(z) = \frac{z^n}{z^n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}.$$

Lösung von Aufgabe 14. Multipliziert man beide Seiten mit σ_k, erhält man

$$\sigma_k f_{k+n} = \sigma_k f_k \quad \text{für alle } k.$$

Sei

$$\sigma_k f_k \circ\!\!-\!\!\bullet F(z).$$

Dann gilt mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned} \sigma_k f_{k+n} &\circ\!\!-\!\!\bullet z^n\left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}\right) \\ &= z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \end{aligned}$$

Im Bildbereich gilt damit

$$\begin{aligned} z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} &= F(z) \\ F(z)(z^n - 1) &= z^n \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \\ F(z) &= \frac{z^n}{z^n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folgen

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k k 2^k \\ g_k &= \sigma_{k-2} k 2^k. \end{aligned}$$

Bringen Sie die Ergebnisse auf einen Bruch ohne negative Exponenten.

Lösung von Aufgabe 15. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma_k 2^k \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k k 2^k \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet -z\left(\frac{z}{z-2}\right)' \\ &= -z\left(\frac{(z-2) - z}{(z-2)^2}\right) \\ &= -z(-2)(z-2)^2 \\ &= \frac{2z}{(z-2)^2}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
g_k &= f_k - f(0)\delta_k - f(1)\delta_{k-1} \\
&= f_k - 2\delta_{k-1} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2z}{(z-2)^2} - 2z^{-1} \\
&= \frac{2z}{(z-2)^2} - \frac{2}{z} \\
&= \frac{2z^2 - 2(z-2)^2}{z(z-2)^2} \\
&= \frac{2z^2 - 2z^2 + 8z - 8}{z(z-2)^2} \\
&= 8\frac{z-1}{z(z-2)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = k\sigma_{k-1}\cos(2k-1).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so dass die Zahl j nicht darin auftritt.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned}
\cos(2k-1) &= \mathrm{re}(e^{j(2k-1)}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{j(2k-1)} + e^{-j(2k-1)}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{2jk}e^{-j} + e^{-2jk}e^{j})
\end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung entimmt man

$$\begin{aligned}
\sigma_k e^{ak} &= \sigma_k (e^a)^k \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^a}
\end{aligned}$$

und damit

$$\sigma_k \cos(2k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{2j}}e^{-j} + \frac{z}{z-e^{-2j}}e^{j}\right)$$

Mit der Korrespondenz

$$kf_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z)$$

folgt

$$
\begin{aligned}
&k\sigma_k \cos(2k-1) \\
&\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{z}{2}\left(\frac{(z-e^{2j})-z}{(z-e^{2j})^2}e^{-j} + \frac{(z-e^{-2j})-z}{(z-e^{-2j})^2}e^{j}\right) \\
&\quad = \quad -\frac{z}{2}\left(\frac{-e^{2j}e^{-j}}{(z-e^{2j})^2} + \frac{-e^{-2j}e^{j}}{(z-e^{-2j})^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z}{2}\left(\frac{e^{j}}{(z-e^{2j})^2} + \frac{e^{-j}}{(z-e^{-2j})^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z}{2}\left(\frac{e^{j}(z-e^{-2j})^2 + e^{-j}(z-e^{2j})^2}{((z-e^{2j})(z-e^{-2j}))^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z}{2}\left(\frac{e^{j}(z^2-2ze^{-2j}+e^{-4j}) + e^{-j}(z^2-2ze^{2j}+e^{4j}}{(z^2+1-z(e^{-2j}+e^{2j}))^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z}{2}\left(\frac{z^2(e^{j}+e^{-j}) - 2z(e^{-j}+e^{j}) + e^{-3j}+e^{3j}}{(z^2+1-z(\cos(-2)+j\sin(-2)+\cos(2)+j\sin(2))^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z}{2}\left(\frac{z^2 2\cos(1) - 2z2\cos(1) + 2\cos(3)}{(z^2+1-2z\cos(2))^2}\right) \\
&\quad = \quad \frac{z^3\cos(1) - 2z^2\cos(1) + z\cos(3)}{(z^2+1-2z\cos(2))^2}
\end{aligned}
$$

Da

$$k\sigma_{k-1} \quad = \quad k\sigma_k$$

für alle k, folgt

$$k\sigma_{k-1}\cos(2k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z^3\cos(1) - 2z^2\cos(1) + z\cos(3)}{(z^2+1-2z\cos(2))^2}.$$

Aufgabe 17. Sei S ein System, das eine Folge f wie folgt transformiert:

$$[S(f)]_k \quad = \quad \begin{cases} f_2 & \text{für } k=0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases}$$

bzw.

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots\rangle) \quad = \quad \langle f_2, f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots\rangle.$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S.
- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 17. Die Impulsantwort ist

$$S(\delta) \quad = \quad \langle 0, 0, 0, 0, \ldots\rangle$$

S ist linear, da für alle k gilt

$$\begin{aligned}
[S(f+g)]_k &= \begin{cases} (f+g)_2 & \text{für } k=0 \\ (f+g)_k & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_2+g_2 & \text{für } k=0 \\ f_k+g_k & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_2 & \text{für } k=0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases} + \begin{cases} g_2 & \text{für } k=0 \\ g_k & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= [S(f)]_k + [S(g)]_k \\
[S(af)]_k &= \begin{cases} (af)_2 & \text{für } k=0 \\ (af)_k & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a(f_2) & \text{für } k=0 \\ a(f_k) & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= a \begin{cases} f_2 & \text{für } k=0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= a\,[S(f)]_k\,.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
S(f+g) &= S(f)+S(g) \\
S(af) &= aS(f).
\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant.

- Wenn man f textuell durch durch $f_{.-\hat{k}}$ in

  $$[S(f)]_k = \begin{cases} f_2 & \text{für } k=0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases}$$

  ersetzt, erhält man

  $$\begin{aligned}
  \left[S(f(.-\hat{k})\right]_k &= \begin{cases} (f_{.-\hat{k}})_2 & \text{für } k=0 \\ (f_{.-\hat{k}})_k & \text{sonst} \end{cases} \\
  &= \begin{cases} f_{2-\hat{k}} & \text{für } k=0 \\ f_{k-\hat{k}} & \text{sonst} \end{cases}
  \end{aligned}$$

- Wenn man k textuell durch $k-\hat{k}$ in

  $$[S(f)]_k = \begin{cases} f_2 & \text{für } k=0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases}$$

  ersetzt, erhält man

  $$\begin{aligned}
  [S(f)]_{k-\hat{k}} &= \begin{cases} f_2 & \text{für } k-\hat{k}=0 \\ f_{k-\hat{k}} & \text{sonst.} \end{cases} \\
  &= \begin{cases} f_2 & \text{für } k=\hat{k} \\ f_{k-\hat{k}} & \text{sonst.} \end{cases}
  \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left[S(f_{.-\hat{k}})\right]_k \neq S(f)_{k-\hat{k}}$$

für $k = 0$ und $k = \hat{k}$. Folglich ist

$$S(f_{.-\hat{k}}) \neq S(f)_{.-\hat{k}}.$$

Es macht also einen Unterschied, ob man zuerst die Folge f verschiebt und dann durch das System abbildet oder zuerst f durch das System abbildet und danach verschiebt.

Aufgabe 18. Sei S ein System, das eine Folge f transformiert durch

$$[S(f)]_k \quad = \quad kf_k,$$

d.h.

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \ldots\rangle) \quad = \quad \langle 0, f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots\rangle)$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S.
- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 18. Die Impulsantwort ist

$$S(\delta) \quad = \quad \langle 0, 0, 0, \ldots\rangle.$$

S ist linear, da

$$\begin{aligned}
S(f+g)_k &= k(f_k + g_k) \\
&= kf_k + kg_k \\
&= S(f)_k + S(g)_k \\
&= (S(f) + S(g))_k \\
S(af)_k &= kaf_k \\
&= akf_k \\
&= aS(f)_k \\
&= (aS(f))_k
\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant. Ersetzt man f durch die um $\hat{k}$ verschobene Folge $f_{.-\hat{k}}$ in

$$[S(f)]_k \quad = \quad kf_k$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\left[S(f_{.-\hat{k}}\right]_k &= k(f_{.-\hat{k}})_k \\
&= kf_{k-\hat{k}}.
\end{aligned}$$

Dies ist das Ergebnis wenn man f zuerst verschiebt und dann durch S abbildet.

Andererseits ist

$$[S(f)]_{k-\hat{k}} \quad = \quad (k-\hat{k}) f_{k-\hat{k}}.$$

Dies ist das Ergebnis wenn man zuerst f durch S abbildet und dann verschiebt.

Damit ist

$$\left[S(f_{.-\hat{k}}\right]_k \quad \neq \quad [S(f)]_{k-\hat{k}}$$

bzw.

$$S(f_{.-\hat{k}}) \neq S(f)_{.-\hat{k}}.$$