Heilbronn, den 21.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 7

Aufgabe 1. Seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ linear abhängig, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und

$$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$$

leer oder unendlich ist.

Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Theoreme verwenden.

Lösung von Aufgabe 1. Zu zeigen:

$$\mathbb{L} = \emptyset \text{ oder } \mathbb{L} \text{ ist unendlich.}$$

Dies ist äquivalent zu der Aussage

$$\mathbb{L} \neq \emptyset \to \ \mathbb{L} \text{ ist unendlich.}$$

Annahme: $\mathbb{L} \neq \emptyset$.
Zu zeigen: $\mathbb{L}$ ist unendlich.

Da $\mathbb{L} \neq \emptyset$ existiert ein $\hat{\vec{x}}$ so dass

$$A\hat{\vec{x}} = \vec{b}.$$

Da $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhänig ist, gibt es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors als Linearkombination dieser Vektoren bzw. ein $\vec{x}_0 \neq 0$ so dass

$$A\vec{x}_0 = \vec{0}.$$

Damit ist jeder Vektor $\hat{\vec{x}} + c\vec{x}_0$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig eine Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$A(\hat{\vec{x}} + c\vec{x}_0) = A\hat{\vec{x}} + cA\vec{x}_0 = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}.$$

Folglich hat die Menge $\mathbb{L}$ unendlich viele Elemente.

Aufgabe 2. Das LTI System S mit

$$S(f) = f'$$

ordnet jeder auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion ihre Ableitung zu. Ist S injektiv?

Lösung von Aufgabe 2. S ist nicht injektiv. Sei z.B.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^2 \\ f_2(t) &= t^2 + 1 \end{aligned}$$

Dann ist $f_1 \neq f_2$ aber $S(f_1) = S(f_2)$.

Aufgabe 3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{-t}, \quad f(0^-) = 1, \quad f'(0^-) = 0$$

für $t \geq 0$ durch Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 3. Mit

$$\begin{aligned} f''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) = s^2F(s) - s \\ f'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0^-) = sF(s) - 1 \\ f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \\ e^{-t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

ist die DGL im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} s^2F(s) - s - 3(sF(s) - 1) + 2F(s) &= \frac{1}{s+1} \\ F(s)(s^2 - 3s + 2) &= \frac{1}{s+1} + s - 3 \\ F(s) &= \frac{s^2 - 2s - 2}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $s^2 - 3s + 2$ sind $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$. Damit lässt sich der Nenner faktorisieren und es gilt

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s - 2}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{s^2 - 2s - 2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-1} + \frac{c_3}{s-2}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{s^2 - 2s - 2}{(s-1)(s-2)} \quad \text{für } s = -1 \\ &= 1/6 \\ c_2 &= \frac{s^2 - 2s - 2}{(s+1)(s-2)} \quad \text{für } s = 1 \\ &= 3/2 \\ c_3 &= \frac{s^2 - 2s - 2}{(s+1)(s-1)} \quad \text{für } s = 2 \\ &= -2/3. \end{aligned}$$

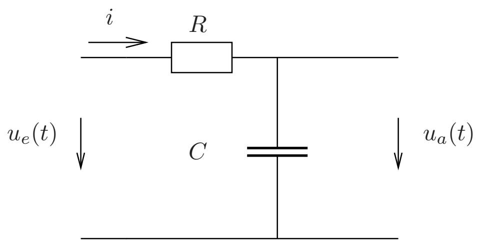
Damit ist

$$F(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}.$$

Rücktransformation ergibt

$$f(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{t} - \frac{2}{3}e^{2t}.$$

Aufgabe 4. Gegeben sei folgende Schaltung.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Eingangsspannung $u_e(t)$ angelegt. Der Kondensator ist zu diesem Zeitpunkt entladen. Leiten Sie eine Formel für $u_a(t)$ in Abhängigkeit von $u_e(t)$ her unter Verwendung der Laplace Transformation. Sei nun

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie $u_a(t)$. Für den eingeschwungenen Zustand, d.h.

$$u_e(t) = \cos(t) \text{ für alle } t$$

ließe sich $u_a(t)$ einfach mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmen. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse für große Werte von t wenn sich das System eingeschwungen hat.

Lösung von Aufgabe 4. Für die Ladung des Kondensators gilt

$$q(t) = Cu_a(t).$$

Durch Ableiten erhält man die Stromstärke

$$i(t) = Cu_a'(t).$$

Die Spannung am Widerstand ist

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ &= RCu_a'(t). \end{aligned}$$

Aus der Maschenregel erhält man

$$\begin{aligned} u_e(t) &= u_R(t) + u_a(t) \\ &= RCu_a'(t) + u_a(t). \end{aligned}$$

Laplace Transformation ergibt

$$U_e(s) \quad = \quad RC(sU_a(s) - u_a(0)) + U_a(s).$$

Da der Kondensator zum Startzeitpunkt entladen ist, gilt

$$\begin{aligned} U_e(s) &= RCsU_a(s) + U_a(s) \\ &= U_a(s)(RCs + 1). \end{aligned}$$

Auflösen nach $U_a(s)$ ergibt

$$U_a(s) \quad = \quad U_e(s) \underbrace{\frac{1}{RCs+1}}_{H(s)}.$$

Rücktransformation der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{RCs+1} \\ &= \frac{1}{RC}\,\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \\ \frac{1}{s} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t) \\ \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{-t/(RC)}\sigma(t) \\ \frac{1}{RC}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\sigma(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Impulsantwort

$$h(t) \quad = \quad \frac{1}{RC}\,e^{-t/(RC)}\sigma(t).$$

Rücktransformation von $U_a(t)$ mit dem Faltungssatz

$$\begin{aligned} U_a(s) &= U_e(s)H(s) \\ u_a(t) &= u_e(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau)h(t-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau)\frac{1}{RC}\,e^{-(t-\tau)/(RC)}\sigma(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\int_0^t u_e(\tau)e^{\tau/(RC)}d\tau. \end{aligned}$$

Mit

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned}
u_a(t) &= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\int_0^t \cos(\tau)e^{\tau/(RC)}d\tau \\
&= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\int_0^t \mathrm{re}(e^{j\tau})e^{\tau/(RC)}d\tau \\
&= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\mathrm{re}\left(\int_0^t e^{j\tau}e^{\tau/(RC)}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\mathrm{re}\left(\int_0^t e^{\tau(1/(RC)+j)}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\mathrm{re}\left(\frac{1}{\frac{1}{RC}+j}\left[e^{\tau(1/(RC)+j)}\right]_0^t\right) \\
&= e^{-t/(RC)}\mathrm{re}\left(\frac{1}{1+jRC}\left(e^{t/(RC)+jt)}-1\right)\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1}{1+jRC}\left(e^{jt}-e^{-t/(RC)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+R^2C^2}\mathrm{re}\left((1-jRC)\left(\cos(t)+j\sin(t)-e^{-t/(RC)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+R^2C^2}\left(\cos(t)-e^{-t/(RC)}+RC\sin(t)\right)
\end{aligned}$$

Für große Werte von t gilt

$$e^{-t/(RC)} \to 0$$

und damit erhält man im eingeschwungenen Zustand

$$u_a(t) \to \frac{\cos(t)+RC\sin(t)}{1+R^2C^2}.$$

Mit

$$u_e(t) = \cos(t) \text{ für alle } t$$

kann man komplexe Wechselstromrechnung anwenden. Demnach erhält man folgende komplexe Zeiger für Spannungen und Ströme

$$\begin{aligned}
u_e(t) &= e^{jt} \\
i(t) &= \frac{u_e(t)}{R + \frac{1}{jC}} \\
u_a(t) &= i(t)\frac{1}{jC} \\
&= \frac{u_e(t)}{R + \frac{1}{jC}}\,\frac{1}{jC} \\
&= \frac{u_e(t)}{1 + jRC} \\
&= \frac{u_e(t)(1 - jRC)}{1 + R^2C^2} \\
&= \frac{e^{jt}(1 - jRC)}{1 + R^2C^2} \\
&= \frac{(\cos(t) + j\sin(t))(1 - jRC)}{1 + R^2C^2}.
\end{aligned}$$

Der Realteil hiervon ist

$$u_a(t) = \frac{\cos(t) + RC\sin(t)}{1 + R^2C^2}$$

und ist damit identisch mit dem o.g. Ergebnis.

Aufgabe 5. Seien

$$\begin{aligned}
f_k &= \langle 1, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots \rangle \\
g_k &= \langle 5, 3, 1, 4, 0, 0, 0, \ldots \rangle
\end{aligned}$$

zwei endliche Folgen, d.h. Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich Null.

- Berechen Sie die Folge $h_k = (f * g)_k$ durch Faltung.
- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$, $G(z)$ und $H(z)$ von f_k, g_k und h_k.
- Multiplizieren Sie $F(z)$ und $G(z)$ indem Sie die Klammern auflösen und Summanden mit gleichem z-Faktor zusammenfassen. Das Ergebnis muss gleich sein wie die in der vorigen Teilaufgabe berechnete Funktion $H(z)$.

Lösung von Aufgabe 5. Durch Faltung erhält man

$$h_k = \langle 5, 13, 22, 15, 11, 12, 0, 0, 0, \ldots \rangle$$

Die z-Transformierten sind

$$\begin{aligned}
F(z) &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \\
G(z) &= 5 + 3z^{-1} + z^{-2} + 4z^{-3} \\
H(z) &= 5 + 13z^{-1} + 22z^{-2} + 15z^{-3} + 11z^{-4} + 12z^{-5}
\end{aligned}$$

Multiplikation der z-Transformierten ergibt

$$\begin{aligned}
F(z)G(z) &= \left(1+2z^{-1}+3z^{-2}\right)\left(5+3z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}\right) \\
&= 5+3z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}+ \\
&\quad 2z^{-1}\left(5+3z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}\right)+ \\
&\quad 3z^{-2}\left(5+3z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}\right) \\
&= 5+3z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}+ \\
&\quad 10z^{-1}+6z^{-2}+2z^{-3}+8z^{-4}+ \\
&\quad 15z^{-2}+9z^{-3}+3z^{-4}+12z^{-5} \\
&= 5+13z^{-1}+22z^{-2}+15z^{-3}+11z^{-4}+12z^{-5}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Die Funktion

$$f(t) = \sigma(t)\sin(t)$$

wird zu den Zeitpunkten $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Die Abtastwerte sind die Folge

$$f_k = f(k\Delta t).$$

Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k. Um zu einer geschlossenen Formel zu kommen, müssen Sie die Sinus Funktion durch komplexe e-Funktionen darstellen. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 6.

$$\sin(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)$$

$$\begin{aligned}
f_k &= f(k\Delta t) \\
&= \sigma_k \frac{1}{2j}\left(e^{jk\Delta t}-e^{-jk\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

Mit der Korrespondenz

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\sigma_k e^{jk\Delta t} &= \sigma_k \left(e^{j\Delta t}\right)^k \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{j\Delta t}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma_k e^{-jk\Delta t} &= \sigma_k \left(e^{-j\Delta t}\right)^k \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{-j\Delta t}}
\end{aligned}$$

Mit der Linearität der z-Transformation folgt somit

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\Delta t}} - \frac{z}{z-e^{-j\Delta t}}\right) \\ &= \frac{z}{2j}\frac{(z-e^{-j\Delta t})-(z-e^{j\Delta t})}{(z-e^{j\Delta t})(z-e^{-j\Delta t})} \\ &= \frac{z}{2j}\frac{e^{j\Delta t}-e^{-j\Delta t}}{z^2-z(e^{-j\Delta t}+e^{j\Delta t})+1} \\ &= \frac{z\sin(\Delta t)}{z^2-2z\cos(\Delta t)+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Die Funktion

$$f(t) = \sigma(t)t\sin(t)$$

wird zu den Zeitpunkten $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Die Abtastwerte sind die Folge

$$f_k = f(k\Delta t).$$

Nutzen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe und die Korrespondenz

$$kf_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z)$$

um die z-Transformierte von f_k zu bestimmen.

Lösung von Aufgabe 7. Die Folge der Abtastwerte ist

$$f_k = \sigma_k\, k\Delta t\sin(k\Delta t).$$

In der vorigen Aufgabe wurde gezeigt, dass

$$\sin(k\Delta t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\sin(\Delta t)}{z^2-2z\cos(\Delta t)+1}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} k\sin(k\Delta t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z\left(\frac{z\sin(\Delta t)}{z^2-2z\cos(\Delta t)+1}\right)' \\ = \quad & -z\sin(\Delta t)\frac{z^2-2z\cos(\Delta t)+1-z(2z-2\cos(\Delta t))}{(z^2-2z\cos(\Delta t)+1)^2} \\ = \quad & -z\sin(\Delta t)\frac{-z^2+\cos(\Delta t)(-2z+2z)+1}{(z^2-2z\cos(\Delta t)+1)^2} \\ = \quad & \frac{z(z^2-1)\sin(\Delta t)}{(z^2-2z\cos(\Delta t)+1)^2}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f_k &= k\Delta t\sin(k\Delta t) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z(z^2-1)\Delta t\sin(\Delta t)}{(z^2-2z\cos(\Delta t)+1)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{z}{z^2-1}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-1} &= \frac{z}{(z-1)(z+1)} \\ &= \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1} \\ z &= c_1(z+1) + c_2(z-1)\end{aligned}$$

Spezialfall $z = 1$ liefert

$$\begin{aligned}1 &= 2c_1 \\ c_1 &= {}^1\!/\!_2.\end{aligned}$$

Spezialfall $z = -1$ liefert

$$\begin{aligned}-1 &= -2c_2 \\ c_2 &= {}^1\!/\!_2\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(z) = \frac{{}^1\!/\!_2}{z-1} + \frac{{}^1\!/\!_2}{z+1}.$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned}\frac{z}{z-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma_k \\ \frac{1}{z-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma_{k-1} \\ \frac{z}{z+1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma_k(-1)^k \\ \frac{1}{z+1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma_{k-1}(-1)^{k-1} \\ &= -\sigma_{k-1}(-1)^k \\ F(z) &\bullet\!\!-\!\!\circ\; {}^1\!/\!_2\sigma_{k-1}(1-(-1)^k) \\ &= {}^1\!/\!_2\sigma_k(1-(-1)^k) \\ &= \langle 0, 1, 0, 1, \ldots\rangle\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Beim Übergang von der Laplace- zur z-Transformation wurde die Laplace Transformierte von

$$f_p(t) = f(t)p(t)$$

berechnet. Aufgrund der Ausblendeigenschaft hängt $f_p(t)$ nur noch von den Abtastwerten f_k ab und es entsteht die z-Transformierte von f_k. In dieser Aufgabe wird untersucht, was geschieht, wenn das Abtastintervall Δt sehr klein wird. Sei nun

$$p(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

ein Impulszug, dessen Impulse Abstand Δt haben und Stärke Δt.

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F_p(s)$ von $f(t)p(t)$ in Abhängigkeit von Δt.
- Zeigen Sie, dass wenn die Impulse sehr nahe zusammenliegen, d.h. Δt sehr klein ist, $F_p(s)$ in die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ übergeht.
- Für kleine Δt gilt somit

  $$F_p(s) \approx F(s)$$

  und damit im Zeitbereich

  $$f(t)p(t) \approx f(t).$$

  Andererseits sehen $f(t)p(t)$ und $f(t)$ ja völlig unterschiedlich aus. In welchem Sinn kann man trotzdem sagen, dass sie auch im Zeitbereich ähnlich sind?

Hinweis:

- Verwenden Sie eine Hilfsfunktion

  $$g(t) = f(t)e^{-st}$$

- Die Fläche unter $g(t)$ lässt sich durch eine Summe von Rechtecken der Höhe $g(k\Delta t)$ und Breite Δt approximieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t)\Delta t \quad \text{falls } \Delta t \text{ klein.}$$

Lösung von Aufgabe 9.

- Berechnung von $F_p(s)$.

$$\begin{aligned} f(t)p(t) &= f(t)\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \\ &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta t) \\ &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)e^{-sk\Delta t} \\ &= F_p(s). \end{aligned}$$

- Mit
$$g(t) = f(t)e^{-st}$$
gilt
$$\begin{aligned} F_p(t) &= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t)\Delta t \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \quad \text{falls } \Delta t \text{ klein} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= F(s). \end{aligned}$$
- Die Fläche unter $f(p)p(t)$ und $f(t)$ ist näherungsweise gleich groß. Falls Δt gegen Null geht, gilt dies auch für sehr kleine Intervalle.

Aufgabe 10. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte f_k der Funktion
$$F(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)^2}$$
mit Partialbruchzerlegung. Vereinfachen Sie den Ergebnisterm so weit wie möglich. Sie dürfen alle Korrespondenzen der Formelsammlung benutzen.

Lösung von Aufgabe 10. Ansatz:
$$\frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{c_1}{z+2} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{(z-1)^2}.$$
Für die Koeffizienten gilt
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \text{für } z = -2 \\ &= -2/9 \\ c_3 &= \frac{z}{z+2} \qquad \text{für } z = 1 \\ &= 1/3. \end{aligned}$$
Um c_2 zu berechnen, kann man c_1 und c_3 einsetzen und einen beliebigen Wert für z wählen. Mit $z = 0$ erhält man
$$\begin{aligned} 0 &= -1/9 - c_2 + 1/3 \\ c_2 &= 2/9. \end{aligned}$$
Damit ist
$$F(z) = -\frac{2/9}{z+2} + \frac{2/9}{z-1} + \frac{1/3}{(z-1)^2}.$$

Mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1}(-2)^{k-1} \\
\frac{1}{z-1} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1} \\
\frac{1}{(z-1)^2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1}(k-1)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
f_k &= \sigma_{k-1}\left(-\frac{2}{9}(-2)^{k-1} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(k-1)\right) \\
&= \sigma_{k-1}\left(\frac{(-2)^k}{9} + \frac{k}{3} - \frac{1}{9}\right) \\
&= \sigma_k\left(\frac{(-2)^k}{9} + \frac{k}{3} - \frac{1}{9}\right).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\frac{(-2)^k}{9} + \frac{k}{3} - \frac{1}{9} = 0$$

für $k = 0$ und es folglich egal ist, ob man mit σ_{k-1} oder mit σ_k multipliziert.

Aufgabe 11. Sei

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)$$

und

$$g_k = ke^{ak} f_k.$$

Berechnen Sie $G(z)$ in Abhängigkeit von $F(z)$.

Lösung von Aufgabe 11. Aus

$$a^k f_k \circ\!\!-\!\!\bullet F(z/a)$$

folgt

$$e^{ak} f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z/e^a).$$

Mit

$$kf_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -z\frac{d}{dz}F(z)$$

folgt

$$\begin{aligned}
ke^{ak} f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet & \quad -z\frac{d}{dz}F(z/e^a) \\
= & \quad -z\frac{1}{e^a}F'(z/e^a).
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=a}^{b} f_{\ell-k} \quad = \quad \sum_{\ell=a-k}^{b-k} f_\ell.$$

Lösung von Aufgabe 12. Schreibt man die Summen aus, erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=a}^{b} f_{\ell-k} \quad &= \quad f_{a-k} + f_{a+1-k} + f_{a+2-k} + \ldots + f_{b-k} \\
&= \quad f_{a-k} + f_{a-k+1} + f_{a-k+2} + \ldots + f_{b-k} \\
&= \quad \sum_{\ell=a-k}^{b-k} f_\ell.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei g_k eine beliebige Folge.

- Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^{k} g_\ell \quad = \quad (\sigma * g)_k \qquad \text{für alle } k.$$

- Berechnen Sie hiermit und unter Verwendung des Faltungssatzes die z-Transformierte der Folge

$$f_k \quad = \quad \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} \sin(\ell).$$

  Sie müssen das Ergebnis nicht vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 13.

- Mit der Definition der diskreten Faltung gilt

$$(\sigma * g)_k \quad = \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_{k-\ell} g_\ell.$$

  Da $\sigma_{k-\ell} = 0$ falls $\ell > k$ vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_{k-\ell} g_\ell \quad &= \quad \sum_{\ell=-\infty}^{k} \sigma_{k-\ell} g_\ell \\
&= \quad \sum_{\ell=-\infty}^{k} g_\ell.
\end{aligned}$$

- Mit

$$g_k \quad = \quad \sigma_k \sin(k)$$

gilt

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} \sin(\ell) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{k} \sigma_\ell \sin(\ell) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{k} g_\ell \\ &= (\sigma * g)_k. \end{aligned}$$

z-Transformation von σ_k und g_k.

$$\begin{aligned} \sigma_k &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} \\ \sigma_k \sin(k) &= \sigma_k \frac{1}{2j}(e^{jk} - e^{-jk}) \\ &= \sigma_k \frac{1}{2j}\left((e^{j})^k - (e^{-j})^k\right) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^j} - \frac{z}{z-e^{-j}}\right). \end{aligned}$$

Mit dem Faltungssatz gilt daher

$$f_k \circ\!\!-\!\!\bullet \left(\frac{z}{z-1}\right)\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^j} - \frac{z}{z-e^{-j}}\right).$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ 2 & \text{falls } k = 5 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 14. Die Folge f_k kann als Summe von zwei Folgen geschrieben werden:

$$f_k = \sigma_k + g_k$$

wobei

$$g_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned} \sigma_k &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} \\ g_k &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-5} \end{aligned}$$

folgt

$$f_k \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z^5}.$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sigma_k k^2 a^k$$

Lösung von Aufgabe 15. Es gilt

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

Mit Ableitung im Bildbereich erhält man

$$\begin{aligned}
\sigma_k k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z\left(\frac{z}{z-a}\right)' \\
= \quad & -z\frac{(z-a)-z}{(z-a)^2} \\
= \quad & \frac{za}{(z-a)^2} \\
\sigma_k k^2 a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z\left(\frac{za}{(z-a)^2}\right)' \\
= \quad & -z\frac{a(z-a)^2 - 2za(z-a)}{(z-a)^4} \\
= \quad & -z\frac{a(z-a) - 2za}{(z-a)^3} \\
= \quad & \frac{za(z+a)}{(z-a)^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Berechnen Sie die z-Transformierte von $k^3 f_k$.

Lösung von Aufgabe 16. Es gilt

$$k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z).$$

Nochmalige Multiplikation mit k im Zeitbereich führt zu

$$\begin{aligned}
k^2 f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z(-zF'(z))' \\
= \quad & -z(-F'(z) - zF''(z)) \\
= \quad & zF'(z) + z^2F''(z).
\end{aligned}$$

Nochmalige Multiplikation mit k im Zeitbereich führt zu

$$\begin{aligned}
k^3 f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z(zF'(z) + z^2F''(z))' \\
= \quad & -z(F'(z) + zF''(z) + 2zF''(z) + z^2F'''(z)) \\
= \quad & -z(F'(z) + 3zF''(z) + z^2F'''(z)) \\
= \quad & -zF'(z) - 3z^2F''(z) - z^3F'''(z).
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass für alle k, m gilt

$$\delta_{k-m} f_k \quad = \quad \delta_{k-m} f_m.$$

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{array}{rcl} \delta_{k-m} f_k & = & \left\{ \begin{array}{ll} f_m & \text{falls } k = m \\ 0 & \text{falls } k \neq m \end{array} \right. \\ & = & \delta_{k-m} f_m. \end{array}$$

Aufgabe 18. Zeigen Sie mit Hilfe der z-Transformation, dass

$$f_{.-\hat{k}} * g_{.-\hat{m}} \quad = \quad (f * g)_{.-(\hat{k}+\hat{m})}.$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{array}{rcl} f_{.-\hat{k}} * g_{.-\hat{m}} & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(z) z^{-\hat{k}} G(z) z^{-\hat{m}} \\ & = & (F(z) G(z)) z^{-(\hat{k}+\hat{m})} \\ & \bullet\!\!-\!\!\circ & (f * g)_{.-(\hat{k}+\hat{m})}. \end{array}$$

Aufgabe 19. Sei S ein kausales LTI System mit

$$S(\langle 1, 4, -2, 0, 0, \ldots \rangle) \quad = \quad \langle 2, 9, -1, -6, 2, 0, 0, \ldots \rangle.$$

Berechnen Sie die Impulsantwort g von S. Lösen Sie die Aufgabe einmal im Zeitbereich und einmal mit dem Faltungssatz und Polynomdivision.

Lösung von Aufgabe 19.

- Lösung im Zeitbereich. Da S kausal ist, gilt

$$\begin{array}{rcl} S(f)_k & = & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} f_{k-\ell} g_\ell \qquad \text{für alle } k \\ & = & f_k g_0 + f_{k-1} g_1 + f_{k-2} g_2 + \ldots \end{array}$$

Damit erhält man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 1 g_0 \\ 9 & = & 4 g_0 + 1 g_1 \\ -1 & = & -2 g_0 + 4 g_1 + 1 g_2 \\ -6 & = & -2 g_1 + 4 g_2 + 1 g_3 \\ 2 & = & -2 g_2 + 4 g_3 + 1 g_4 \\ 0 & = & -2 g_3 + 4 g_4 + 1 g_5 \\ & \vdots & \end{array}$$

Lösen einer Gleichung und Einsetzen in die nächste liefert

$$\begin{array}{rcl} g_0 & = & 2 \\ g_1 & = & 9 - 8 \ = \ 1 \\ g_2 & = & -1 + 4 - 4 \ = \ -1 \\ g_3 & = & -6 + 2 + 4 \ = \ 0 \\ g_4 & = & 2 - 2 + 0 \ = \ 0 \\ g_5 & = & 0 + 0 - 0 \ = \ 0 \\ & \vdots & \end{array}$$

Damit ist

$$g = \langle 2, 1, -1, 0, 0, \ldots \rangle.$$

- Lösung mit z-Transformation. Aus

  $$S(f) = f * g$$

  folgt mit dem Faltungssatz

  $$2 + 9z - z^2 - 6z^3 + 2z^4 = (1 + 4z - 2z^2)G(z).$$

  Damit ist

  $$G(z) = \frac{2z^4 - 6z^3 - z^2 + 9z + 2}{-2z^2 + 4z + 1}.$$

  Polynomdivision ergibt

  $$G(z) = -z^2 + z + 2.$$

  Rücktransformation ergibt

  $$G(z) \bullet\!\!-\!\!\circ \langle 2, 1, -1, 0, 0, \ldots \rangle.$$