Heilbronn, den 28.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 8

Aufgabe 1. Sei

$$[S(f)]\,(t) \quad = \quad f''(t-1).$$

Ist S linear und zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 1. S ist linear. Es gilt

$$\begin{aligned} S(f+g) &= S(f)+S(g) \\ S(uf) &= uS(f). \end{aligned}$$

Begründung.

$$\begin{aligned} [S(f+g)]\,(t) &= (f+g)''(t-1) \\ &= f''(t-1)+g''(t-1) \\ &= [S(f)]\,(t)+[S(g)]\,(t) \\ &= [S(f)+S(g)]\,(t) \\ [S(uf)]\,(t) &= (uf)''(t-1) \\ &= uf''(t-1) \\ &= u\,[S(f)]\,(t) \\ &= [uS(f)]\,(t). \end{aligned}$$

S ist zeitinvariant. Es gilt

$$S(f_{\hat{t}}) \quad = \quad S(f)_{\hat{t}}.$$

Begründung. Aus

$$f_{\hat{t}}(t) \quad = \quad f(t-\hat{t})$$

folgt durch zweimaliges Ableiten auf beiden Seiten

$$f''_{\hat{t}}(t) \quad = \quad f''(t-\hat{t}).$$

Ersetzt man noch auf beiden Seiten t durch $t-1$ erhält man

$$f''_{\hat{t}}(t-1) \quad = \quad f''(t-1-\hat{t}).$$

Aus

$$[S(f)]\,(t) \quad = \quad f''(t-1)$$

folgt durch Ersetzen von t durch $t-\hat{t}$ auf beiden Seiten

$$[S(f)]\,(t-\hat{t}) \quad = \quad f''(t-\hat{t}-1).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
[S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}''(t-1) \\
&= f''(t-1-\hat{t}) \\
&= f''((t-\hat{t})-1) \\
&= [S(f)](t-\hat{t}) \\
&= [S(f)_{\hat{t}}](t).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t) = \sigma(t-3)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die DGL hat viele Lösungsfunktionen $f(t)$, von denen aber nur eine auch eine Laplace Transformierte $F(s)$ hat. Berechnen Sie daher diese mit Laplace Transformation. Addieren Sie dann die allgemeine Lösung der homogenen DGL, die Sie mit dem $e^{\lambda t}$ Ansatz bekommen.

Lösung von Aufgabe 2. Sei $f(t)$ die Lösung der DGL, die auch eine Laplace Transformierte hat, d.h.

$$\begin{aligned}
f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \\
f'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
sF(s) + F(s) &= \frac{1}{s}e^{-3s} \\
F(s)(s+1) = &= \frac{1}{s}e^{-3s} \\
F(s) &= \frac{1}{s(s+1)}e^{-3s}.
\end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} \\
1 &= c_1(s+1) + c_2 s.
\end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$ liefert $c_1 = 1$. Spezialfall $s = -1$ liefert $c_2 = -1$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma(t) - \sigma(t)e^{-t} \\
\frac{1}{s(s+1)}e^{-3s} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma(t-3) - \sigma(t-3)e^{-(t-3)} \\
&= \sigma(t-3)(1-e^{3-t}).
\end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung ist somit

$$f_P(t) = \sigma(t-3)(1-e^{3-t}).$$

Die homogene DGL ist

$$f'(t) + f(t) = 0.$$

Mit dem Ansatz $f(t) = e^{\lambda t}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

und die allgemeine homogene Lösung

$$f_H(t) = Ce^{-t}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$f(t) = Ce^{-t} + \sigma(t-3)(1-e^{3-t}).$$

Aufgabe 3. In jedem Semester k beginnen an der Hochschule f_k Studierende und h_k schließen ihr Studium erfolgreich ab. Vereinfachend wird angenommen, dass 50% der Anfänger ihr Studium abbrechen, 10% brauchen 7 Semester, 20% brauchen 8 Semester und weitere 20% beenden ihr Studium nach 9 Semestern. Berechnen Sie die Impulsantwort dieses Systems, d.h. eine Folge g_k so dass

$$h = f * g.$$

Lösung von Aufgabe 3.

$$g = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.2, 0, 0, \ldots \rangle.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = k\, \sigma_{k-1} \cos(k-1).$$

Sie müssen die entstehenden Terme *nicht* vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 4. Aus

$$\begin{aligned} \sigma_k \cos(k) &= \sigma_k \frac{1}{2} \left(e^{jk} + e^{-jk} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_k e^{jk} + \sigma_k e^{-jk} \right) \end{aligned}$$

und

$$\sigma_k e^{ak} \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^a}$$

folgt

$$\sigma_k \cos(k) \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-e^j} + \frac{z}{z-e^{-j}} \right).$$

Mit dem Verschiebungssatz

$$f_{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1}F(z)$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{k-1}\cos(k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-e^j} + \frac{1}{z-e^{-j}}\right) \\ = \quad & \frac{1}{2}\left((z-e^j)^{-1} + (z-e^{-j})^{-1}\right). \end{aligned}$$

Mit der Ableitung im Bildbereich

$$k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z)$$

folgt

$$\begin{aligned} k\,\sigma_{k-1}\,\cos(k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{-z}{2}\left(-(z-e^j)^{-2} - (z-e^{-j})^{-2}\right) \\ = \quad & \frac{z}{2}\left(\frac{1}{(z-e^j)^2} + \frac{1}{(z-e^{-j})^2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = 2^{3-k}\sigma_{k-1}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Hinweis: Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Potenzrechnung bevor Sie den Verschiebungssatz anwenden.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} f_k &= 2^3 2^{-k}\sigma_{k-1} \\ &= 8(1/2)^k\sigma_{k-1} \\ &= 8(1/2)(1/2)^{k-1}\sigma_{k-1} \\ &= 4(1/2)^{k-1}\sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

Aus

$$(1/2)^k\sigma_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1/2}$$

und dem Verschiebungssatz

$$f_{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1}F(z)$$

folgt

$$\begin{aligned} (1/2)^{k-1}\sigma_{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{z-1/2} \\ = \quad & \frac{2}{2z-1}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist das Ergebnis somit

$$4(1/2)^{k-1}\sigma_{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{8}{2z-1}.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die z-Transformierte der periodischen Folge

$$f_k = \langle 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots \rangle.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Im Ergebnisterm dürfen keine negativen Exponenten von z auftreten.

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\
&= z^{-3} + z^{-7} + z^{-11} + \ldots \\
z^{-4}F(z) &= z^{-7} + z^{-11} + z^{-15} + \ldots \\
F(z)(1 - z^{-4}) &= z^{-3} \\
F(z) &= \frac{z^{-3}}{1 - z^{-4}} \\
&= \frac{z}{z^4 - 1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Sei $f(t)$ eine Funktion mit Abtastwerten

$$f_k = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

und

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k).$$

Sei

$$\begin{aligned}
f(t)p(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet_L \quad F_p(s) \\
f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet_z \quad F_z(z)
\end{aligned}$$

die Laplace Transformierte von $f(t)p(t)$ bzw. die z-Transformierte von f_k. Zeigen Sie, dass

$$F_p(s) = F_z(e^s).$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}
f(t)p(t) &= f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\delta(t-k) \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet_L \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-sk} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k (e^s)^{-k} \\
f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet_z \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
F_p(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k (e^s)^{-k} \\
F_z(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k}
\end{aligned}$$

und folglich

$$F_z(e^s) = F_p(s).$$

Aufgabe 8. Sei $s \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{re}(s) > a \quad \text{gdw.} \quad |e^s| > e^a.$$

Lösung von Aufgabe 8. Sei $s = \alpha + j\omega$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|e^s| &= |e^{\alpha+j\omega}| \\
&= |e^{\alpha}e^{j\omega}| \\
&= |e^{\alpha}||e^{j\omega}| \\
&= |e^{\alpha}| \\
&= e^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$|e^s| > e^a$$

genau dann wenn

$$e^{\alpha} > e^a.$$

Da die e-Funktion streng monoton steigend ist, ist dies genau dann der Fall wenn

$$\alpha > a$$

bzw.

$$\text{re}(s) > a.$$

Aufgabe 9. Sei f_k eine Folge mit $f_k = 0$ für $k < 0$ und

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Sei

$$g_k = \begin{cases} f_k & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die $G(z)$ in Abhängigkeit von $F(z)$. Hinweis: Mit der Folge

$$h_k = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle = \sigma_k \frac{(-1)^k + 1}{2}$$

gilt

$$\begin{aligned} g_k &= h_k f_k \\ &= \sigma_k \frac{(-1)^k + 1}{2} f_k. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} g_k &= f_k h_k \\ &= \frac{(-1)^k f_k + f_k}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Korrespondenz

$$a^k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z/a)$$

folgt

$$(-1)^k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-z).$$

Damit ist

$$g_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{F(-z) + F(z)}{2}$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Hinweis: Sie können nicht direkt mit einer Partialbruchzerlegung anfangen, da der Zählergrad nicht kleiner als der Nennergrad ist. Spalten Sie daher zuerst den ganzrationalen Teil mit einer Polynomdivision ab und nutzen Sie die Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 1 - \delta_k \\ \frac{1}{z+1} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k - (-1)^k. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 10. Polynomdivision ergibt

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z^2-1} &= 1+\frac{1}{z^2-1}\\ &= 1+\frac{1}{(z-1)(z+1)}.\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z+1)} &= \frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z+1}\\ 1 &= c_1(z+1)+c_2(z-1)\end{aligned}$$

Aus den Spezialfällen $z=-1$ und $z=1$ folgt

$$c_1 = 1/2 \text{ und } c_2 = -1/2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}1 &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \delta_k\\ \frac{1}{z^2-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{2}(1-\delta_k)-\frac{1}{2}(\delta_k-(-1)^k)\\ &= \frac{1}{2}-\delta_k+\frac{1}{2}(-1)^k\\ \frac{z^2}{z^2-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k.\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z)=\frac{1}{z^5(z-1)}.$$

Hinweis: Sie brauchen hier *keine* Partialbruchzerlegung.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{1}{z^5(z-1)}\\ &= z^{-5}\frac{1}{z-1}\\ &= z^{-6}\frac{z}{z-1}.\end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung erhält man

$$\frac{z}{z-1}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma_k.$$

Mit dem Verschiebungssatz erhält man

$$z^{-6}\frac{z}{z-1}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma_{k-6}.$$

Aufgabe 12. Für eine Folge f_k gilt

$$f_k - f_{k-1} = \sigma_k 2^k\, k^2$$

für $k \geq 0$ und $f_k = 0$ für $k < 0$.

- Berechnen Sie f_0, f_1, f_2 und f_3.
- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Es dürfen im Ergebnis keine negativen Potenzen von z auftreten.

Lösung von Aufgabe 12. Aus

$$f_k = \sigma_k 2^k\, k^2 + f_{k-1}$$

erhält man durch Einsetzen

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 + f_{-1} = 0 \\ f_1 &= 2 + f_0 = 2 \\ f_2 &= 16 + f_1 = 18 \\ f_3 &= 72 + 18 = 90 \end{aligned}$$

Damit die Differenzengleichung für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, multipliziert man beide Seiten mit σ_k.

$$\begin{aligned} \sigma_k(f_k - f_{k-1}) &= \sigma_k 2^k\, k^2 \\ \sigma_k f_k - \sigma_k f_{k-1} &= \sigma_k 2^k\, k^2. \end{aligned}$$

Sei

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Da $f_k = 0$ für $k < 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_k f_k &= f_k \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z). \end{aligned}$$

Da $f_{-1} = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_k f_{k-1} &= \sigma_{k-1} f_{k-1} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-1} F(z). \end{aligned}$$

Mit dem Dämpfungssatz erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_k k^2 &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ \sigma_k 2^k k^2 &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{(z/2)(z/2+1)}{(z/2-1)^3} \\ &\quad = \quad \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(z)(1 - z^{-1}) &= \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3} \\ F(z)(z-1) &= \frac{2z^2(z+2)}{(z-2)^3} \\ F(z) &= \frac{2z^2(z+2)}{(z-2)^3(z-1)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 13.

- Sei

  $$g \in \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$$

  eine zweistellige Folge. Statt $g(k,\ell)$ wird wie bei Folgen üblich $g_{k,\ell}$ geschrieben. Sei S definiert durch

  $$[S(f)]_k \quad = \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k,\ell} f_\ell.$$

  Zeigen Sie, dass S linear ist.

- Zeigen Sie, dass wenn S ein beliebiges lineares (aber nicht notwendig zeitinvariantes) System ist, für alle k gilt

  $$[S(f)]_k \quad = \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k,\ell} f_\ell$$

  wobei

  $$g_{k,\ell} \quad = \quad [S(\delta_{\cdot-\ell})]_k \,.$$

  Hinweis:

  - Wenn S auch zeitinvariant wäre, dann wäre

    $$\begin{aligned} [S(\delta_{\cdot-\ell})]_k &= [S(\delta)_{\cdot-\ell}]_k \\ &= [S(\delta)]_{k-\ell} \,. \end{aligned}$$

    Was in der Vorlesung über LTI Systeme gezeigt wurde, wird hier somit auf Systeme verallgemeinert, die nicht notwendigerweise zeitinvariant sind.

  - Nutzen Sie wie in der Vorlesung gezeigt aus, dass

    $$f \quad = \quad \sum_{\ell} f_\ell \delta_{\cdot-\ell}$$

    für jede Folge f gilt.

  - Im wesentlichen entspricht $g_{k,\ell}$ der Matrix Darstellung der linearen Funktion S wobei es diesmal nicht um (n-stellige) Vektoren geht sondern um (unendlich lange) Folgen.

Lösung von Aufgabe 13.

- Zu zeigen: S ist linear.

$$\begin{aligned}
\left[S(f^{(1)}+f^{(2)})\right]_k &= \sum_\ell g_{k,\ell}(f^{(1)}+f^{(2)})_\ell \\
&= \sum_\ell g_{k,\ell}(f_\ell^{(1)}+f_\ell^{(2)}) \\
&= \sum_\ell g_{k,\ell}f_\ell^{(1)} + \sum_\ell g_{k,\ell}f_\ell^{(2)} \\
&= \left[S(f^{(1)})\right]_k + \left[S(f^{(2)})\right]_k \\
&= \left[S(f^{(1)})+S(f^{(2)})\right]_k \\
[S(uf)]_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k,\ell}(uf)_\ell \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k,\ell}uf_\ell \\
&= u\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k,\ell}f_\ell \\
&= u\,[S(f)]_k \\
&= [uS(f)]_k\,.
\end{aligned}$$

- Mit

$$g_{k,\ell} = [S(\delta_{\cdot-\ell})]_k$$

gilt

$$\begin{aligned}
[S(f)]_k &= \left[S\left(\sum_\ell f_\ell\delta_{\cdot-\ell}\right)\right]_k \\
&= \left[\sum_\ell f_\ell S(\delta_{\cdot-\ell})\right]_k \qquad \text{da } S \text{ linear} \\
&= \sum_\ell f_\ell\,[S(\delta_{\cdot-\ell})]_k \\
&= \sum_\ell f_\ell g_{k,\ell}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Von einem LTI System S sei die Sprungantwort

$$h = S(\sigma)$$

bekannt. Berechnen Sie damit die Impulsantwort von S und zwar einmal im Zeitbereich und einmal mit Hilfe der z-Transformation.

Hinweis:

$$\delta = \sigma - \sigma_{\cdot-1}.$$

Lösung von Aufgabe 14. Sei

$$g = S(\delta)$$

die Impulsantwort von S.

- Berechnung im Zeitbereich. Da S LTI ist, gilt

$$\begin{aligned} S(\delta) &= S(\sigma - \sigma_{.-1}) \\ &= S(\sigma) - S(\sigma_{.-1}) \\ &= S(\sigma) - S(\sigma)_{.-1} \\ &= h - h_{.-1} \end{aligned}$$

  Damit ist

$$g_k = h_k - h_{k-1} \text{ für alle } k.$$

- Aus

$$h = g * \sigma$$

  folgt mit z-Transformation

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z)\frac{z}{z-1} \\ G(z) &= H(z)\frac{z-1}{z} \\ &= H(z) - z^{-1}H(z) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\; h_k - h_{k-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Ein diskreter Übertragungskanal habe Impulsantwort

$$g_k = \delta_{k-1} + \delta_{k-2}.$$

Durch ein nachgeschaltetes System mit Impulsantwort h_k soll dieser Kanal kompensiert werden. Technisch ist dies nicht möglich, da der Kompensator eine Verzögerung ausgleichen, d.h. in die Zukunft schauen müsste. Realisierbar ist hingegen eine Kompensation mit Verzögerung. Berechnen Sie den kleinsten Wert für m und die zugehörige Folge h_k so dass

$$\begin{aligned} h_k &= 0 && \text{für } k < 0 \text{ und} \\ (g * h)_k &= \delta_{k-m} && \text{für alle } k \end{aligned}$$

Begründen Sie in einem Satz, weshalb dieses System h instabil ist.

Lösung von Aufgabe 15. Sei

$$\begin{aligned} g_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; G(z) \\ h_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; H(z). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(g*h)_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; G(z)H(z) \\
&= H(z)(z^{-1}+z^{-2}) \\
&= z^{-m} \\
H(z) &= \frac{z^{-m}}{z^{-1}+z^{-2}} \\
&= z^{-m}\frac{1}{z^{-1}+z^{-2}} \\
&= z^{-m}\frac{z^2}{z+1} \\
&= z^{-m+1}\frac{z}{z+1} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; h_k.
\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{z}{z-a} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k a^k$$

folgt

$$\frac{z}{z+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k(-1)^k.$$

Multiplikation mit z^{-m+1} bedeutet Verzögerung um $-m+1$ Takte im Zeitbereich. Damit h_k kausal ist, muss folglich m mindestens 1 sein. In diesem Fall ist

$$h_k = \sigma_k(-1)^k.$$

Das System ist instabil weil

$$H(z) = \frac{z}{z+1}$$

einen Pol bei $z=-1$ hat und ein System genau dann stabil ist, wenn alle Pole Betrag kleiner 1 haben.

Aufgabe 16. Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome vom Grad zwei, d.h.

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2
\end{aligned}$$

Man kann die beiden Polynome kompakt durch die Folge ihrer Koeffizienten darstellen, d.h.

$$\begin{aligned}
a &= \langle a_0, a_1, a_2, 0, 0, \ldots\rangle \\
b &= \langle b_0, b_1, b_2, 0, 0, \ldots\rangle.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Koeffizienten des Produkts

$$p(x)q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

und zeigen Sie, dass diese identisch mit der diskreten Faltung

$$c = a * b$$

sind. Dies ist nicht überraschend, da man mit der z-Transformation erhält

$$\begin{aligned} a_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ p(z^{-1}) \\ b_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ q(z^{-1}) \end{aligned}$$

und mit dem Faltungssatz gilt

$$(a * b)_k \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ p(z^{-1})q(z^{-1}).$$

Ersetzt man z^{-1} durch x, hat man allgemein gezeigt, dass Multiplikation von Polynomen der Faltung ihrer Koeffizienten entspricht.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 \\ &+ a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 \\ &+ a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + a_2b_2x^4 \\ &= a_0b_0 \\ &+ (a_0b_1 + a_1b_0)x \\ &+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &+ (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 \\ &+ a_2b_2x^4. \end{aligned}$$

Die Folge der Koeffizienten des Produkts ist somit

$$\langle a_0b_0,\ \ a_0b_1 + a_1b_0,\ \ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,\ \ a_1b_2 + a_2b_1,\ \ a_2b_2,\ \ 0,\ \ 0\ldots\rangle,$$

was identisch ist mit $a * b$.

Aufgabe 17. Seien S_1 und S_2 zwei LTI Systeme. Zeigen Sie, dass dann auch das System S mit

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f)$$

linear und zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 17. Seien g_1, g_2 die Impulsantworten von S_1, S_2, d.h.

$$\begin{aligned} S_1(f) &= f * g_1 \\ S_2(f) &= f * g_2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S(f) &= S_1(f) + S_2(f) \\ &= f * g_1 + f * g_2 \\ &= f * (g_1 + g_2) \\ &= f * g \end{aligned}$$

für $g = g_1 + g_2$. Da sich S durch Faltung mit einer Folge g realisieren lässt, ist S linear und zeitinvariant.

Aufgabe 18. Seien S_1, S_2 LTI Systeme mit Impulsantworten g_1, g_2. Zeigen Sie, dass dann auch das System S mit

$$S(f) = S_1(S_2(f))$$

LTI ist mit Impulsantwort $g_1 * g_2$.

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned} S(f) &= S_1(S_2(f)) \\ &= S_1(f * g_2) \\ &= (f * g_2) * g_1 \\ &= f * (g_2 * g_1) \\ &= f * (g_1 * g_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Gegeben sei ein rekursiver Filter mit den Gewichten

$$b_0 = 1,\ b_1 = -1,\ b_2 = 1,\ b_3 = -1$$

im Vorwärtszweig und

$$a_1 = 1$$

im Rückwärtszweig. Begründen Sie, weshalb dieser Filter äquivalent zu dem viel einfacheren FIR Filter mit Koeffizienten

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1$$

ist.

Lösung von Aufgabe 19. Berechnung der Übertragungsfunktion.

$$\begin{aligned} h_k &= f_k - f_{k-1} + f_{k-2} - f_{k-3} + h_{k-1} \\ h_k - h_{k-1} &= f_k - f_{k-1} + f_{k-2} - f_{k-3} \\ H(z)(1 - z^{-1}) &= F(z)(1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}) \\ G(z) &= \frac{H(z)}{F(z)} \\ &= \frac{1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = z^{-1}$ ist die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{-u^3 + u^2 - u + 1}{-u + 1}$$

Polynomdivision ergibt

$$\begin{aligned} G(z) &= u^2 + 1 \\ &= 1 + z^{-2}. \end{aligned}$$

Die Impulsantwort des Filters ist somit

$$g = \langle 1, 0, 1 \rangle.$$

Die Faltung mit g wird durch einen FIR Filter realisiert mit Gewichten

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1.$$

Aufgabe 20. Ein Signal f wird durch einen Kanal mit Impulsantwort

$$g = <2, 1>$$

übertragen. Durch einen rekursiven Filter möchte man die Verzerrung durch diesen Kanal kompensieren. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$, die Koeffizienten und die Impulsantwort h_k dieses Filters. Es muss also gelten

$$(f * g) * h = f.$$

Lösung von Aufgabe 20. Sei $H(z)$ die Übertragungsfunktion des Filters. Dann gilt

$$(f * g * h)_k = f_k$$

bzw.

$$\begin{aligned}
F(z)G(z)H(z) &= F(z) \\
G(z)H(z) &= 1 \\
H(z) &= \frac{1}{G(z)} \\
&= \frac{1}{2 + z^{-1}} \\
&= \frac{1/2}{1 - (-1/2)z^{-1}} \\
&= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \dots}
\end{aligned}$$

Die Filterkoeffizienten sind somit

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1/2 \\
a_1 &= -1/2
\end{aligned}$$

Erweitern mit z ergibt

$$H(z) = \frac{(1/2)z}{z - (-1/2)}$$

Die Impulsantwort h_k erhält man aus

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z-a} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad a^k \\
\frac{(1/2)z}{z - (-1/2)} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \quad -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&= \quad <1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \dots> .
\end{aligned}$$

Tatsächlich kann man leicht zeigen, dass

$$<2, 1> * <1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \dots> = <1, 0, 0, \dots>$$