Heilbronn, den 5.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3
mit Musterlösungen
Blatt 9

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Lösung von Aufgabe 1. Faktorisierung des Nenners.

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-1)^2} &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} \\
x &= c_1(x-1) + c_2 \\
x &= c_1 x + c_2 - c_1
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
F(x) &= \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Laplace Transformierte der Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte der Rechteck Schwingung

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \le t \le k+1 \text{ für } k = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $f(t) - f(t-2) = g(t)$ für alle t.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{s}\left(e^{-s}-1\right) \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$f(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-2s}F(s).$$

Damit ist

$$g(t) = f(t) - f(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)(1-e^{-2s}) = G(s).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{G(s)}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ der Laplace Transformierten

$$F(s) = \frac{4s+3}{5s^2+6}.$$

Sie benötigen dafür *keine* Partialbruchzerlegung.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{4s+3}{5s^2+6} \\ &= 4\frac{s}{5s^2+6} + 3\frac{1}{5s^2+6} \\ &= \frac{4}{5}\frac{s}{s^2+6/5} + \frac{3}{5}\frac{1}{s^2+6/5} \\ &= \frac{4}{5}\frac{s}{s^2+6/5} + \frac{3}{5}\sqrt{5/6}\,\frac{\sqrt{6/5}}{s^2+6/5} \\ \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad & \sigma(t)\left(\frac{4}{5}\cos(\sqrt{6/5}\;t) + \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}\sin(\sqrt{6/5}\;t)\right) \\ &= \sigma(t)\left(\frac{4}{5}\cos(\sqrt{6/5}\;t) + \sqrt{3/10}\,\sin(\sqrt{6/5}\;t)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei n eine natürliche Zahl.

- Sei

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n, 2n, 3n, \ldots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Damit ist

$$f_k = \langle 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ Nullen}}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ Nullen}}, 1, \ldots \rangle$$

  Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k.

- Sei nun

$$g_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ k & \text{falls } k = 0, n, 2n, 3n, \ldots \\ 3^k & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Berechnen Sie die z-Transformierte von g_k. Hinweise: Überlegen Sie sich, wie Sie f_k transformieren müssen um g_k zu erhalten und führen Sie die entsprechenden Schritte auf der z-Transformierten aus. Sie müssen das Ergebnis nicht auf einen Nenner bringen, formen Sie jedoch so um, dass keine negativen Exponenten von z auftreten.

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\ &= z^{-0} + z^{-n} + z^{-2n} + \ldots \\ z^{-n}F(z) &= \phantom{z^{-0} +{}} z^{-n} + z^{-2n} + \ldots \\ F(z) - z^{-n}F(z) &= z^{-0} \\ F(z)(1 - z^{-n}) &= 1 \\ F(z) &= \frac{1}{1 - z^{-n}} \\ &= \frac{z^n}{z^n - 1} \end{aligned}$$

Es gilt

$$g_k = \sigma_k 3^k - 3^k f_k + k f_k$$

Transformation der einzelnen Terme. Mit der Korrespondenz

$$\sigma_k a^k \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-a}$$

folgt

$$\sigma_k 3^k \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-3}.$$

Mit

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z^n}{z^n-1} \text{ und der Korrespondenz} \\
a^k f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z/a)
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
3^k f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z/3) \\
&= \frac{(z/3)^n}{(z/3)^n-1} \\
&= \frac{z^n}{z^n-3^n}
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z^n}{z^n-1} \quad \text{und der Korrespondenz} \\
k f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; -zF'(z)
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
k f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\; -z\frac{nz^{n-1}(z^n-1)-z^n nz^{n-1}}{(z^n-1)^2} \\
&= -zn\frac{z^{2n-1}-z^{n-1}-z^{2n-1}}{(z^n-1)^2} \\
&= -zn\frac{-z^{n-1}}{(z^n-1)^2} \\
&= \frac{nz^n}{(z^n-1)^2}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
G(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z^n}{z^n-3^n} + \frac{nz^n}{(z^n-1)^2}.
$$

Aufgabe 5. Sei

$$
\begin{aligned}
f_k &= \sigma_k a^k \\
g_k &= \sigma_k a^{-k}.
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie $(f * g)_k$ indem Sie zuerst die Faltung im Zeitbereich durchführen und dann mit Hilfe der z-Transformation.

Lösung von Aufgabe 5. Lösung im Zeitbereich.

$$\begin{aligned}
(f*g)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sigma_\ell a^\ell \sigma_{k-\ell} a^{-(k-\ell)} \\
&= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} a^\ell a^{-k+\ell} \\
&= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} a^\ell a^{-k} a^\ell \\
&= \sigma_k a^{-k} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} a^{2\ell}}_{S}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
a^2 S &= \sum_{\ell=0}^{k} a^2 a^{2\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} a^{2(\ell+1)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k+1} a^{2\ell} \\
S(1-a^2) &= \sum_{\ell=0}^{k} a^{2\ell} - \sum_{\ell=1}^{k+1} a^{2\ell} \\
&= 1 - a^{2(k+1)} \\
S &= \frac{1-a^{2(k+1)}}{1-a^2} \\
(f*g)_k &= \sigma_k a^{-k} S \\
&= \sigma_k \frac{a^{-k} - a^{k+2}}{1-a^2}
\end{aligned}$$

Lösung mit z-Transformation.

$$\begin{aligned}
\sigma_k a^k &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-a} \\
\sigma_k a^{-k} &= \sigma_k (1/a)^k \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-1/a} \\
(f*g)_k &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-a}\frac{z}{z-1/a} \\
&= \frac{z^2}{(z-a)(z-1/a)}
\end{aligned}$$

Polynomdivision.

$$z^2 : (z-a)(z-1/a) = 1 + \frac{az + (1/a)z - 1}{(z-a)(z-1/a)}.$$

Partialbruchzerlegung des gebrochenen Rests.

$$\begin{aligned}\frac{az+(1/a)z-1}{(z-a)(z-1/a)} &= \frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{z-1/a}\\ az+(1/a)z-1 &= c_1(z-1/a)+c_2(z-a)\end{aligned}$$

Spezialfall $z=a$

$$\begin{aligned}a^2+1-1 &= c_1(a-1/a)\\ a^2 &= c_1(a-1/a)\\ a^3 &= c_1(a^2-1)\\ c_1 &= \frac{a^3}{a^2-1}\end{aligned}$$

Spezialfall $z=1/a$

$$\begin{aligned}1+1/a^2-1 &= c_2(1/a-a)\\ 1 &= c_2(a-a^3)\\ c_2 &= \frac{1}{a-a^3}\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{az+(1/a)z-1}{(z-a)(z-1/a)} &= \frac{a^3}{a^2-1}\frac{1}{z-a}+\frac{1}{a-a^3}\frac{1}{z-1/a}\\ &= z^{-1}\left(\frac{a^3}{a^2-1}\frac{z}{z-a}+\frac{1}{a-a^3}\frac{z}{z-1/a}\right)\\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\quad \sigma_{k-1}\left(\frac{a^3}{a^2-1}a^{k-1}+\frac{1}{a-a^3}a^{-k-1}\right)\\ &= \sigma_{k-1}\left(\frac{a^{k+2}}{a^2-1}+\frac{a^{-k}}{1-a^2}\right)\\ &= \sigma_{k-1}\left(\frac{a^{k+2}-a^{-k}}{a^2-1}\right)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}(f*g)_k &= \delta_k+\sigma_{k-1}\left(\frac{a^{k+2}-a^{-k}}{a^2-1}\right)\\ &= \sigma_k\left(\frac{a^{k+2}-a^{-k}}{a^2-1}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sigma_k\cos(k).$$

Hinweis: Stellen Sie $\cos(k)$ mit komplexen e-Funktionen dar. Beginnen Sie mit der Korrespondenz

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

und den Spezialfällen $a=e^{\pm j}$ und verwenden Sie Linearität.

Lösung von Aufgabe 6. Mit $a = e^j$ und $a = e^{-j}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_k (e^j)^k &= \sigma_k e^{jk} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z - e^j} \\
\sigma_k (e^{-j})^k &= \sigma_k e^{-jk} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z - e^{-j}}
\end{aligned}$$

Addition im Zeitbereich ergibt

$$\begin{aligned}
\sigma_k e^{jk} + \sigma_k e^{-jk} &= 2\sigma_k \mathrm{re}(e^{jk}) \\
&= 2\sigma_k \cos(k).
\end{aligned}$$

Addition im Bildbereich

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z - e^j} + \frac{z}{z - e^{-j}} &= \frac{z(z - e^{-j}) + z(z - e^j)}{(z - e^j)(z - e^{-j})} \\
&= \frac{z(z - e^{-j} + z - e^j)}{z^2 - z(e^{-j} + e^j) + 1} \\
&= \frac{z(2z - 2\mathrm{re}(e^j))}{z^2 - 2z\mathrm{re}(e^j) + 1} \\
&= \frac{2z(z - \cos(1))}{z^2 - 2z\cos(1) + 1}.
\end{aligned}$$

Damit hat man

$$\begin{aligned}
2\sigma_k \cos(k) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2z(z - \cos(1))}{z^2 - 2z\cos(1) + 1} \\
\sigma_k \cos(k) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z(z - \cos(1))}{z^2 - 2z\cos(1) + 1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. In der Praxis wird die Abtastung von $f(t)$ mit einem Sample and Hold Verstärker gemacht. Hierbei entsteht ein Signal

$$g(t) = f(\lfloor t \rfloor)$$

wobei $\lfloor t \rfloor$ den Wert von t abgerundet auf die nächste ganze Zahl bedeutet. Somit ist $g(t)$ eine Stufenfunktion, d.h.

$$g(t) = \begin{cases} f_0 & \text{falls } 0 \le t < 1 \\ f_1 & \text{falls } 1 \le t < 2 \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

bzw.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, r_k(t)$$

wobei

$$r_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \le t < k+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $g(t)$ in Abhängigkeit der Abtastwerte f_k.
- Sowohl $G(s)$ als auch $F(z)$ sind Laplace Transformierte von $f(t)$ nach einer Abtastung. Bei $G(s)$ wurde die Abtastung durch einen Sample and Hold Verstärker gemacht, bei $F(z)$ durch Multiplikation mit der Kammfunktion $p(t)$. Tatsächlich unterscheiden sich $G(s)$ und $F(z)$ nur um einen Faktor. Berechnen Sie diesen.
- Durch welche Operation im Zeitbereich unterscheiden sich folglich $f(t)p(t)$ und $g(t)$?

Lösung von Aufgabe 7. Laplace Transformierte von $r_0(t)$.

$$\begin{aligned} r_0(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty r_0(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

Laplace Transformierte von $r_k(t)$ mit dem Verschiebungssatz.

$$\begin{aligned} r_k(t) &= r_0(t-k) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-sk}\frac{1-e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Laplace Transformierte von $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k r_k(t) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-sk}\frac{1-e^{-s}}{s} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-sk} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}F(z) \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$G(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}F(z).$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{-s}}{s} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; r_0(t) \\ F(z) &\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)p(t) \end{aligned}$$

gilt somit

$$g(t) = r_0(t) * (f(t)p(t))$$

Aufgabe 8. Sei

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k 2^k \\ g_k &= \sigma_k (-1)^k. \end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$(f * g)_k.$$

Lösung von Aufgabe 8. Man kann die Faltung im Zeitbereich berechnen oder mit dem Faltungssatz und z-Transformation.

- Lösung im Zeitbereich.

$$\begin{aligned} (f * g)_k &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell} \\ &= \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell (-1)^{k-\ell} \\ &= \sigma_k (-1)^k \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell (-1)^{-\ell} \\ &= \sigma_k (-1)^k \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{2}{-1}\right)^\ell \\ &= \sigma_k (-1)^k \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} (-2)^\ell}_{S}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} S &= (-2)^0 + (-2)^1 + \ldots (-2)^k \\ (-2)S &= (-2)^1 + (-2)^2 + \ldots (-2)^{k+1} \\ S - (-2)S &= (-2^0) - (-2)^{k+1} \\ 3S &= 1 - (-2)(-2)^k \\ S &= \frac{1}{3}(1 + 2(-2)^k). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (f * g)_k &= \frac{1}{3}\sigma_k (-1)^k (1 + 2(-2)^k) \\ &= \frac{1}{3}\sigma_k \big((-1)^k + 2(-1)^k(-2)^k\big) \\ &= \frac{1}{3}\sigma_k \big((-1)^k + 2(2^k)\big) \\ &= \frac{1}{3}\sigma_k \big((-1)^k + 2^{k+1}\big) \end{aligned}$$

- Lösung mit z-Transformation.

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z}{z-2} \\
G(z) &= \frac{z}{z+1}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
F(z)G(z) &= \frac{z^2}{(z-2)(z+1)} \\
&= \frac{z^2}{z^2-z-2}
\end{aligned}
$$

Polynomdivision ergibt

$$
F(z)G(z) = 1 + \frac{z+2}{(z-2)(z+1)}.
$$

Partialbruchzerlegung des gebrochenen Rests.

$$
\begin{aligned}
\frac{z+2}{(z-2)(z+1)} &= \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z+1} \\
z+2 &= c_1(z+1) + c_2(z-2).
\end{aligned}
$$

Spezialfall $z = 2$.

$$
\begin{aligned}
4 &= 3c_1 \\
c_1 &= 4/3
\end{aligned}
$$

Spezialfall $z = -1$

$$
\begin{aligned}
1 &= -3c_2 \\
c_2 &= -1/3
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\frac{z+2}{(z-2)(z+1)} &= \frac{4/3}{z-2} - \frac{1/3}{z+1} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{4}{3}\sigma_{k-1}2^{k-1} - \frac{1}{3}\sigma_{k-1}(-1)^{k-1} \\
&= \sigma_{k-1}\left(\frac{2}{3}2^k + \frac{1}{3}(-1)^k\right) \\
&= \sigma_k\left(\frac{2}{3}2^k + \frac{1}{3}(-1)^k\right) - \delta_k
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist somit

$$
\begin{aligned}
(f*g)_k &= \delta_k + \sigma_k\left(\frac{2}{3}2^k + \frac{1}{3}(-1)^k\right) - \delta_k \\
&= \sigma_k\left(\frac{2}{3}2^k + \frac{1}{3}(-1)^k\right) \\
&= \frac{1}{3}\sigma_k\big(2^{k+1} + (-1)^k\big).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. Seien $f(t), g(t)$ zwei T-periodische Funktionen mit gegebenen Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ und $z_k^{(g)}$. Berechnen Sie hieraus die Fourier Koeffizienten von $f(t)g(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis und zeigen Sie, dass hierbei eine diskrete Faltung auftritt.

Lösung von Aufgabe 9. Sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(t)g(t) &= f(t) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z_\ell^{(g)} e^{j\ell\omega t} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(t) z_\ell^{(g)} e^{j\ell\omega t} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k^{(f)} e^{jk\omega t} \right) z_\ell^{(g)} e^{j\ell\omega t} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{j(k+\ell)\omega t} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty+\ell}^{\infty+\ell} z_{k-\ell}^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{jk\omega t} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{k-\ell}^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{jk\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z_{k-\ell}^{(f)} z_\ell^{(g)} e^{jk\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z_{k-\ell}^{(f)} z_\ell^{(g)} \right)}_{z_k^{(fg)}} e^{jk\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k^{(fg)} e^{jk\omega t}.
\end{aligned}$$

Die Fourier Koeffizienten von $f(t)g(t)$ sind somit

$$\begin{aligned}
z_k^{(fg)} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z_{k-\ell}^{(f)} z_\ell^{(g)} \\
&= (z^{(f)} * z^{(g)})_k.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann auch S' mit

$$S'(f) = S(f)_{\cdot-3}$$

ein LTI System ist.

Lösung von Aufgabe 10. Das System T mit

$$T(f) \quad = \quad f_{.-3}$$

ist LTI. Die Impulsantwort ist $\delta_{.-3}$.
Damit ist

$$S'(f) \quad = \quad T(S(f)).$$

Da die Komposition von LTI Systemen wieder LTI ist, ist S' LTI.

Aufgabe 11. Ein Übertragungskanal mit Impulsantwort

$$g_k \quad = \quad \delta_k + a\delta_{k-1}$$

soll durch einen nachgeschalteten, rekursiven Filter mit Impulsantwort h_k kompensiert werden. Es soll also

$$(g * h)_k \quad = \quad \delta_k$$

gelten. Berechnen Sie h_k. Für welche Werte von a ist der Kompensator stabil? Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Kompensators.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned} G(z) &= 1 + az^{-1} \\ H(z) &= \frac{1}{1 + az^{-1}} = \frac{z}{z + a} = \frac{z}{z - (-a)} \\ h_k &= \sigma_k(-a)^k. \end{aligned}$$

$H(z)$ hat einen Pol bei $z = -a$. Damit ist der Kompensator stabil falls

$$|-a| < 1 \text{ bzw. } |a| < 1.$$

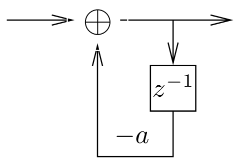
Die Übertragungsfunktion eines rekursiven Filters hat die Form

$$G(z) \quad = \quad \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots}$$

Für den Kompensator ist somit

$$b_0 = 1, \quad a_1 = -a.$$

Alle anderen Koeffizienten sind 0.



Aufgabe 12. Elektronische Musikinstrumente müssen Schwingungen mit beliebiger Frequenz ω erzeugen, d.h. Abtastwerte

$$g_k = \cos(\omega k \Delta t)$$

berechnen, wobei Δt das Abtastinterval ist. Nun ist die Berechnung der Cosinusfunktion sehr teuer und soll optimiert werden.

Die Idee ist, einen rekursiven Filter zu entwerfen (der ja nur Multiplikationen und Additionen erfordert), dessen Impulsantwort genau g_k ist. Man muss in diesen Filter dann nur noch δ_k eingeben und erhält am Ausgang die gewünschte Cosinus Schwingung.

Berechnen Sie die Koeffizienten dieses Filters und stellen Sie ihn als Blockschaltbild dar. Wie viele Multiplikationen und Additionen sind pro Abtastwert zur Berechnung der Impulsantwort dieses Filters erforderlich?

Ist der Filter stabil?

Hinweis: Berechnen Sie die z-Transformierte $G(z)$ von g_k. Stellen Sie diese als rationale Funktion in z^{-1} dar. Die Filterkoeffizienten müssen Sie dann nur noch ablesen.

Lösung von Aufgabe 12. Zunächst wird die Cosinusfunktion durch komplexe e-Funktionen ersetzt.

$$\begin{aligned} g_k &= \cos(\omega k \Delta t) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega k \Delta t} + e^{-j\omega k \Delta t}\right). \end{aligned}$$

Mit

$$a = e^{j\omega \Delta t}$$

gilt

$$g_k = \frac{1}{2}\left(a^k + \overline{a}^k\right)$$

Mit

$$a^k \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-a}$$

gilt

$$\begin{aligned} g_k \circ\!\!-\!\!\bullet\ & \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-\overline{a}}\right) \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{z(z-\overline{a}) + z(z-a)}{(z-a)(z-\overline{a})} \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{z(2z-(a+\overline{a}))}{z^2 - z(a+\overline{a}) + a\overline{a}}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} a\overline{a} &= |a|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a+\overline{a}) &= 2\mathrm{re}(a)\\ &= 2\underbrace{\cos(\omega\Delta t)}_{c}\end{aligned}$$

gilt weiter

$$\begin{aligned}g_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{2}\frac{z(2z-2c)}{z^2-2cz+1}\\ = \quad & \frac{z^2-cz}{z^2-2cz+1}\\ = \quad & \frac{1-cz^{-1}}{1-2cz^{-1}+z^{-2}}\end{aligned}$$

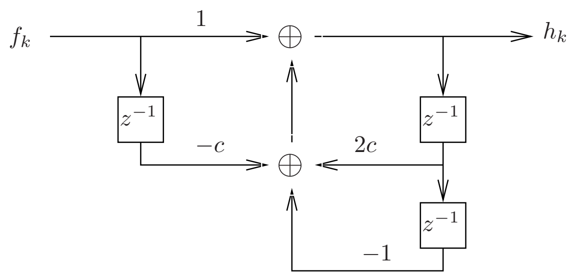
Die Filterkoeffizienten im Vorwärzzweig sind somit

$$\langle 1, -c\rangle$$

die Koeffizienten im rekursiven Zweig sind

$$\langle 1, 2c, -1\rangle.$$

Der rekursive Filter sieht wie folgt aus:



Es gilt

$$h_k \quad = \quad f_k - cf_{k-1} + 2ch_{k-1} - h_{k-2}.$$

Um die Impulsantwort g_k zu berechnen, sei $f_k = \delta_k$. Da $f_k = 0$ für $k > 0$ und $f_{k-1} = 0$ für $k > 1$, vereinfacht sich die Formel zu

$$g_k \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0\\ c & \text{falls } k = 1\\ 2cg_{k-1} - g_{k-2} & \text{falls } k > 1\end{cases}$$

Da der Wert von $2c$ vorab berechnet werden kann, ist pro Abtastwert nur eine Multiplikation und eine Addition erforderlich.

Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ist

$$z^2 - 2cz + 1$$

und hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2c \pm \sqrt{4c^2-4}}{2} \\ &= \frac{2c \pm 2\sqrt{c^2-1}}{2} \\ &= c \pm \sqrt{c^2-1}. \end{aligned}$$

Da $|c| \leq 1$ erhält man für $|c| < 1$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar bzw. im Ausnahmefall $c = 1$ eine doppelte reelle Nullstelle bei

$$c + j\sqrt{1-c^2}$$

mit dem Betrag

$$c^2 + (1-c^2) \quad = \quad 1.$$

Der Filter ist somit nicht stabil.

Aufgabe 13. Für ein lineares, zeitinvariantes System gelte folgender Zusammenhang zwischen Eingabefolge f_k und Ausgabefolge h_k:

$$h_k + h_{k-1} \quad = \quad 2f_k + f_{k-1} - f_{k-2}.$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und die Impulsantwort g_k des Systems. Sie dürfen davon ausgehen, dass f und h eine z-Transformierte haben. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 13. Sei

$$\begin{aligned} h_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ H(z) \\ f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H(z) + z^{-1}H(z) &= 2F(z) + z^{-1}F(z) - z^{-2}F(z) \\ H(z)(1+z^{-1}) &= F(z)(2 + z^{-1} - z^{-2}) \\ H(z) &= F(z)\frac{2+z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{H(z)}{F(z)} \\ &= \frac{2+z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}} \\ &= \frac{2z^2+z-1}{z^2+z} \\ &= 2 + \frac{-z-1}{z^2+z} \\ &= 2 - \frac{z+1}{z(z+1)} \\ &= 2 - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt die Impulsantwort

$$g_k \quad = \quad 2\delta_k - \delta_{k-1}.$$

Aufgabe 14. Gegeben sei ein lineares System, das eine Eingangsfolge f_k in eine Ausgangsfolge h_k transformiert nach der Formel

$$h_k = 2f_k + f_{k-1} + 3f_{k-2} + 2h_{k-1}.$$

- Sei $f_k = \delta_k$ der Dirac Impuls. Berechnen Sie h_k unter der Annahme, dass $h_k = 0$ für $k < 0$.
- Schreiben Sie die o.g. Formel so um, dass Sie sie kompakt mit Faltungen beschreiben können, d.h. finden Sie Folgen a_k und b_k so dass

$$(h * a)_k = (f * b)_k.$$

- Verwenden Sie den Faltungssatz der z-Transformation um die Übertragungsfunktion des Systems zu berechnen, d.h. finden Sie eine Funktion $G(z)$ so dass

$$H(z) = F(z)G(z).$$

- Versuchen Sie, $G(z)$ in den Zeitbereich zurückzutransformieren. Probieren Sie's mit Polynomdivision und Partialbruchzerlegung und den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_{k-1} \\ \frac{1}{z-2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2^{k-1}\sigma_{k-1} \\ 1 &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k. \end{aligned}$$

  Es muss dabei die Impulsantwort des Systems herauskommen, d.h. die in der ersten Teilaufgabe berechnete Folge h_k, wenn die Eingabefolge der Dirac Impuls war.

Lösung von Aufgabe 14. Für $f_k = \delta_k$ erhält man durch Einsetzen der Zahlen in die Formel

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \\ h_1 &= 1 + 4 \ = \ 5 \\ h_2 &= 3 + 10 \ = \ 13 \\ h_3 &= 26 \\ h_4 &= 52 \\ h_5 &= 104 \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} h_k - 2h_{k-1} &= 2f_k + f_{k-1} + 3f_{k-2} \\ (h * a)_k &= (f * b)_k \end{aligned}$$

für

$$
\begin{aligned}
a &= \langle 1, -2 \rangle \\
b &= \langle 2, 1, 3 \rangle
\end{aligned}
$$

Aus dem Faltungssatz folgt

$$
\begin{aligned}
H(z)A(z) &= F(z)B(z) \\
H(z) &= F(z)\frac{B(z)}{A(z)} \\
&= F(z)G(z)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A(z) &= 1 - 2z^{-1} \\
B(z) &= 2 + z^{-1} + 3z^{-2} \\
G(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\
&= \frac{2 + z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 2z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit z^2 ergibt

$$
G(z) = \frac{2z^2 + z + 3}{z^2 - 2z}
$$

Polynomdivision

$$
\frac{2z^2 + z + 3}{z^2 - 2z} = 2 + \frac{5z + 3}{z(z-2)}
$$

Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Teils

$$
\begin{aligned}
\frac{5z + 3}{z(z-2)} &= \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-2} \\
c_1 &= -3/2 \\
c_2 &= 13/2 \\
G(z) &= 2 - \frac{3}{2z} + \frac{13}{2(z-2)}
\end{aligned}
$$

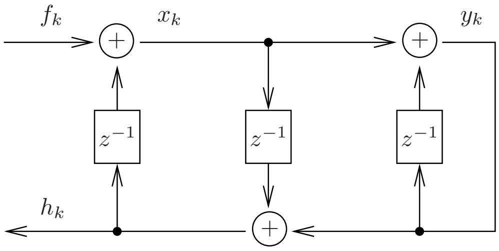
Aus den Korrespondenzen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \delta_{k-1} \\
\frac{1}{z-2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\ 2^{k-1}\sigma_{k-1} \\
1 &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \delta_k
\end{aligned}
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
G(z) &\bullet\!\!-\!\!\circ\ 2\delta_k - \frac{3}{2}\delta_{k-1} + \frac{13}{2}2^{k-1}\sigma_{k-1} \\
&= \left\langle 2,\ -\frac{3}{2} + \frac{13}{2},\ \frac{13}{2} \times 2,\ \frac{13}{2} \times 4, \ldots \right\rangle \\
&= \langle 2, 5, 13, 26, \ldots \rangle
\end{aligned}
$$

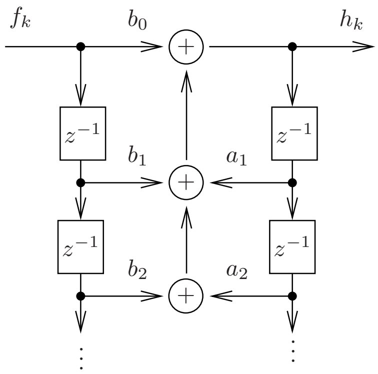
Aufgabe 15. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert wobei $f_k = h_k = 0$ für $k < 0$.



- Stellen Sie Differenzengleichungen unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort des Systems, indem Sie folgende Tabelle ausfüllen:

k	f_k	x_k	y_k	h_k
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems, indem Sie aus den Gleichungen im Bildbereich $X(z)$ und $Y(z)$ eliminieren.
- Berechnen Sie aus der Übertragungsfunktion die Koeffizienten a_k und b_k, so dass das System äquivalent ist zu folgendem Filter.



- Stellen Sie anhand dieses äquivalenten Systems eine Differenzengleichung auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort. Das Ergebnis muss gleich sein wie die oben berechnete Impulsantwort.

Lösung von Aufgabe 15. Differenzengleichungen.

$$\begin{aligned} x_k &= f_k + h_{k-1} \\ y_k &= x_k + y_{k-1} \\ h_k &= y_k + x_{k-1} \end{aligned}$$

Impulsantwort aus Differenzengleichungen.

k	f_k	$x_k =$ $f_k + h_{k-1}$	$y_k =$ $x_k + y_{k-1}$	$h_k =$ $y_k + x_{k-1}$
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	0	3	5	6
3	0	6	11	14
4	0	14	25	31

z-Transformation. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wirt (z) weggelassen und $w = z^{-1}$ abgekurzt.

$$\begin{aligned} X &= F + wH \\ Y &= X + wY \\ H &= Y + wX. \end{aligned}$$

Auflösen

$$\begin{aligned} X &= F + wH \\ Y(1-w) &= X \\ H &= Y + wX. \end{aligned}$$

Eliminieren von X.

$$\begin{aligned} Y(1-w) &= F + wH \\ H &= Y + wF + w^2 H \end{aligned}$$

Auflösen

$$\begin{aligned} Y &= \frac{F + wH}{1-w} \\ H(1-w^2) &= Y + wF \end{aligned}$$

Eliminieren von Y.

$$\begin{aligned} H(1-w^2) &= \frac{F + wH}{1-w} + wF \\ H(1-w^2)(1-w) &= F + wH + w(1-w)F \\ H(1-w-w^2+w^3) &= F(1+w-w^2) + wH \\ H(1-2w-w^2+w^3) &= F(1+w-w^2) \\ H &= F\frac{1+w-w^2}{1-2w-w^2+w^3} \\ &= F\frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}}.$$

Die Koeffizienten des rekursiven Filters sind

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= -1 \\
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 1 \\
a_3 &= -1.
\end{aligned}$$

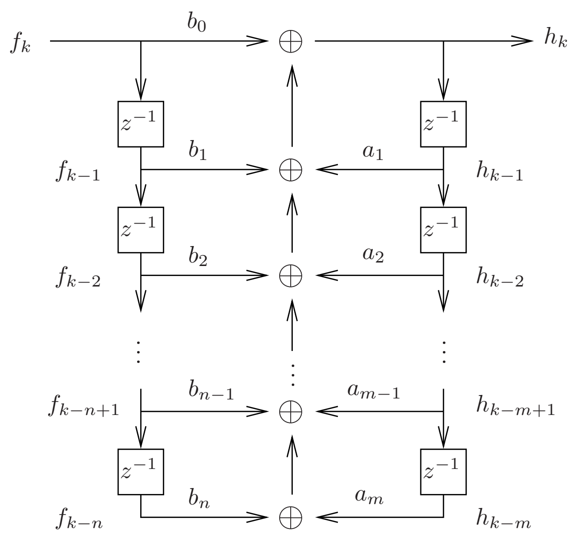
Die Differenzengleichung ist damit

$$h_k = f_k + f_{k-1} - f_{k-2} + 2h_{k-1} + h_{k-2} - h_{k-3}.$$

Die Impulsantwort ist damit

k	f_k	$h_k = f_k + f_{k-1} - f_{k-2} + 2h_{k-1} + h_{k-2} - h_{k-3}$
0	1	1
1	0	$1 + 2 = 3$
2	0	$-1 + 6 + 1 = 6$
3	0	$12 + 3 - 1 = 14$
4	0	$28 + 6 - 3 = 31$

Aufgabe 16. Ein rekursiver Filter mit n Verzögerungsgliedern im Vorwärtszweig und m im Rückwärtszweig hat folgende Struktur:



- Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Filters immer eine rationale Funktion in z ist, wobei der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist.
- Unter welcher Bedingung ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad?

- Da man keine Zeitmaschine bauen kann, ist intuitiv klar, dass der Filter kausal sein muss. Zeigen Sie, dass die inverse z-Transformierte g_k einer rationalen Funktion $G(z)$, deren Zählergrad kleinergleich ihrem Nennergrad ist, kausal ist. Hinweis: Partialbruchzerlegung.
- Unter welcher Bedingung ist der rekursiver Filter invertierbar, d.h. das inverse System mit Übertragungsfunktion $1/G(z)$ ebenfalls kausal?
- Falls das inverse System nicht kausal ist, kann man trotzdem einen kausalen, inversen Filter konstruieren, sofern man eine Verzögerung um u Takte akzeptiert. Berechnen Sie das kleinst mögliche u in Abhängigkeit der Filterkoeffizienten.

  Welche Verzögerung muss man folglich in der Akustik akzeptieren, wenn man durch einen Filter die Raumimpulsantwort herausrechnen möchte? Welche praktischen Probleme können trotzdem dabei entstehen?

Lösung von Aufgabe 16.

- Bei dem rekursiven Filter besteht folgender Zusammenhang zwischen Eingangssignal f und Ausgangssignal h für alle k:

  $$b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \ldots + b_n f_{k-n} + a_1 h_{k-1} + \ldots + a_m h_{k-m} \quad = \quad h_k$$

  bzw.

  $$b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \ldots + b_n f_{k-n} \quad = \quad h_k - a_1 h_{k-1} - \ldots - a_m h_{k-1}.$$

  Betrachtet man beide Seiten als Folgen von k, ergibt z-Transformation

  $$\begin{aligned} & b_0 F(z) + b_1 z^{-1} F(z) + \ldots + b_n z^{-n} F(z) \\ = \quad & H(z) - a_1 z^{-1} H(z) - \ldots - a_m z^{-m} H(z) \end{aligned}$$

  bzw.

  $$F(z)\big(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}\big) \;=\; H(z)\big(1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_m z^{-m}\big)$$

  Hieraus ergibt sich die Übertragungsfunktion des Filters

  $$G(z) \;=\; \frac{H(z)}{F(z)} \;=\; \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_m z^{-m}}.$$

  Um negative Exponenten von z zu eliminieren muss der Bruch mit z^ℓ erweitert werden, wobei

  $$\ell \;=\; \max(n, n).$$

  Man erhält

  $$G(z) \quad = \quad \frac{b_0 z^\ell + b_1 z^{\ell-1} + \ldots + b_n z^{\ell-n}}{z^\ell - a_1 z^{\ell-1} - \ldots - a_m z^{\ell-m}}.$$

  Damit hat das Nennerpolynom Grad ℓ und das Zählerpolynom einen Grad kleiner oder gleich ℓ.

- Falls $b_0 \neq 0$ sind Zählergrad und Nennergrad gleich ℓ.
- Falls $b_0 \neq 0$, d.h. Zählergrad gleich Nennergrad, ist auch $1/G(z)$ eine rationale Funktion, deren Zähler- und Nennergrad gleich ist, d.h.

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{z^\ell - a_1 z^{\ell-1} - \ldots - a_m z^{\ell-m}}{b_0 z^\ell + b_1 z^{\ell-1} + \ldots + b_n z^{\ell-n}}.$$

Durch Polynomdivision kann man ein Polynom vom Grad Null, d.h. eine Konstante c_0 abspalten. Den gebrochenen Rest kann man in Partialbrüche zerlegen. Sofern das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ hat, erhält man

$$\frac{1}{G(z)} = c_0 + \frac{c_1}{z-\gamma_1} + \ldots + \frac{c_\ell}{z-\gamma_\ell}.$$

Mit

$$\frac{c_i}{z-\gamma_i} = z^{-1} c_i \frac{z}{z-\gamma_i} \bullet\!\!-\!\!\circ\; c_i \sigma_{k-1} \gamma_i^{k-1}$$

hat die Impulsantwort des inversen Systems die Form

$$\frac{1}{G(z)} \bullet\!\!-\!\!\circ\; c_0 \delta_k + \sigma_{k-1}\big(c_1 \gamma_1^{k-1} + \ldots + c_\ell \gamma_\ell^{k-1}\big).$$

Diese ist Null für $k < 0$ und somit kausal.

Falls das Nennerpolynom mehrfache Nullstellen hat, tauchen in der Partialbruchzerlegung Terme der Form

$$\begin{aligned} \frac{c}{(z-\gamma)^p} &= c \frac{1}{z-\gamma} \frac{1}{z-\gamma} \cdots \frac{1}{z-\gamma} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\; c\big(\sigma_{k-1}\gamma^{k-1} * \sigma_{k-1}\gamma^{k-1} * \ldots * \sigma_{k-1}\gamma^{k-1}\big). \end{aligned}$$

auf. Da jeder Faktor der Faltung kausal ist, ist auch das Faltungsprodukt kausal und somit ändern mehrfache Nullstellen des Nennerpolynoms nichts daran, dass die Impulsantwort kausal ist.
- Wenn $b_0 \neq 0$ ist, ist das inverse System nicht kausal. Sei allgemein $u > 0$ so dass

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{u-1} = 0 \text{ und } b_u \neq 0.$$

Dann hat $G(z)$ Zählergrad $\ell - u$ und Nennergrad ℓ. Folglich hat die Übertragungsfunktion des inversen Systems $1/G(z)$ Zählergrad ℓ und Nennergrad $\ell - u$. Durch Polynomdivision kann man von $1/G(z)$ einen ganzrationalen Teil vom Grad u abspalten, dessen inverse z-Transformierte eine nicht-kausale Folge ergibt.

Andererseits ist

$$z^{-u} \frac{1}{G(z)} = \frac{z^{\ell-u} - a_1 z^{\ell-u-1} + \ldots + a_m z^{\ell-u-m}}{b_u z^{\ell-u} + b_{u+1} z^{\ell-u-1} + \ldots + b_n z^{\ell-u-n}}$$

eine rationale Funktion, deren Zähler- und Nennergrad gleich sind. Das System mit Übertragungsfunktion $z^{-u}/G(z)$ ist folglich kausal und unterscheidet sich vom inversen System von $G(z)$ nur durch eine Verzögerung um u Takte. Akzeptiert man also eine Verzögerung um u Takte, kann man das System invertieren.

Die Anzahl u von Takten entspricht in der Akustik der Zeit, die es dauert, bis "etwas" vom Sendersignal beim Empfänger angekommen ist, d.h. der Laufzeit vom Sender zum Empfänger. Dies ist auch intuitiv klar, denn um eine reine Laufzeitverzögerung zu kompensieren, müsste man in die Zukunft sehen können.

Trotzdem ist eine Kompensation praktisch schwierig, da das inverse System nur dann stabil ist, wenn für alle γ_i gilt

$$|\gamma_i| \quad < \quad 1.$$