Heilbronn, den 10.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 1

Zu bearbeiten bis 17.3.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Aufgabe 1. Sei A eine Matrix und

$$M = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Schreiben Sie zuerst auf, was Sie zeigen müssen. Sie dürfen alle Gesetze der Matrix Arithmetik verwenden, es muss aber ersichtlich sein, wo Sie diese benutzen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t\pi^t + 5e^{2t}}{7e^{2t}}.$$

Aufgabe 3. Nennen Sie vier äquivalente Bedingungen dafür, dass die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - y \\ x \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix A so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entscheiden Sie von beiden Linearitätsbedingungen, ob f sie erfüllt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y' - 2y = 4x.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' - y = 5.$$

Hinweis:

$$\cos(2\pi/3) = -1/2$$
$$\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Faltung $(f * g)(t)$ für

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g(t) &= \cos(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e-Funktionen dar.

Aufgabe 10. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $f'(t)$. Hinweis: Stellen Sie $f(t)$ als Summe zweier Sprungfunktionen dar, deren Ableitungen Dirac Impulse sind.
- Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(t)$ und von $f'(t)$ und verifizieren Sie damit, dass

  $$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega F(\omega).$$

Aufgabe 11. Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(t)$.
- Sei nun

  $$g(t) = tf(t).$$

  Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $g(t)$. Hinweis: In der Formelsammlung findet man die Korrespondenz

  $$(-jt)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F'(\omega).$$

  Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 12. Sei

$$f(t) = t^3 e^{-(t^2)}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(F(\omega))$.

Aufgabe 13. Seien f, g Funktionen, für die eine Fourier Transformierte existiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Rechengesetze der Fourier Transformation, dass

$$f' * g = f * g'.$$

Der Beweis ist sehr kurz.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Hierbei ist $\sigma(t)$ die Heavisidesche Sprungfunktion. Berechnen Sie dann die Fourier Transformierte von

$$\sigma(t-1)e^{-t+1}$$

und von

$$\sigma(t)e^{-t}\cos(t).$$

Hinweis: Nutzen Sie im ersten Fall den Zeitverschiebungssatz und im zweiten Fall die Modulation.

Aufgabe 15. Aus der Korrespondenz der Fourier Transformation

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega F(\omega)$$

und

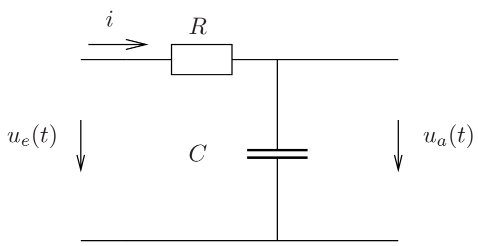
$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

folgt

$$\delta'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega.$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $\delta'(t)$ "zu Fuß", d.h. ohne Verwendung dieser Korrespondenz mit partieller Integration und Ausblendeigenschaft.

Aufgabe 16. Gegeben sei nachfolgende RC-Schaltung:



- Zeigen Sie mit Hilfe der Gesetze der komplexen Wechselstromrechnung, dass

  $$U_a(\omega) \quad = \quad \frac{1}{j\omega RC + 1} U_e(\omega).$$

  Hierbei sind $U_e(\omega)$ und $U_a(\omega)$ die Fourier Transformierten von $u_e(t)$ und $u_a(t)$. Diese können als komplexe Zeiger interpretiert werden, die zu der Schwingungskomponente mit Kreisfrequenz ω gehören.
- Zeigen Sie, dass für beliebiges $a < 0$ gilt

  $$\sigma(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega - a}.$$

- Berechnen Sie hiermit und mit Hilfe des Faltungssatzes der Fourier Transformation die Impulsantwort dieses Systems, d.h. die Funktion $g(t)$ so dass

$$u_a(t) \quad = \quad (g * u_e)(t).$$

- Sei

$$u_e(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Berechnen Sie $u_a(t)$ durch Faltung. Hinweis: Sie müssen hier die Fälle $t < 0$, $t > 1$ und $0 \le t \le 1$ unterscheiden.

Aufgabe 17.

- Zeigen Sie dass allgemein gilt

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega).$$

- Sei $a > 0$ und

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(t)$.

- Berechnen Sie hieraus die Fourier Transformierte von $f(-t)$.
- Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(|t|)$. Das ist nicht weiter schwierig, da für die vorliegende Funktion $f(t)$ gilt

$$f(|t|) = f(t) + f(-t).$$

Aufgabe 18. Zeigen Sie den Faltungssatz der Fourier Transformation, d.h.

$$(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega).$$

Aufgabe 19. Die Tiefpass Filterung eines Signals $f(t)$ ist mit der Fourier Transformation sehr einfach: Man berechnet die Fourier Transformierte $F(\omega)$ und setzt diese auf Null für alle ω mit $|\omega| > \hat{\omega}$, wobei $\hat{\omega}$ die Cutoff Frequenz des Filters ist. Damit erhält man die Fourier Transformierte

$$G(\omega) \quad = \quad \begin{cases} F(\omega) & \text{falls } |\omega| \le \hat{\omega} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die Rücktransformation von $G(\omega)$ liefert das Tiefpass gefilterte Signal $g(t)$. Berechnen Sie die Tiefpass Filterung von $f(t) = \delta(t)$ und für $f(t) = \cos(t)$ für beliebige Cutoff Frequenz $\hat{\omega}$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine komplexen Zahlen darin auftreten.