Übungen zu Mathematik 3

Blatt 10

Zu bearbeiten bis 19.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 2y' + 5y \quad = \quad \cos(2x).$$

Aufgabe 2. Die Übertragungsfunktion $G(z)$ eines rekursiven Filters habe einen reellen Pol bei $z = 0$, ein konjugiert komplexes Polpaar bei $z = \pm j$ und sonst keine weiteren Nullstellen oder Pole. Berechnen Sie seine Impulsantwort und die Filterkoeffizienten b_i, a_i. (Der Verstärkungsfaktor des Filters sei 1.)

Aufgabe 3. Das Ausgangssignal h_k eines digitalen Filters sei der Mittelwert von zwei aufeinanderfolgenden Abtastwerten des Eingangssiganals f_k, d.h.

$$h_k \quad = \quad \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1}).$$

Offensichtlich wird durch diesen Filter das Signal f_k geglättet, d.h. der Filter hat Tiefpasscharakteristik. Sei nun

$$f_k \quad = \quad e^{j\hat{\omega}k}$$

eine komplexe Schwingung mit normierter Frequenz $0 \leq \hat{\omega} < \pi$.

- Zeigen Sie, dass h_k eine komplexe Schwingung ist mit gleicher Frequenz $\hat{\omega}$ und berechnen Sie den Faktor $K(\hat{\omega})$ so dass

  $$h_k \quad = \quad K(\hat{\omega})f_k.$$

  Dieser Faktor heißt Frequenzantwort des Filters. Berechen Sie diesen Faktor sowohl im Zeitbereich als auch mit Hilfe der z-Transformation und der Übertragungsfunktion des Filters.

- Zeigen Sie, dass $|K(\hat{\omega})|^2$ monoton fallend ist für $0 \leq \hat{\omega} < \pi$. Die Tiefpasscharakteristik zeigt sich somit darin, dass hohe Frequenzen stärker gedämpft werden als niedrige.

Aufgabe 4. Das Verhalten eines LTI Systems S ist besonders interessant, wenn das Eingangssignal f eine harmonische Schwingung ist. In diesem Fall ist das Ausgangssignal $S(f)$ ebenfalls eine harmonische Schwingung und zwar mit gleicher Frequenz wie f. Das System ändert allenfalls die Amplitude und die Phase.

Praktisch lässt sich dies am Beispiel der Raumakustik leicht sehen: Strahlt der Sender einen 900Hz Ton ab, kommt auch beim Empfänger ein 900Hz Ton an. Bei der Übertragung durch den Raum ändert sich die Tonhöhe nicht. Lediglich bei sehr hoher Amplitude kann es sein, dass ein Fenster zerbricht und klirrt – das ist dann allerdings ein nichtlinearer Effekt.

Berechnet werden soll nun die Amplituden- und Phasenänderung in Abhängigkeit von der Frequenz ω durch das System sowohl im analogen als auch im diskreten Fall.

- Sei S ein analoges LTI System mit Impulsantwort $g(t)$ und

  $$f(t) \quad = \quad e^{j\omega t}.$$

  Zeigen Sie, dass

  $$\left[S(f)\right](t) \quad = \quad z(\omega) f(t)$$

  wobei $z(\omega)$ eine Konstante, d.h. von t unabhängig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $z(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems ist, d.h.

  $$z(\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt.$$

- Sei S ein diskretes LTI Sytem mit Impulsantwort g_k und

  $$f_k \quad = \quad e^{j\omega k}.$$

  Zeigen Sie, dass

  $$\left[S(f)\right]_k \quad = \quad z(\omega) f_k$$

  wobei $z(\omega)$ eine Konstante, d.h. von k unabhängig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $z(\omega)$ die sog. zeitdiskrete Fourier Transformierte der Impulsantwort g_k des Systems ist, d.h.

  $$z(\omega) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-j\omega k}.$$

  Zeigen Sie, dass

  $$z(\omega) \quad = \quad G(e^{j\omega})$$

  gilt, wobei $G(z)$ die z-Transformierte der Impulsantwort g_k ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

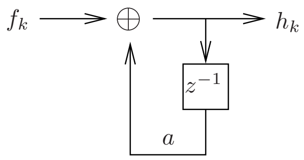
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

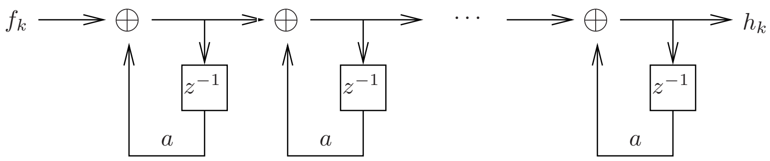
$$\binom{n-1}{k-1}\frac{n-k}{k} = \binom{n-1}{k}.$$

Aufgabe 7.

- Berechnen Sie von folgendem Filter die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort.



- Der Filter wird nun zwei Mal hintereinandergeschaltet. Berechnen Sie dessen Impulsantwort, indem sie die oben berechnete Impulsantwort mit sich selbst falten.
- Der Filter wird nun n-Mal hintereinandergeschaltet:



  Berechnen Sie mit Hilfe der oben berechneten Übertragungsfunktion auch von diesem Filter die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort. Nutzen Sie für die inverse z-Transformation die Korrespondenz

$$\frac{1}{(z-a)^n} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad a^{k-n}\binom{k-1}{n-1}$$

  sowie den Verschiebungssatz

$$z^{-m}F(z) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_{k-m},$$

  der hier für negative m angwandt werden muss.

  Verfizieren Sie die so berechnete Impulsantwort für beliebiges n mit der in den vorigen Teilaufgaben berechneten Impulsantwort im Spezialfall $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 8. Bei einem rekursiven Filter kann es vorkommen, dass sich das System aufgrund der Rückkopplung "aufschwingt". Dieses Verhalten ist natürlich nicht erwünscht.

Berechnen Sie die Impulsantworten g_k der folgenden Systeme für $k = 0, 1, \ldots, 8$:

$$\begin{aligned} h_k &= f_k + h_{k-1} + h_{k-2} \\ h_k &= f_k + h_{k-1} - h_{k-2} \\ h_k &= f_k + h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-2} \end{aligned}$$

Sei nun allgemein ein System mit Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

gegeben wobei der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Weiterhin sei vereinfachend angenommen, dass das Nennerpolynom nur einfache (komplexe) Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat. Damit erhält man die Partialbruchzerlegung

$$G(z) = c_1 \frac{1}{z - \alpha_1} + c_2 \frac{1}{z - \alpha_2} + \ldots + c_n \frac{1}{z - \alpha_n}.$$

Berechnen Sie hieraus die Impulsantwort g_k und zeigen Sie, dass

$$\lim_{k \to \infty} g_k = 0$$

genau dann wenn $|\alpha_i| < 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion müssen also innerhalb des Einheitskreises in der komplexen Ebene liegen. Systeme mit dieser Eigenschaft nennt man stabil.

Prüfen Sie dann von den 3 o.g. Systemen, ob diese stabil sind.

Aufgabe 9. Für $n, k \in \mathbb{Z}$ sind die Binomialkoeffizienten definiert durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter anderem treten diese Koeffizienten bei den Binomischen Formeln auf:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Interessanterweise treten diese auch bei der Verallgemeinerung der Produktregel auf höhere Ableitungen auf:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

- Verifizieren Sie dies für $n = 1, 2, 3$.
- Berechnen Sie die 100-ste Ableitung von $x^2 \sin(x)$.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad = \quad \binom{n+1}{k}.$$

Dies ist übrigens genau das Gesetz, nachdem das Pascal Dreieck konstruiert wird, wobei n die Zeile und k die Spalte ist.

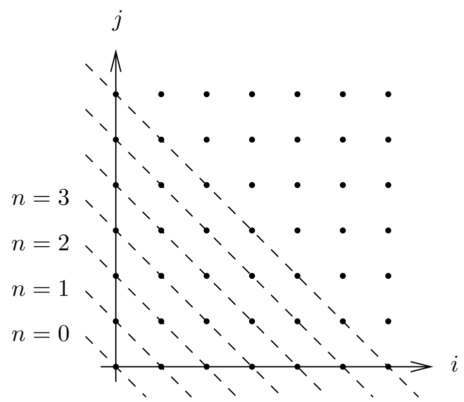
Aufgabe 11. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$e^x e^y \quad = \quad e^{x+y}.$$

Mit der Taylor Reihe der e-Funktion gilt

$$e^x e^y \quad = \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Anstatt zeilenweise über alle Punkte $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ zu summieren, kann man dies auch in Diagonalen tun:



Man erhält damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=n}}^{\infty} \frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Die inneren Summe läuft über eine Diagonale, d.h. alle Punkte $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ mit

$$i + j \quad = \quad n$$

bzw.

$$j \quad = \quad n - i.$$

Beachten Sie, dass diese Diagonale nur $n+1$ Punkte enthält.

Formen Sie diesen Term unter Verwendung der allgemeinen Binomischen Formel

$$(x+y)^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

weiter um bis Sie die Taylor Reihe von e^{x+y} erhalten.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^{k} f_\ell \quad = \quad (f * \sigma)_k.$$

Aufgabe 13. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Zeigen Sie durch Induktion über k, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} \quad = \quad \binom{k+n+1}{n+1}$$

Aufgabe 14. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1\text{mal}})_k \quad = \quad \binom{k+n}{n}.$$

Führen Sie den Beweis einmal mit z-Transformation unter Verwendung des Faltungssatzes, des Verschiebungssatzes und der Korrespondenz

$$a^{k-n}\binom{k-1}{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(z-a)^n}$$

und einmal mit Induktion. Sie dürfen hierbei die Formel

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n}{n} \quad = \quad \binom{k+n+1}{n+1}$$

verwenden.

Aufgabe 15. Eine einfache Möglichkeit, ein Signal f_k zu glätten besteht durch rekursive Filterung mit

$$h_k \quad = \quad \alpha h_{k-1} + (1-\alpha) f_k.$$

Betrachtet man Werte für α zwischen Null und Eins, ist anschaulich klar, dass ein großer Wert von α zu einer stärkeren Glättung führt als ein kleinerer. Die Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ sind uninteressant und können ausgeschlossen werden.

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Filters.
- Für welche Werte von α ist der Filter stabil?
- Berechnen Sie die Frequenzantwort $G(e^{j\hat{\omega}})$. Hierbei ist

  $$\hat{\omega} \quad = \quad 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

  wobei ω_s die Abtastfrequenz und ω die Signalfrequenz ist. Aufgrund des Abtasttheorems ist somit

  $$-\pi < \hat{\omega} < \pi.$$

- Berechnen Sie den quadrierten Amplitudengang

$$u(\hat{\omega}) \quad = \quad |G(e^{j\hat{\omega}})|^2$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

- Der Faktor $u(\hat{\omega})$ gibt an, wie stark eine Schwingung mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ von dem Filter verstärkt wird. Der Filter hat Tiefpasscharakteristik, wenn $u(\hat{\omega})$ fällt für $0 \leq \hat{\omega} < \pi$ und Hochpasscharakteristik, wenn $u(\hat{\omega})$ steigt. Für welche Werte von α hat der Filter Tiefpass- bzw. Hochpasscharakteristik?

Aufgabe 16. Gegeben ist ein digitaler Filter mit Impulsantwort

$$g_k \quad = \quad \delta_k + \delta_{k-2}.$$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Filters.
- Ist der Filter kausal? Ist der Filter stabil?
- Mit welchem Faktor verstärkt dieser Filter die Amplitude einer komplexen Schwingung mit normierter Kreisfrequenz $\hat{\omega} = \pi/2$ bzw. $\hat{\omega} = 0$?
- Um welchen Winkel verschiebt der Filter die Phase eine Schwingung mit normierter Kreisfrequenz $\hat{\omega} = \pi/4$?

Aufgabe 17. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k \quad = \quad \sigma_{k-1}\, 4^{-k}\, k^2.$$

Aufgabe 18. Berechnnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad \delta(t-1), \qquad f(0) = 5$$

mit Hilfe der Laplace Transformation für $t \geq 0$. Hat die Lösungsfunktion an der Stelle $t = 0$ einen Sprung? Setzen Sie Ihre Lösungsfunktion in die DGL ein und verifzieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 19. Sei

$$p(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$$

ein Impulszug. Da $p(t)$ periodisch ist, kann er durch eine Fourier Reihe dargestellt werden. Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k und zeigen Sie damit, dass

$$p(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jkt}.$$

Zeigen Sie mit dem Dämpfungssatz der Laplace Transformation, dass

$$f(t)p(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - 2\pi jk).$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.