

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 11

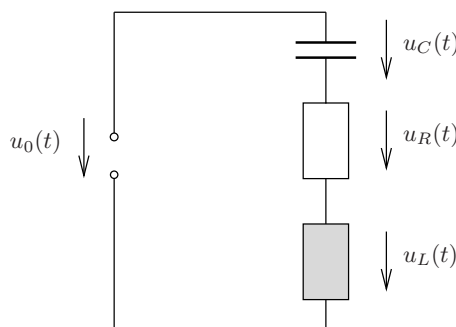
Zu bearbeiten bis 26.5.2025

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R , einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$. Die Eingangsspannung sei

$$u_0(t) = \cos(\omega t).$$

Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für $q(t)$ in Abhängigkeit von ω . Warum tritt bei diesem System nie Resonanz auf?

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

ist ein Vektorraum. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

Aufgabe 3. Sei g eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $f * g$ eine T -periodische Funktion ist für beliebiges f .

Wenn man sich f als akustisches Signal und g als Raumimpulsantwort vorstellt, ist anschaulich klar, dass wenn der Sender ein periodisches Signal abschickt, beim Empfänger ebenfalls ein periodisches Signal mit gleicher Periodendauer ankommen muss.

Aufgabe 4. Gegeben sei die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \dots + a_1h'(t) + a_0h(t) = f(t).$$

Es wird vorausgesetzt, dass $f(t)$ und $h(t)$ eine Laplace Transformierte haben. Weiterhin habe das charakteristische Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

lauter einfache Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Zeigen Sie, dass es dann Konstanten $c_1, \dots, c_n$ gibt so dass

$$h(t) = (f * g)(t)$$

mit

$$g(t) = \sigma(t) (c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + c_n e^{\alpha_n t}).$$

Aufgabe 5. Sei S ein diskretes System mit Eingangssignal f_k und Ausgangssignal h_k , das nichts anderes tut als den Ausgang mit n -Takten Verzögerung zum Eingang rückzukoppeln. Eine ähnliche Situation liegt z.B. bei akustischer Rückkopplung mit einem Mikrofon, Verstärker und Lautsprecher vor, was oft zu einem sehr lauten Pfeifton führt.

Es gilt somit

$$h_k = f_k + h_{k-n}.$$

Zeigen Sie, dass dieses System instabil ist. Berechnen Sie die tiefste normierte Frequenz $\hat{\omega} > 0$, die dieses System theoretisch unendlich verstärken würde.

Aufgabe 6. Sei

$$[S(f)]_k = kf_k + f_{k-1}.$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 7. Mit dem Faltungssatz der Laplace Transformation erhält man

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) \circ \bullet \frac{1}{s^n}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t)t^{n-1} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{(n-1)!}{s^n}.$$

Daraus folgt

$$\underbrace{(\sigma * \sigma * \dots * \sigma)}_{n \text{ Mal}}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sigma(t)t^{n-1}.$$

Beweisen Sie dies nun durch Induktion im Zeitbereich (d.h. ohne Laplace Transformation).

Aufgabe 8. Sei S ein LTI System mit Impulsantwort

$$g_k = \sigma_k a^k.$$

für eine reelle Konstante a . Berechnen Sie die Frequenzantwort $K(\hat{\omega})$ des Systems. Zeigen Sie, dass $|K(\hat{\omega})|^2$ im Bereich $0 < \hat{\omega} < \pi$ streng monoton fallend ist für $a > 0$ und streng monoton steigend ist für $a < 0$. Das System hat somit Tiefpass Charakteristik falls $a > 0$ und Hochpass Charakteristik falls $a < 0$.

Aufgabe 9. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und B die Matrix, die aus A entsteht, wenn man deren Zeilen vertauscht. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = -\det(A).$$

Zeigen Sie dann durch Induktion für jedes $n \geq 2$, dass wenn $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entsteht, indem zwei beliebige Zeilen von A vertauscht werden, gilt

$$\det(B) = -\det(A).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von B nach einer Zeile, die *nicht* vertauscht wurde.

Aufgabe 10. Nutzen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe um zu zeigen, dass die Determinante einer Matrix, in der zwei Zeilen identisch sind, Null ist.

Aufgabe 11. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wobei B identisch ist mit A außer der i -ten Zeile. Die i -te Zeile von B ist gleich der Summe aus i -ter und k -ter Zeile von A mit $i \neq k$. Für die i -te Zeile von B gilt also

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = \det(A).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von B nach der i -ten Zeile. Wenn Sie die dabei auftretende Summe in zwei Summen zerlegen, stoßen Sie auf die Determinante einer Matrix C , die identisch ist mit A bis auf die i -te Zeile. Die i -te Zeile von C ist gleich der k -ten Zeile von A , d.h.

$$c_{ij} = a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

In der Matrix C sind somit i -te und k -te Zeile gleich. Damit ist C singulär und $\det(C) = 0$.

Aufgabe 12. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wobei B identisch ist mit A bis auf die i -te Zeile. Die i -te Zeile von B ist gleich der i -ten Zeile von A plus u mal der k -ten Zeile von A mit $i \neq k$. Es gilt also

$$b_{ij} = a_{ij} + u a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = \det(A).$$

Sie müssen hierzu die Lösung der vorigen Aufgabe nur geringfügig modifizieren.

Durch Anwenden eines Schrittes des Gauß-Algorithmus ändert sich die Determinante folglich nicht!

Aufgabe 13. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j.$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente ist.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst in einem Beispiel die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix durch Entwicklung nach der ersten Spalte.

Aufgabe 14. Sei B eine Matrix, die durch Anwenden eines Gauß Schrittes aus A entsteht. In einer früheren Aufgabe wurde gezeigt, dass dann

$$\det(B) = \det(A)$$

und somit

$$\det(B) = 0 \text{ genau dann wenn } \det(A) = 0.$$

Durch eine Folge von Gauß Schritten kann eine Matrix auf Zeilenstufenform gebracht werden. Eine quadratische Matrix ist regulär genau dann wenn die Diagonalelemente der Zeilenstufenform alle ungleich Null sind. Zeigen Sie damit und unter Verwendung der vorigen Aufgaben, dass

$$A \text{ regulär genau dann wenn } \det(A) \neq 0.$$

Aufgabe 15. Für Determinanten gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Kann man daraus schließen, dass

$$\det(AB) = \det(BA)?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 16. Nennen Sie mindestens 6 äquivalente Bedingungen wann eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singulär ist.

Aufgabe 17. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwicklung nach der ersten Spalte und durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.

Aufgabe 18. Sei $\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ . Zeigen Sie, dass dann auch $c\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist für jedes $c \neq 0$.

Aufgabe 19. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ wenn gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Eigenvektoren von A zum gleichen Eigenwert λ sind, auch jede Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ungleich $\vec{0}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist.

Aufgabe 20. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A und von B . Zeigen Sie, dass dann $\vec{v}$ auch ein Eigenvektor von AB ist.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.