Heilbronn, den 26.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 12

Zu bearbeiten bis 2.6.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y \quad = \quad \sin(x+1).$$

Aufgabe 2. Die folgenden Fakten über Vektorräume sollten Sie sich einprägen:

- Ein Tupel von Vektoren heißt linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren Linearkombination der anderen ist.
- Der Vektorraum, der von Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ erzeugt wird, ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren, d.h.

$$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \quad = \quad \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Vektorraum, wenn es Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ gibt so dass

$$L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \quad = \quad M.$$

- Vektorräume sind genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^m$, die abgeschlossen sind unter Addition und unter skalarer Multiplikation.

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge eines *homogenen* LGS

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{0}$$

abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation, d.h.

- wenn $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ Lösungen des LGS sind, dann auch $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- wenn $\vec{x}$ Lösung des LGS ist, dann auch $u\vec{x}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$f''(t) - f(t) \quad = \quad e^{2t}(t+1), \quad f(0^-) = f'(0^-) = 0$$

für $t \geq 0$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)\cos(t-1).$$

Hinweis: Sie können den Verschiebungssatz hier *nicht* anwenden!

Aufgabe 5. Sei S ein kausales System mit $S(f) = h$ wobei h die Lösung der DGL

$$h'' + h \quad = \quad f$$

ist.

- Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ von S. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $f(t)$ und $h(t)$ eine Laplace Transformierte haben.
- Verifizieren Sie, dass für das von Ihnen berechnete $g(t)$ tatsächlich gilt

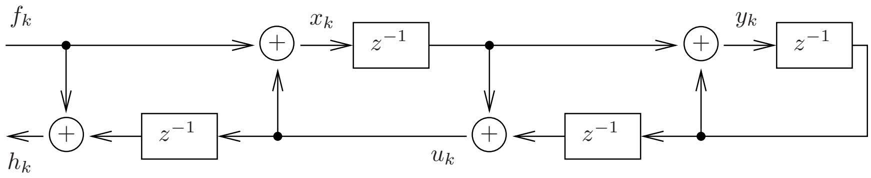
  $$S(\delta) \quad = \quad g$$

  bzw.

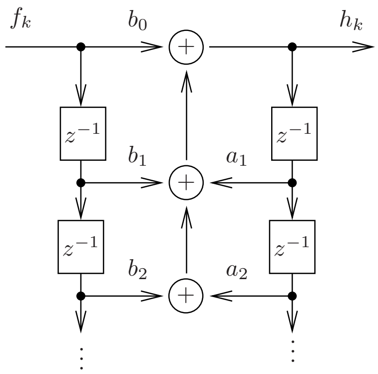
  $$g'' + g \quad = \quad \delta.$$

  Sie müssen hier $\sigma(t)$ immer dazuschreiben und beim Ableiten berücksichtigen, sonst kommt nicht das richtige Ergebnis heraus.

Aufgabe 6. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert.



Berechnen Sie Koeffizienten a_k, b_k so dass dieses System äquivalent zu folgendem System ist:



Hinweis:

- Stellen Sie unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k, u_k Differenzengleichungen auf.
- Transformieren Sie die Gleichungen unter Verwendung des Verschiebungssatzes in den Bildbereich.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, indem Sie im Bildbereich $X(z), Y(z), U(z)$ eliminieren. Es handelt sich um lineare Gleichungen mit den Unbekannten $F(z), H(z), X(z), Y(z), U(z)$ wobei die Koeffizienten rationale Funktionen in z^{-1} sind. Gehen Sie systematisch vor, sonst wird die Rechnung schnell unübersichtlich.
- Wenn Sie die Übertragungsfunktion als rationale Funktion in z^{-1} darstellen, können Sie die Koeffizienten a_k und b_k direkt ablesen.
- Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie aus den Filterkoeffizienten des äquivalenten Systems eine Differenzengleichung im Zeitbereich aufstellen und damit von beiden Systemen die ersten paar Glieder der Impulsantwort berechnen.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass für jedes LTI System S gilt

$$S(f * g) \quad = \quad f * S(g).$$

Alles was Sie dafür brauchen ist, dass für LTI Systeme S gilt

$$S(f) \quad = \quad f * S(\delta)$$

und das Assoziativgesetz der Faltung.

Aufgabe 8. Sei

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k \, 2^k \\ g_k &= \sigma_k \, k. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)_k$ einmal ohne Verwendung der z-Transformation und einmal mit der z-Transformation.

Aufgabe 9. Sei S ein System mit

$$[S(f)]_k \quad = \quad f_{2k}$$

Ist S linear und zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und B die Matrix, die man aus A erhält, indem man eine Zeile von A mit einem Skalar c multipliziert. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(B) = c \det(A).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante von B nach der skalierten Zeile.

Wie lässt sich folglich $\det(cA)$ aus $\det(A)$ berechnen?

Aufgabe 11. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Begründen Sie, weshalb A und A^{T} die gleichen Eigenwerte haben.

Aufgabe 12. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren von A und die zugehörigen Eigenräume. Nennen Sie zu jedem Eigenvektor seine algebraische und geometrische Vielfachheit.

Aufgabe 13. Seien A, X Matrizen mit

$$XA = E.$$

Zeigen Sie, dass dann das homogene LGS

$$A\vec{v} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $\vec{v} = \vec{0}$ hat.

Aufgabe 14. Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{\vec{v}}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Aufgabe 16. Sei A eine reguläre Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1} ist. Hinweis: Beginnen Sie mit der Gleichung

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Multiplizieren Sie beide Seiten mit A^{-1}. Nutzen Sie aus, dass $A^{-1}A = E$. Dann steht's schon fast da.

Aufgabe 17. Zeichnen Sie folgende Vektoren als Punkte in ein Koordinatensystem ein.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es entsteht eine Punktwolke, die anschaulich die "Richtung"

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat. Dies liegt daran, dass die Vektorkomponenten "korreliert" sind: Verschiebt man die Wolke etwas nach unten, liegen alle Punkte näherungsweise auf einer Geraden. Quantitativ drückt sich dies durch die Eigenvektoren de Kovarianzmatrix aus.

- Berechnen Sie zunächst den Mittelwertvektor

$$\vec{\mu} \quad = \quad \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \vec{x}_i$$

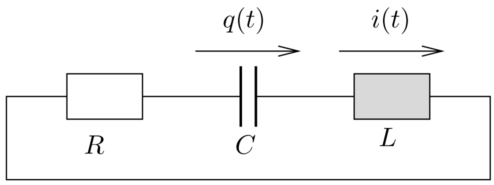
  und dann die Kovarianzmatrix

$$A \quad = \quad \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (\vec{x}_i - \vec{\mu})(\vec{x}_i - \vec{\mu})^{\mathrm{T}}.$$

  Die Summanden sind Produkte aus einem Spalten- und einem Zeilenvektor und ergeben somit 2×2 Matrizen. Da jeder Summand eine symmetrische Matrix ist, ist auch A symmetrisch.

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A. Da A symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell. Dass die Punktwolke eine ausgeprägte Hauptrichtung hat, zeigt sich darin, dass ein Eigenwert groß und der andere klein ist. Berechnen Sie den Eigenraum zum größeren der beiden Eigenwerte. (Verwenden Sie einen Taschenrechner.) Es muss sich eine Ursprungsgerade geben, deren Richtungsvektor näherungsweise dem o.g. Vektor $\vec{v}$ entspricht.

Aufgabe 18. Gegeben ist folgender Schwingkreis.



Der Zustand dieses Systems ist durch die Stromstärke und die Ladung des Kondensators gegeben, d.h. durch den Vektor

$$\vec{x}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} q(t) \\ i(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine konstante Matrix A so dass

$$\vec{x}'(t) \quad = \quad A\vec{x}(t) \qquad \text{für alle } t.$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

mit der Eigenwertmethode.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.