Heilbronn, den 18.12.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 13

Zu bearbeiten bis 8.1.2026

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Laplace Transformierte der Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte der Rechteck Schwingung

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \leq t \leq k+1 \text{ für } k = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

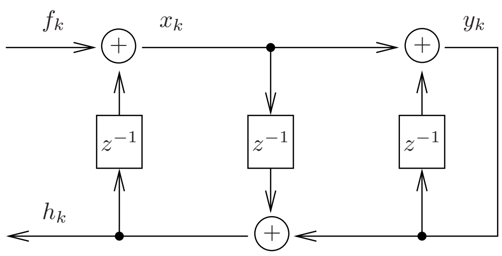
Hinweis: Es gilt $f(t) - f(t-2) = g(t)$ für alle t.

Aufgabe 2. Seien $f(t), g(t)$ zwei T-periodische Funktionen mit gegebenen Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ und $z_k^{(g)}$. Berechnen Sie hieraus die Fourier Koeffizienten von $f(t)g(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis und zeigen Sie, dass hierbei eine diskrete Faltung auftritt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

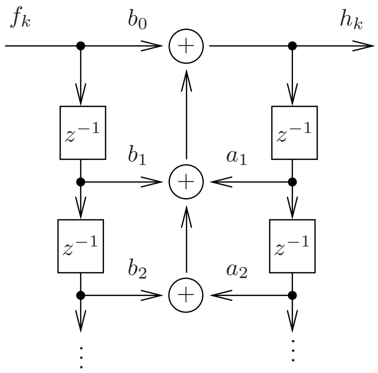
Aufgabe 4. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert wobei $f_k = h_k = 0$ für $k < 0$.



- Stellen Sie Differenzengleichungen unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort des Systems, indem Sie folgende Tabelle ausfüllen:

k	f_k	x_k	y_k	h_k
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems, indem Sie aus den Gleichungen im Bildbereich $X(z)$ und $Y(z)$ eliminieren.
- Berechnen Sie aus der Übertragungsfunktion die Koeffizienten a_k und b_k, so dass das System äquivalent ist zu folgendem Filter.



- Stellen Sie anhand dieses äquivalenten Systems eine Differenzengleichung auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort. Das Ergebnis muss gleich sein wie die oben berechnete Impulsantwort.

Aufgabe 5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ wenn gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Eigenvektoren von A zum gleichen Eigenwert λ sind, auch jede Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ungleich $\vec{0}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist.

Aufgabe 6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A. Nennen Sie zu jedem Eigenwert seine geometrische und seine algebraische Vielfachheit.

Aufgabe 7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A, die zugehörigen Eigenräume von A und zu jedem Eigenraum eine Basis. Geben Sie zu jedem Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit an.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass eine Matrix singulär ist genau dann wenn sie einen Eigenwert Null hat. Hinweis:

- Eine Matrix ist singulär genau dann wenn ihre Spalten linear abhängig sind.
- Vektoren sind linear abhängig genau dann wenn sie den Nullvektor nichttrivial als Linearkombination erzeugen können.

Aufgabe 9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{\vec{v}}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Aufgabe 10. Sei A eine reguläre Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1} ist. Hinweis: Beginnen Sie mit der Gleichung

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Multiplizieren Sie beide Seiten mit A^{-1}. Nutzen Sie aus, dass $A^{-1}A = E$. Dann steht's schon fast da.

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor. Da A symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten zueinander orthogonal sein. Prüfen Sie dies nach.

Aufgabe 12. Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind immer reell. Dies soll für den Spezialfall von 2×2 Matrizen gezeigt werden. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2 Matrix. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass diese reell sind für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13. Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Folge f_k heißt Eigenfolge eines diskreten LTI Systems S mit Eigenwert λ wenn

$$\begin{aligned} S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)]_k &= \lambda f_k \quad \text{für alle } k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{C}$ die Folge

$$f_k = a^k, \quad -\infty < k < \infty$$

Eigenfolge von S ist mit Eigenwert

$$\lambda = G(a)$$

wobei $G(z)$ die Übertragungsfunktion des Systems ist.

Hinweis: Da S LTI ist, gibt es eine Folge g_k so dass $S(f) = f * g$. Die Übertragungsfunktion von S ist dann

$$G(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell z^{-\ell}.$$

Berechnen Sie

$$[S(f)]_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell f_{k-\ell}$$

für $f_k = a^k$ und formen Sie so lange um, bis Sie bei $G(a) f_k$ herauskommen.

Aufgabe 14. Sei $\vec{v}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert λ und $\mu \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $\vec{v}$ auch Eigenvektor von $A + \mu E$ ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Schreiben Sie zunächst auf, was die Annahmen sind und was zu zeigen ist.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= 2x_1(t) \\
x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\
x_3'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t).
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \\
x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t)
\end{aligned}$$

mit der Eigenwertmethode.

Aufgabe 17. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $\vec{v}e^{\lambda t}$ eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Zeigen Sie, dass dann $\vec{v}e^{t/\lambda}$ eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A^{-1}\vec{x}(t)$$

ist.

Aufgabe 18. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit zwei Eigenwerten

$$\lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = 5.$$

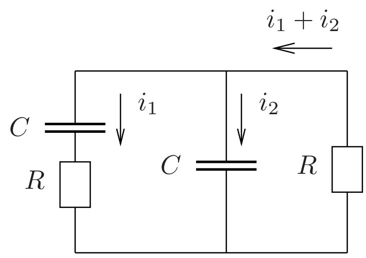
Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \\ E_5 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie hiermit die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Aufgabe 19. In folgendem Bild ist eine elektrische Schaltung bestehend aus zwei gleichen Widerständen mit R Ohm und zwei gleichen Kondensatoren mit $C \mu F$ dargestellt.



Berechnen Sie die allgemeine Lösung für die Spannung an den Kondensatoren für $t \geq 0$.

Aufgabe 20. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine singuläre Matrix. Begründen Sie, weshalb in diesem Fall die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

auch zeitkonstante Lösungsfunktionen enthält. Sie dürfen in der Begründung alle Ihnen bekannten Eigenschaften von singulären Matrizen verwenden.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.