

## Übungen zu Mathematik 3

## Blatt 14

Zu bearbeiten bis 25.6.22

<b>Name:</b>	<b>Matrikelnr.:</b>
--------------	---------------------

**Pflichtaufgabe.** Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = 3x(t) + t, \quad x(0^-) = 2$$

für  $t \geq 0$  mit Laplace Transformation. Führen Sie die Rücktransformation auf zwei Weisen durch:

- mit Partialbruchzerlegung
- mit dem Faltungssatz.

Das Ergebnis muss natürlich gleich sein.

Berechnen Sie dann die Lösung mit dem  $e^{\lambda t}$  Ansatz, indem Sie zunächst die allgemeine homogene Lösung und dann eine partikuläre inhomogene Lösung bestimmen.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^k f_{\ell} = (f * \sigma)_k.$$

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie die  $z$ -Transformierte von

$$f_k = \sigma_k k^2 2^k.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

**Aufgabe 4.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte der inversen Matrix von  $A$ , d.h. von  $A^{-1}$ .

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6.** Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißen ähnlich, wenn es eine Matrix  $T$  gibt so dass

$$T^{-1}AT = B.$$

Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die selben Eigenwerte haben.

Hinweis: Zeigen Sie, dass wenn  $\vec{v}$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$  ist,  $T^{-1}\vec{v}$  Eigenvektor von  $T^{-1}AT$  mit gleichem Eigenwert  $\lambda$  ist.

**Aufgabe 7.** Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Funktion  $f$  heißt Eigenfunktion eines LTI Systems  $S$  mit Eigenwert  $\lambda$  wenn

$$\begin{aligned} S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)](t) &= \lambda f(t) \quad \text{für alle } t. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes  $a \in \mathbb{C}$  die Funktion

$$f(t) = e^{at}, \quad -\infty < t < \infty$$

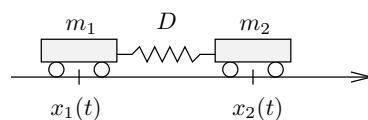
Eigenfunktion von  $S$  ist mit Eigenwert  $G(a)$  wobei  $G(s)$  die Laplace Transformierte der Impulsantwort  $g(t)$  des Systems ist.

Berechnen Sie

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

und formen Sie so lange um, bis Sie bei  $G(a)f(t)$  herauskommen. Der Rechenweg ist sehr kurz.

**Aufgabe 8.** Zwei Wägen mit Massen  $m_1, m_2$  sind auf einer horizontalen Geraden reibungsfrei über eine Feder mit Ruhelänge Null und Federkonstante  $D$  verbunden.



- Berechnen Sie die Kräfte, die auf die Wägen wirken und stellen Sie ein lineares DGL System zweiter Ordnung für die Positionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Wägen auf, d.h.

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= \dots \\ x_2''(t) &= \dots \end{aligned}$$

- Nehmen Sie als Hilfsgrößen die Geschwindigkeiten  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  der beiden Wägen dazu um aus dem DGL System zweiter Ordnung ein DGL System erster Ordnung mit 4 Gleichungen und den 4 Unbekannten  $x_1(t), v_1(t), x_2(t), v_2(t)$  zu machen. Hinweis: Zwei der Gleichungen sind

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= v_1(t) \\x_2'(t) &= v_2(t)\end{aligned}$$

Die anderen beiden haben die Form

$$\begin{aligned}v_1'(t) &= \dots \\v_2'(t) &= \dots\end{aligned}$$

wobei  $v' = a$  die Beschleunigung ist.

- Finden Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  so dass

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

für alle  $t$  wobei

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

der Systemzustand ist.

- Was würde sich an der Matrix  $A$  ändern, wenn zusätzlich eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $F_R(t) = rv(t)$  dazukäme?

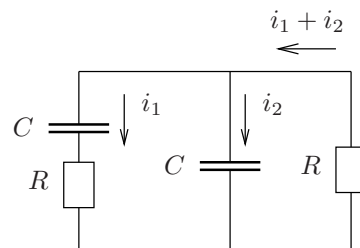
**Aufgabe 9.** Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor. Da  $A$  symmetrisch ist, müssen die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten zueinander orthogonal sein. Prüfen Sie dies nach.

**Aufgabe 10.** Sei  $\vec{v}$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $c\vec{v}$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$  ist für jedes  $c \neq 0$ .

**Aufgabe 11.** In folgendem Bild ist eine elektrische Schaltung bestehend aus zwei gleichen Widerständen mit  $R$  Ohm und zwei gleichen Kondensatoren mit  $C \mu F$  dargestellt.



Berechnen Sie die allgemeine Lösung für die Spannung an den Kondensatoren für  $t \geq 0$ .

**Aufgabe 12.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reguläre Matrix und  $\vec{v}e^{\lambda t}$  eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Zeigen Sie, dass dann  $\vec{v}e^{t/\lambda}$  eine Lösung von

$$\vec{x}'(t) = A^{-1}\vec{x}(t)$$

ist.

**Aufgabe 13.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von  $A$ .
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems *zweiter* Ordnung

$$\vec{x}''(t) = A\vec{x}(t).$$

Hinweis: Wie bei DGL Systemen *erster* Ordnung erhalten Sie alle Basislösungen mit dem Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\lambda t}.$$

**Aufgabe 14.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine reelle Matrix mit

$$A \begin{pmatrix} j \\ 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+j \end{pmatrix}.$$

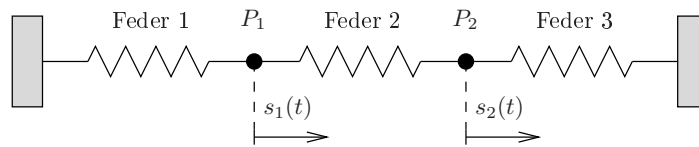
- Berechnen Sie alle reellen Lösungsfunktionen  $\vec{x} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

- Berechnen Sie die Matrix  $A$ .

**Aufgabe 15.** In folgendem Bild ist ein mechanisches System mit drei Federungen und zwei Massepunkten  $P_1$  und  $P_2$  dargestellt. Alle Federkonstanten seien  $D = 1$ , die Massepunkte haben beide Masse  $m = 1$ .

In der Ruhelage sind alle Federungen entspannt, d.h. es wirken keine Kräfte. Die Auslenkung der Massepunkte aus der Ruhelage nach rechts wird mit  $s_1(t)$  bzw.  $s_2(t)$  beschrieben.



Berechnen Sie die allgemeine Lösung für  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  und gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Berechnen Sie die Dehnungen der drei Federn in Abhängigkeit von  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ . Hinweis: Die Dehnung von Feder 2 ist  $s_2(t) - s_1(t)$ .
- Auf jeden Massepunkt wirken die Kräfte von zwei Federn. Überlegen Sie sich, welche Kraft nach links und welche nach rechts zieht. Berechnen Sie die resultierende Kraft auf jeden Massepunkt.
- Berechnen Sie die Beschleunigungen der Massepunkte  $s_1''(t)$  und  $s_2''(t)$  mit dem Trägheitsgesetz und stellen Sie ein lineares DGL System zweiter Ordnung auf.
- Formen Sie das DGL System durch Diagonalisierung so um, dass zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstehen.
- Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen mit dem  $e^{\lambda t}$  Ansatz.
- Berechnen Sie hieraus die allgemeine Lösung des ursprünglichen DGL Systems.

**Aufgabe 16.** Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \\x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t)\end{aligned}$$

mit der Eigenwertmethode.

**Aufgabe 17.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine singuläre Matrix. Begründen Sie, weshalb in diesem Fall die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

auch zeitkonstante Lösungsfunktionen enthält. Sie dürfen in der Begründung alle Ihnen bekannten Eigenschaften von singulären Matrizen verwenden.

**Pflichtaufgabe.** Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.