Heilbronn, den 25.6.2026 Prof. Dr. V. Stahl SS 26

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 15

Zu bearbeiten bis -

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie die inverse Fourier Transformierte von

$$F(\omega) \quad = \quad je^{\omega}\delta(\omega-1).$$

Aufgabe 2. Sei

$$F(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Übertragungsfunktion eines Hochpass Filters mit cutoff Frequenz 1. Berechnen Sie die Impulsantwort $f(t)$ dieses Filters.

Hinweis: Die direkte Anwendung der Formel für die inverse Fourier Transformation funktioniert hier nicht, da im Zeitbereich eine Distribution entsteht. Sie müssen daher zunächst $F(\omega)$ in eine Summe von Funktionen zerlegen, deren Rücktransformation einfacher geht.

Aufgabe 3. Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} t & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Ableitung $f'(t)$ von $f(t)$ und beachten Sie den Spezialfall $\omega = 0$.

Hinweis: Da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, ist $f'(t)$ gerade. Vereinfachen Sie das Ergebnis daher so, dass keine komplexen Zahlen darin vorkommen.

Aufgabe 4. Die Fourier Transformierte $S(\omega)$ der Sprungfunktion $\sigma(t)$ kann man wie folgt berechnen. Aus

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega F(\omega)$$

folgt mit $f(t) = \sigma(t)$

$$\sigma'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega S(\omega).$$

Da $\sigma'(t) = \delta(t)$ und $\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 1$ folgt

$$\sigma'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} j\omega S(\omega) &= 1 \\ S(\omega) &= \frac{1}{j\omega}. \end{aligned}$$

Dies kann jedoch nicht sein: Da $1/j\omega$ rein imaginär ist, müsste $\sigma(t)$ eine ungerade Funktion sein, was nicht stimmt. Finden Sie den Fehler, korrigieren Sie diesen und leiten Sie damit den korrekten Wert für $S(\omega)$ her.

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie man die Impulsantwort eines LTI Systems experimentell mit Hilfe der Fourier Transformation bestimmen kann. Sei

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos(\omega t) \\ f_2(t) &= \sin(\omega t) \\ f_3(t) &= e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Von einem LTI System S kann

$$S(f_1) = h_1$$

für beliebiges $\omega \in \mathbb{R}$ gemessen werden.

- Berechnen Sie $S(f_2)$ und $S(f_3)$ in Abhängigkeit von h_1.
- Zeigen Sie, dass

  $$S(e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} G(\omega)$$

  wobei $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems S ist.
- Wie kann man hiermit die Impulsantwort von S berechnen? Beachten Sie, dass alle Funktionen von ω abhängig sind, obwohl nur die Abhängigkeit von t explizit genannt wird.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und

$$F(\omega) = \begin{cases} e^{-j\varphi}e^{-a\omega} & \text{falls } \omega > 0 \\ e^{j\varphi}e^{a\omega} & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die inverse Fourier Transformierte $f(t)$ von $F(\omega)$. Hinweis: Es gilt $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, folglich ist $f(t)$ reell.
- Berechnen Sie dann für $t \neq 0$

  $$g(t) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} f(t).$$

  Dies ist die inverse Fourier Transformierte von

  $$G(\omega) = \begin{cases} e^{-j\varphi} & \text{falls } \omega > 0 \\ e^{j\varphi} & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

  Eine Faltung mit $g(t)$ bedeutet somit, dass alle im Signal enthaltenen Schwingungen unabhängig von ihrer Frequenz $\omega > 0$ die selbe Phasenverschiebung $-\varphi$ erfahren. Weiterhin gilt

  $$G(\omega) + \overline{G(\omega)} = 2\mathrm{re}(G(\omega)) = \begin{cases} 2\cos(\varphi) & \text{für } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0. \end{cases}$$

  Folglich gilt im Zeitbereich

  $$g(t) + g(-t) = 2\cos(\varphi)\delta(t).$$

  Sie können damit verifizieren, dass $g(-t) = -g(t)$ für $t \neq 0$ gelten muss. An der Stelle $t = 0$ hat $g(t)$ jedoch einen Impuls $\cos(\varphi)\delta(t)$, den Sie auf die zuvor berechnete Funktion $g(t)$ addieren müssen, um die inverse Fourier Transformierte von $G(\omega)$ auch im Fall $t = 0$ zu erhalten.

  Im Spezialfall $\varphi = 0$ werden die Schwingungen nicht verschoben und das Signal bleibt bei Faltung mit $g(t)$ unverändert. Folglich muss in diesm Fall $g(t) = \delta(t)$ sein.

  Im Spezialvall $\varphi = \pi$ werden alle Schwingungen um Winkel π verschoben und somit wird das Signal negiert. In diesem Fall muss folglich $g(t) = -\delta(t)$ sein. Verifizieren Sie dies.
- Berechnen Sie schließlich die Funktion $h(t)$, die man aus $g(t)$ im Spezialfall $\varphi = \pi/2$ erhält. Dies ist dann die inverse Fourier Transformierte von

  $$H(\omega) = \begin{cases} -j & \text{falls } \omega > 0 \\ j & \text{falls } \omega < 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

  Das LTI System mit Impulsantwort $h(t)$ heißt Hilbert Transformation und spielt in der Signalverarbeitung (Single Side Band Modulation) eine wichtige Rolle und wird u.a. in Ultraschallgeräten verwendet.

Aufgabe 7. Sei $f(t)$ an der Stelle $\hat{t}$ stetig und

$$\sigma(t-\hat{t})f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t-\hat{t})f'(t).$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)\frac{\cos(t)}{e^{t-1}}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t-1)\sin(t-1)$$

und von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)\sin(t-1).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Hinweis: Bei der zweiten Transformation müssen Sie die Sinus Funktion durch komplexe e-Funktionen darstellen und das Laplace Integral berechnen.

Aufgabe 10. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) = \frac{3+s}{e^{2s}(s^2-1)}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie eine Folge f_k mit

$$\begin{aligned} (\sigma_k f_{k+1}) * f_k &= f_k \\ f_0 &= 3 \\ f_k &= 0 \qquad \text{für } k < 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei S ein Übertragungskanal, der das Eingangssignal f um einen Takt verzögert, d.h.

$$[S(f)]_k \quad = \quad f_{k-1},$$

bzw.

$$S(f) \quad = \quad f_{.-1}$$

oder

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \ldots \rangle) \quad = \quad \langle 0, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle)$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S.
- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

- Es ist technisch nicht möglich, diesen Kanal zu kompensieren da man dazu einen Takt in die Zukunft schauen müsste. Trotzdem gibt es eine Folge g so dass

$$S(f) * g = f$$

für alle Folgen f. Die Folge g ist allerdings nicht kausal, d.h. die Eigenschaft

$$g_k = 0 \text{ für } k < 0$$

ist *nicht* erfüllt. Bestimmen Sie diese Folge g_k.

Aufgabe 13. Sei

$$g_k \quad = \quad a^k.$$

Berechnen Sie eine Folge h_k so dass

$$(g * h)_k \quad = \quad \delta_{k-1}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte f_k der Funktion

$$F(z) = \frac{z}{(z-2)^3}$$

mit Partialbruchzerlegung und der Korrespondenz

$$a^{k-n}\binom{k-1}{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(z-a)^n}.$$

Berechnen Sie dann f_0, f_1, f_2 und f_3.

Aufgabe 15. Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und f eine Folge mit

$$f_k \quad = \quad \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i f_{k-i} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge f_k ist durch diese Gleichung nicht eindeutig definiert. Es gibt jedoch genau eine solche Folge f_k, die eine z-Transformierte $F(z)$ hat. Berechnen Sie dieses $F(z)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine negativen Potenzen von z darin auftreten.

Aufgabe 16. Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $u \neq -1$,

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \leq 0 \\ 1 & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = (1-u)f_{k+1} + uf_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k. Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k(1-u)f_{k+1} + \sigma_k u f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Für welche Werte von u hat die Folge f_k einen endlichen Grenzwert? Berechnen Sie diesen.

Aufgabe 17. Sei

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ a & \text{falls } k = 0 \\ b & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = \frac{1}{4}f_{k+1} + \frac{3}{4}f_k \qquad \text{für } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k. Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k \frac{1}{4} f_{k+1} + \sigma_k \frac{3}{4} f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Berechnen Sie den Grenzwert von f_k für $k \to \infty$.

Aufgabe 18. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{1+z^{-2}}{z^4+z^5}.$$

Aufgabe 19. Mit dem Faltungssatz der Laplace Transformation erhält man

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}})(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^n}.$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma(t)t^{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{(n-1)!}{s^n}.$$

Daraus folgt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n \text{ Mal}})(t) \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!}\sigma(t)t^{n-1}.$$

Beweisen Sie dies nun durch Induktion im Zeitbereich (d.h. ohne Laplace Transformation).

Aufgabe 20. Das de Morgansche Gesetz

$$\neg(F \wedge G) \quad = \quad \neg F \vee \neg G$$

lässt sich auf $n \geq 2$ Variablen verallgemeinern:

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \quad = \quad \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \ldots \vee \neg F_n.$$

Beweisen Sie dies durch Induktion.

Aufgabe 21. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\underbrace{\sigma * \sigma * \cdots * \sigma}_{n+1 \text{mal}})_k \quad = \quad \binom{k+n}{n}.$$

Führen Sie den Beweis einmal mit z-Transformation unter Verwendung des Faltungssatzes, des Verschiebungssatzes und der Korrespondenz

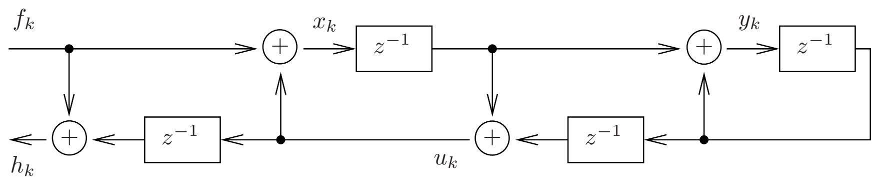
$$a^{k-n}\binom{k-1}{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(z-a)^n}$$

und einmal mit Induktion. Sie dürfen hierbei die Formel

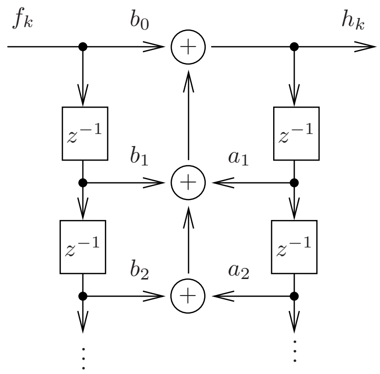
$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{\ell+n}{n} \quad = \quad \binom{k+n+1}{n+1}$$

verwenden.

Aufgabe 22. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert.



Berechnen Sie Koeffizienten a_k, b_k so dass dieses System äquivalent zu folgendem System ist:



Hinweis:

- Stellen Sie unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k, u_k Differenzengleichungen auf.
- Transformieren Sie die Gleichungen unter Verwendung des Verschiebungssatzes in den Bildbereich.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, indem Sie im Bildbereich $X(z), Y(z), U(z)$ eliminieren. Es handelt sich um lineare Gleichungen mit den Unbekannten $F(z), H(z), X(z), Y(z), U(z)$ wobei die Koeffizienten rationale Funktionen in z^{-1} sind. Gehen Sie systematisch vor, sonst wird die Rechnung schnell unübersichtlich.
- Wenn Sie die Übertragungsfunktion als rationale Funktion in z^{-1} darstellen, können Sie die Koeffizienten a_k und b_k direkt ablesen.
- Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie aus den Filterkoeffizienten des äquivalenten Systems eine Differenzengleichung im Zeitbereich aufstellen und damit von beiden Systemen die ersten paar Glieder der Impulsantwort berechnen.

Aufgabe 23. Ein digitaler FIR Filter bildet eine Eingangsfolge f_k auf eine Ausgangsfolge

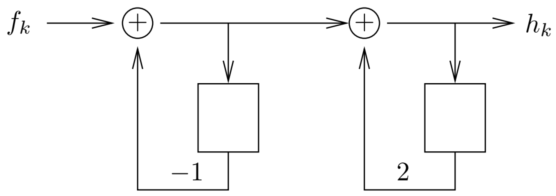
$$h_k \quad = \quad f_k - f_{k-1} + f_{k-2} - f_{k-3} + \ldots - f_{k-n} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell f_{k-\ell}$$

ab, wobei $n > 0$ eine ungerade Konstante ist.

Berechnen Sie die Impulsantwort g_k und die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Filters.

Formen Sie die Übertragungsfunktion so um, dass Sie daraus einen rekursiven Filter entwickeln können, der sich gleich verhält wie der o.g. FIR Filter, aber nur 2 Additionen pro Takt braucht. Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieses rekursiven Filters.

Aufgabe 24. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und einen Term für die Impulsantwort g_k des folgenden Filters. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.



Die Kästen bedeuten hierbei Verzögerungsglieder, die Zahlen an den Verbindungen stehen für Multiplikationen.

Aufgabe 25. Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26. Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nicht nur bei Matrizen sondern auch bei LTI Systemen. Eine Funktion f heißt Eigenfunktion eines LTI Systems S mit Eigenwert λ wenn

$$\begin{aligned} S(f) &= \lambda f \quad \text{bzw.} \\ [S(f)]\,(t) &= \lambda f(t) \quad \text{für alle } t. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die komplexe Schwingung

$$f(t) = e^{j\hat{\omega}t}$$

mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ Eigenfunktion von S ist mit Eigenwert

$$\lambda = G(\hat{\omega})$$

wobei $G(\omega)$ die Übertragungsfunktion des Systems ist.

Hinweis: Da S LTI ist, gilt $S(f) = f * g$ wobei g die Impulantwort des Systems ist. Die Übertragungsfunktion $G(\omega)$ des Systems ist die Fourier Transformierte von $g(t)$:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Berechnen Sie

$$[S(f)]\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

und formen Sie so lange um, bis Sie bei $G(\omega)f(t)$ herauskommen. Der Rechenweg ist sehr kurz.

Aufgabe 27. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
- Nennen Sie von jedem Eigenwert seine geometrische und seine algebraische Vielfachheit.

Aufgabe 28. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Berechnen Sie dann eine Basis für den Vektorraum der *reellen* Lösungsfunktionen des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie die Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

Aufgabe 30. Gegeben sei das DGL System

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Versuchen Sie, die allgemeine Lösung mit der Eigenwertmethode zu berechnen. Sie erhalten hierbei nur zwei Basislösungen, d.h. nicht alle Lösungen des DGL Systems.
- Zeigen Sie, dass z.B. auch

  $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t$$

  eine Lösungsfunktion ist.

- Berechnen Sie dann alle Lösungen mit der Laplace Transformation.

Aufgabe 31. Gegeben sei das DGL System

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$.

- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit der Eigenwertmethode.
- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit Laplace Transformation.

Aufgabe 32. Gegeben sei die lineare homogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizenten

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \quad = \quad 0.$$

Formen Sie diese DGL so um, dass ein DGL System erster Ordnung der Form

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

entsteht. Benutzen Sie die Substitution

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 33. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung

$$f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = 0.$$

Die DGL zweiter Ordnung kann in ein DGL System erster Ordung umgeformt werden mit der Substitution

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t) \\ x_2(t) &= f'(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(t) &= x_1(t) \\ f'(t) &= x_2(t) \\ f''(t) &= x_2'(t) \end{aligned}$$

und man erhält das DGL System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{x}'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Versuchen Sie, die allgemeine Lösung dieses DGL System mit der Eigenvektormethode zu bestimmen. Vergleichen Sie die Lösung des DGL Systems mit der Lösung der DGL zweiter Ordnung.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.