Heilbronn, den 2.10.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 2

Zu bearbeiten bis 9.10.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + (1 + x^2)y \quad = \quad e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y = \cos(x).$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \cos(3t)e^{-2t}dt.$$

Aufgabe 5. Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}.$$

- Skizzieren Sie die Funktion in einer Umgebung von $\hat{x} = 0$.
- Hat f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$?
- Ist f stetig an der Stelle $\hat{x}$?
- Ist f differenzierbar an der Stelle $\hat{x}$?

Es genügt, die Fragen mit ja oder nein zu beantworten, eine Begründung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 6. Zeigen Sie unter Verwendung von komplexen Zahlen, dass

$$\cos(t-\pi) \quad = \quad -\cos(t).$$

Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t) \\ g(t) &= \begin{cases} t & \text{falls } \pi < t < 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$ und stellen Sie das Ergebnis in der Form

$$(f * g)(t) \quad = \quad a\cos(t) + b\sin(t)$$

dar, wobei a, b Konstanten sind.

Aufgabe 7. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{-t} \\ g(t) &= \cos(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$.

Aufgabe 8. Sei

$$f(t) = \sigma(t-1) \text{ und } g(t) = \sigma(t-2)e^t.$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Aufgabe 9. Sei S ein System mit

$$[S(f)]\,(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{jt\tau}d\tau.$$

Vereinfachen Sie den Term $S(f_{\hat{t}})$ so dass er am Ende die Form

$$K\,S(f)$$

hat, wobei K von t und $\hat{t}$ abhängt. Berechnen Sie diesen Faktor K.

Hinweis: Die Vorgehensweise ist ähnlich wie beim Beweis des Verschiebungssatzes der Fourier Transformation.

Aufgabe 10. Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f(-t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(-\omega) \quad \text{und} \quad \overline{f(t)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \overline{F(-\omega)}.$$

Zeigen Sie, dass aus der zweiten Eigenschaft im Spezialfall eines *reellen* Signals $f(t)$ folgt

$$F(-\omega) \quad = \quad \overline{F(\omega)}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e-Funktionen dar.

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von

$$f(t) = \sigma(t)\sin(t)e^{-t}.$$

Aufgabe 14. In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie man die Impulsantwort eines LTI Systems experimentell mit Hilfe der Fourier Transformation bestimmen kann. Sei

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos(\omega t) \\ f_2(t) &= \sin(\omega t) \\ f_3(t) &= e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Von einem LTI System S kann

$$S(f_1) = h_1$$

für beliebiges $\omega \in \mathbb{R}$ gemessen werden.

- Berechnen Sie $S(f_2)$ und $S(f_3)$ in Abhängigkeit von h_1.
- Zeigen Sie, dass

  $$S(e^{j\omega t}) = e^{j\omega t}G(\omega)$$

  wobei $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ des Systems S ist.
- Wie kann man hiermit die Impulsantwort von S berechnen? Beachten Sie, dass alle Funktionen von ω abhängig sind, obwohl nur die Abhängigkeit von t explizit genannt wird.

Aufgabe 15. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $f'(t)$. Hinweis: Stellen Sie $f(t)$ als Summe zweier Sprungfunktionen dar, deren Ableitungen Dirac Impulse sind.

- Berechnen Sie die Fourier Transformierte von $f(t)$ und von $f'(t)$ und verifizieren Sie damit, dass

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega F(\omega).$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} e^{-t}\cos(t) & \text{falls } t \geq 0 \\ e^{t}\cos(t) & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(t)$ eine gerade Funktion ist, d.h. $f(-t) = f(t)$. Folglich ist $F(\omega)$ reell.

Aufgabe 17. Sei f eine T-periodische Funktion mit Fourier Koeffizienten z_k, d.h.

$$f(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sei g eine beliebige Funktion mit Fourier Transformierter $G(\omega)$.

Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten z'_k von $f * g$.

Aufgabe 18. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion mit Fourier Transformierter $F(\omega)$. Zeigen Sie, dass dann

$$F(0) \quad = \quad 0$$

gelten muss.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.