Heilbronn, den 24.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 3

Zu bearbeiten bis 31.3.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$2y'' + 4y' + 12y \quad = \quad e^{1-x}\cos(2x+1).$$

Aufgabe 2. Sei S ein *bijektives* LTI System, d.h. zu jeder Funktion h existiert genau eine Funktion f mit

$$S(f) \quad = \quad h.$$

Damit existiert das inverse System S^{-1}, das jeder Funktion h diese Funktion f zuordnet, d.h.

$$S^{-1}(h) \quad = \quad f.$$

Ist S^{-1} linear und zeitinvariant? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Vor nicht allzu langer Zeit wurde gezeigt, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven linearen Funktion wieder linear ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sqrt{t^2+1}\,\delta(t-1).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Ausblendeigenschaft des Dirac Impulses und vereinfachen Sie dadurch das Fourier Integral.

Aufgabe 4. Sei $f(t)$ eine Funktion mit

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-(\omega^2)}.$$

Sei $g(t) = \cos(t)$ und

$$h(t) \quad = \quad (f_{\hat{t}} * g)(t)$$

wobei $f_{\hat{t}}(t) = f(t-\hat{t})$.

- Berechnen Sie $H(\omega)$ mit Hilfe des Faltungssatzes. Vereinfachen Sie das Ergebnis, indem Sie die Eigenschaften des Dirac Impulses verwenden.
- Berechnen Sie dann $h(t)$ durch inverse Fourier Transformation. Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass kein j mehr darin auftritt.

Aufgabe 5. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ te^t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ und geben Sie an für welche Werte von s diese existiert.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Integrale sofern sie existieren.

$$\int_0^\infty \cos(t)e^t dt, \qquad \int_{-\infty}^0 \cos(t)e^t dt.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = (\sigma(t) - \sigma(t-1))e^t.$$

Hinweis: Zeichnen Sie zuerst $\sigma(t-1)$ und $\sigma(t)$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = \sigma(t)\frac{\sin(\omega t)}{e^{at}}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)^4 e^s}.$$

Sie dürfen die Formelsammlung im Skript verwenden.

Aufgabe 10. Berechnen Sie für beliebiges $t > 0$ das bestimmte Integral

$$g(t) = \int_0^t \delta(\tau - 1)d\tau.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie eine Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s+1}{s^2+s-2}.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung. Bei der Rücktransformation der Partialbrüche hilft die Korrespondenz

$$\frac{1}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ \sigma(t)e^{at}.$$

Aufgabe 12. Sei

$$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f''(t)$, $(\sigma(t)f'(t))'$ und $(\sigma(t)f(t))''$.

Aufgabe 13. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t-2)\cos(t-2)$$
$$\sigma(t)\cos(t-2)$$

Aufgabe 14. Der Dämpfungssatz der Laplace Trasformation besagt, dass

$$e^{-at}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformiert von $\sigma(t)e^t\cos(\omega t)$ und von $\sigma(t)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$. Stellen Sie dazu die Sinus Funktion als Summe zweier komplexer e-Funktionen dar.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)\sqrt{e^t}.$$

Sie dürfen alle Korrespondenzen im Anhang des Skripts benutzen.

Aufgabe 16. Vereinfachen Sie den Term

$$\delta(t-1)\int_0^t e^u du$$

so weit wie möglich.

Aufgabe 17. Skizzieren Sie die Funktion

$$f(t) = \sigma(t)\cos(t)$$

und die Funktionen

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t-2\pi) \\ h(t) &= f(t) - g(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte von $h(t)$.

Aufgabe 18. Sei

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$

ein Impulszug. Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Hinweis. Für $|a| < 1$ lässt sich die Summe

$$S \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

wie folgt in geschlossener Form berechnen. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
aS &= a\sum_{k=0}^{\infty} a^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} \\
&= a^1 + a^2 + a^3 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a^k.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
S - aS &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=1}^{\infty} a^k \\
&= a^0 \\
&= 1 \\
S(1-a) &= 1 \\
S &= \frac{1}{1-a}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)\cos(at+b).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit, dass keine komplexen e-Funktionen darin auftreten.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.